

## INFLUENCE OF NONPROPORTIONAL DAMPING ON FREE VIBRATIONS OF SLENDER STRUCTURES

S. Hračov\*

***Summary:** This paper deals with the influence of the nonproportional damping on the free vibration of a slender structures. It is focused on the mutual comparison of proportionally and nonproportionally damped discrete models and their teoretical solution. It is shown, that the solution for nonproportional damping is characterized by the movement of the vibration nodes along the structure. It is caused by different phase between each component of displacement vector. This phenomenon is presented on the example of tall structure - TV tower. The installation of a vibration absorber decreases the negative wind effects and changes the whole structure into nonproportionaly damped system with nonstationary location of the nodes.*

### 1. Úvod

Současný trend stavebnictví směřuje k výstavbě vyšších a štíhlejších konstrukcí, které jsou poměrně lehké a poddajné, což se projevuje výraznější odezvou na dynamické zatížení. Přesnost jejího určení závisí především na návrhu výpočetního modelu, který je vždy určitým kompromisem mezi požadovanou jednoduchostí matematického řešení a skutečným fyzikálním působením. Důležitou roli přitom hraje vyjádření útlumu, významného dynamického parametru každé konstrukce. Dnes se nejčastěji vyjadřuje ve formě tzv. proporcionálního tlumení, kdy matice útlumu je přímo úměrná matici hmotnosti, tuhosti nebo je jejich lineární kombinací. Její výhodou je snadná matematická řešitelnost odezvy, která však ne vždy s dostatečnou přesností vystihuje skutečnost. Reálnější údaje o dynamickém chování konstrukcí získáme použitím diskrétních výpočtových modelů s uvážením vlivu neproporcionálního útlumu, jehož matice tlumení má obecný tvar. Řešení je v tomto případě sice složitější, ale při dnešní úrovni počítačové techniky již nepředstavuje vážnější problém.

Cílem tohoto příspěvku je tedy ukázat rozdílnosti v dynamickém chování vlastního kmitání diskrétních lineárních soustav s proporcionálním a neproporcionálním tlumením, uvést transformace k sestavení nezávislých pohybových rovnic, které bude možno pro jednotlivé případy použít a tyto závěry pak aplikovat na skutečnou stavební konstrukci – věž TV Ostrava- Hošťálkovice.

---

\* Ing. Stanislav Hračov : UTAM AV ČR, Prosecká 76, 190 00 Praha 9, e-mail: hracov.itam.cas.cz

## 2. Vlastní kmitání diskretních soustav s vlivem proporcionálního útlumu

Soustavu pohybových rovnic systému o  $n$  stupních volnosti v zobecněných souřadnicích -  $u_1, u_2, \dots, u_n$  lze v maticové podobě zapsat takto

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad (1)$$

Rovnice (1) platí pro lineární systém bez ohledu na proporcionalitu  $[C]$ . Jedná-li se o proporcionální tlumení, tj. je-li matice útlumu  $[C]$  přímo úměrná k matici hmotnosti  $[M]$ , tuhosti  $[K]$  nebo je jejich lineární kombinací a splňuje-li tedy tzv. Caugheyho tvar

$$[C] = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \cdot [M] \cdot ([M]^{-1} \cdot [K])^j \quad (2)$$

můžeme k sestavení nezávislých pohybových rovnic využít modální transformace do normálních (hlavních) souřadnic

$$\{u(t)\} = [\gamma]\{q(t)\} \quad (3)$$

kde  $\{u(t)\} \dots$  jsou tzv. Lagrangeovy zobecněné souřadnice

$[\gamma] \dots$  je modální matice, složená z vlastních vektorů netlumeného systému

$\{q(t)\} \dots$  jsou normální (hlavní) souřadnice

Po jejím provedení pak pro  $r$ -tou pohybovou rovnici lze psát

$$\ddot{q}_r(t) + 2\zeta_r \omega_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = 0 \quad (4)$$

kde  $q_r(t) \dots$  je  $r$ -tá složka normálního souřadnicového vektoru  $\{q(t)\}$

$\zeta_r \dots$  je poměrné tlumení příslušející  $r$ -tému tvaru

Začíná-li pohyb systému s počátečním přemístěním  $q_r(0)$  v čase  $t=0$ , potom pro řešení modálního přemístění  $q_r(t)$  v libovolném čase  $t$  při podkritickém tlumení platí

$$q_r(t) = q_r(0) \frac{e^{-\zeta_r \omega_r t}}{\sqrt{1-\zeta_r^2}} \cos\left(\sqrt{1-\zeta_r^2} \omega_r t - \psi_r\right) \quad (5)$$

kde  $\sqrt{1-\zeta_r^2} \omega_r = \omega_{d(r)} \dots$  je vlastní kruhová frekvence tlumeného kmitání

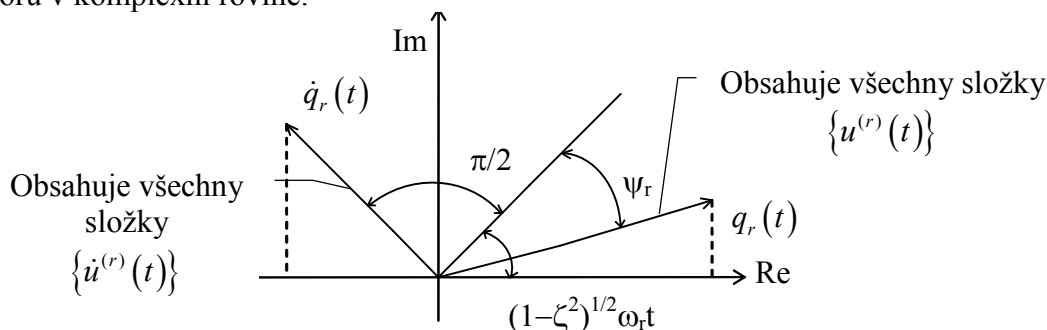
$\psi_r \dots$  je fázový úhel daný

$$\tan \psi_r = \frac{\zeta_r}{\sqrt{1-\zeta_r^2}} \quad (6)$$

Modální rychlost získáme derivací (5) podle času  $t$

$$\dot{q}_r(t) = q_r(0) \frac{\omega_r e^{-\zeta_r \omega_r t}}{\sqrt{1-\zeta_r^2}} \cos\left(\sqrt{1-\zeta_r^2} \omega_r t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (7)$$

Na Obr. 1 je znázorněn vzájemný vztah modálního přemístění a rychlosti jako rotujících vektorů v komplexní rovině.



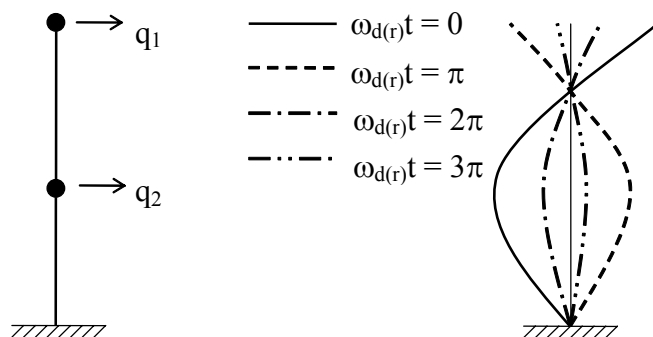
Obr. 1 Znáznornění složek vektorů modálního přemístění a rychlosti soustavy v Gaussově rovině komplexních čísel

Je z něj patrné, že vektor rychlosti je posunut vůči vektoru přemístění o úhel  $\psi_r + \pi/2$ . S časem se velikost obou exponenciálně zmenšuje, viz (5) a (7).

Pro vektor přemístění  $\{u^{(r)}(t)\}$  příslušející  $r$ -tému vlastnímu tvaru dle (3) platí

$$\{u^{(r)}(t)\} = \{\gamma^{(r)}\} q_r(t) \tag{8}$$

kde  $\{\gamma^{(r)}\}$  je  $r$ -tý sloupec matice  $[\gamma]$  obsahující reálná čísla, která definují  $r$ -tý vlastní tvar netlumeného systému. Z (8) vyplývá, že i vektor  $\{u^{(r)}(t)\}$  odpovídá tomuto vlastnímu tvaru a všechny jeho složky mají stejnou fázi jako  $q_r(t)$ , nebo jsou o  $180^\circ$  vůči ní posunuty v závislosti na znaménku příslušné složky  $\{\gamma^{(r)}\}$ . Proto na Obr. 1 vektor  $q_r(t)$  reprezentuje všechny složky  $\{u^{(r)}(t)\}$  a podobně vektor rychlosti  $\dot{q}_r(t)$  všechny složky  $\{\dot{u}^{(r)}(t)\}$ . Pokud je tedy volné tlumené kmitání iniciováno jedním z vlastních tvarů netlumeného systému, pokračují všechny body systému v kmitání v tomto tvaru, ale s exponenciálně se snižujícími amplitudami. Z toho vyplývá, že se jedná o pohyb velmi podobný volnému netlumenému kmitání s neustálým snižováním výchylek až do dosažení klidového stavu systému (Obr.2).



Obr. 2 Znáznornění časového průběhu přemístění diskrétní soustavy se dvěma stupni volnosti s vlivem proporcionálního útlumu

### 3. Vlastní kmitání diskretních soustav s vlivem neproporcionálního útlumu

V případě mechanického modelu s neproporcionálním tlumením je pohyb soustavy značně odlišný. Nesplňuje-li matice tlumení rovnici (2), transformace pomocí modální matice  $[\gamma]$  již nezajišťuje nezávislost pohybových rovnic a jejich řešení, a je nutno použít transformaci [1]

$$\{u(t)\} = [\Delta]\{z(t)\} \quad (9)$$

resp. pro určení přemístění příslušející  $r$ -tému vlastnímu tvaru transformaci

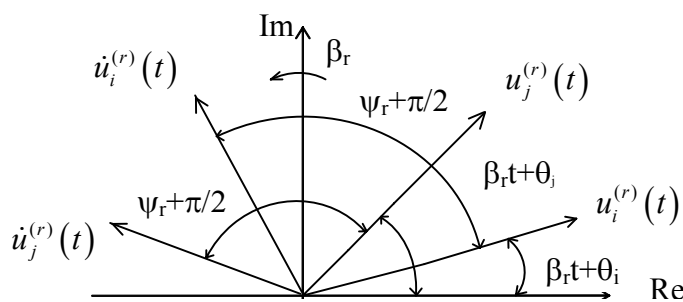
$$\{u^{(r)}(t)\} = \{\Delta^{(r)}\} z_r(t) \quad (10)$$

kde  $\{\Delta^{(r)}\} \dots$  je  $r$ -tý sloupec matice  $[\Delta]$

$z_r(t) \dots$  je exponenciálně tlumená kosinová funkce (pro podkritické tlumení) volného kmitání daného počátečním přemístěním  $z_r(0)$ .

Sloupce matice  $[\Delta]$  popisují, viz. kap. 4, vlastní tvar neproporcionálně tlumeného systému.

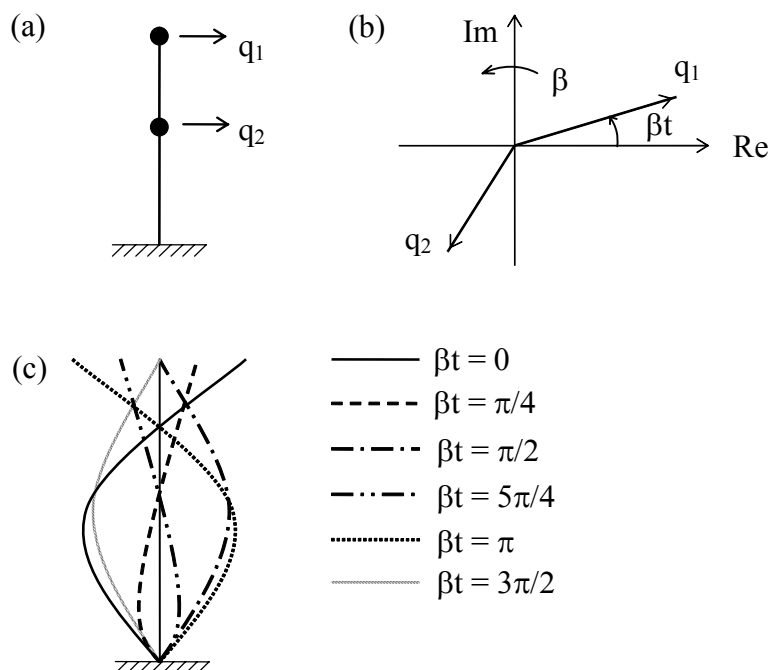
Tato matice je komplexní a tedy i prvky  $\{\Delta^{(r)}\}$  jsou komplexní čísla s různou fází i amplitudou. Z toho vyplývá, že i složky  $\{u^{(r)}(t)\}$  se liší jak fází, tak amplitudou. Z jejich zobrazení v komplexní rovině je patrné, že všechny rotují se stejnou rychlostí  $\beta_r$  a stejným útlumem. Nicméně každý vektor má rozdílný fázový posun (úhel). Na Obr.3 je tento vztah vyjádřen pomocí dvou složek  $u_i^{(r)}(t)$  a  $u_j^{(r)}(t)$ , kterým přísluší rozdílné fázové úhly  $\theta_i$  a  $\theta_j$ . Je z něj zřejmé, že složky rychlosti  $\dot{q}_i^{(r)}(t)$  a  $\dot{q}_j^{(r)}(t)$  jsou posunuty o stejný úhel  $\psi_r + \pi/2$ .



Obr. 3 Znázornění složek vektorů modálního přemístění a rychlosti soustavy v Gaussově rovině komplexních čísel

Pro ilustraci výše uvedené fázové rozdílnosti složek předpokládejme soustavu se dvěma stupni volnosti (Obr.4(a)), která je určena přemístěními  $q_1, q_2$  popisujícími pohyb soustavy v bodech se soustředěnou hmotou. Na Obr. 4(b) je znázorněn vzájemný fázový posun mezi těmito posuny, stanovený hodnotou  $135^\circ$ . Grafické vyjádření přemístění v závislosti na hodnotě  $\beta t$  (Obr. 4(c)) ukazuje, že pohyb systému není charakterizován existencí uzlů kmitání, které mají stálou a pevně danou polohu na konstrukci jako v případě netlumené či proporcionalně tlumené soustavy. Amplitudy kmitání jsou z důvodu zjednodušení a

snadnějšího objasnění problému znázorněny bez jejich exponenciálního zmenšování, ke kterému by ve skutečnosti docházelo.



Obr. 4 Znáznornění časového průběhu přemístění diskrétní soustavy se dvěma stupni volnosti s vlivem neproporcionálního útlumu

Shrneme-li uvedené závěry, lze říci, že volné kmitání soustavy s lineárním proporcionalním viskózním útlumem je složeno z vlastních tvarů netlumené soustavy, jejichž amplitudy jsou exponenciálně a po konstrukci rovnoměrně snižovány. Tyto tvary jsou určeny prostorovým rozmístěním stacionárních uzlů či čar. Naproti tomu, při volném kmitání s neproporcionálním útlumem kmitá systém opět ve tvarech, kdy každý jeho bod vykonává exponenciálně tlumený pohyb se stejnou frekvencí, ale s rozdílným fázovým úhlem. V těchto tvarech již uzly nejsou stacionárními.

#### 4. Řešení pohybových rovnic pro diskrétní soustavy s vlivem neproporcionálního útlumu

Každá složka vektoru  $\{u^{(r)}(t)\}$  pro netlumený či proporcionalně tlumený systém se odlišuje od ostatních pouze svou amplitudou. Fázový úhel je pro všechny prvky stejný, nebo je o  $180^\circ$  posunut vlivem jejího znaménka. Z toho vyplývá nutnost sestavit  $n$  pohybových rovnic ( pro systém o  $n$  stupních volnosti), jejichž řešením získáme  $n$  amplitud příslušících k danému vlastnímu tvaru.

Pro systém s neproporcionálním útlumem není každá složka vektoru  $\{u^{(r)}(t)\}$  dána pouze svou amplitudou, ale i fází. Pro soustavu o  $n$  stupních volnosti tedy potřebujeme k určení všech prvků sestavit  $2n$  pohybových rovnic. K  $n$  rovnicím daným (1) proto musíme přidat dalších  $n$  rovnic, například ve tvaru maticové identity

$$[M]\{\dot{u}(t)\} - [M]\{\dot{u}(t)\} = \{0\} \quad (11)$$

Získáme tak soustavu řádu  $2n$  ve tvaru

$$\begin{pmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}(t) \\ \dot{u}(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}(t) \\ u(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

kterou lze zapsat v redukované podobě takto

$$[A]\{\dot{y}(t)\} + [B]\{y(t)\} = \{0\} \quad (13)$$

kde

$$[A] = \begin{pmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{pmatrix} \quad [B] = \begin{pmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{pmatrix} \quad \{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}(t) \\ u(t) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Řešení této lineární rovnice hledáme ve tvaru

$$\{y(t)\} = \{y\} e^{pt} \quad (15)$$

odtud

$$\{\dot{y}(t)\} = p\{y\} e^{pt} \quad (16)$$

Rovnici (13) lze s pomocí neznámého čísla  $p$  a vektoru  $\{y\}$  vyjádřit

$$p[A]\{y\} = -[B]\{y\} \quad (17)$$

Není-li matice tuhosti  $[K]$  singulární existuje inverzní matice  $[B]^{-1}$  k  $[B]$  a rovnici (17) po jejím vynásobení můžeme zapsat ve tvaru

$$[D]\{y\} = \lambda\{y\} \quad (18)$$

kde

$$[D] = -[B]^{-1}[A] \quad \lambda = \frac{1}{p} \quad (19)$$

Řešení soustavy (18) můžeme převést na tvar

$$[L(\lambda)]\{y\} = \{0\} \quad (20)$$

kde

$$[L(\lambda)] = [D] - \lambda[E] \quad (21)$$

Pro netriviální řešení (21) musí být její determinant roven nule

$$\det([L(\lambda)]) = 0 \quad (22)$$

Z (22) získáme  $2n$  kořenů – vlastních čísel  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ , která jsou reálná a záporná (pro kritické a nadkritické tlumení) nebo komplexní se zápornou reálnou částí (pro podkritické tlumení). Jsou-li vlastní hodnoty systému komplexní, tvoří komplexně sdružené páry

$$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k \quad \lambda_l = \overline{\lambda_k} = \mu_k - i\nu_k \quad (23)$$

kde  $\mu_k$  a  $\nu_k$  jsou jejich reálné a imaginární části a  $i$  značí imaginární jednotku, a všechny vlastní vektory jim příslušící jsou komplexní a též vytváří komplexně sdružené páry.

$$\{y^{(l)}\} = \{\overline{y^{(k)}}\} \quad (24)$$

Předpokládejme, že komplexní vektor  $\{y^{(k)}\}$  odpovídá vlastní hodnotě

$$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k \quad (25)$$

Z (16) pro složku rychlosti odpovídající jakékoliv složce vektoru  $\{y^{(k)}\}$  platí

$$\dot{y}^{(k)} = p_k y^{(k)} \quad (26)$$

kde

$$\alpha_k = \frac{\mu_k}{\mu_k^2 + \nu_k^2} \quad \beta_k = \frac{\nu_k}{\mu_k^2 + \nu_k^2} \quad p_k = \frac{1}{\lambda_k} = \alpha_k + i\beta_k \quad (27)$$

Pro výsledné řešení tedy platí

$$\{y^{(k)}(t)\} = \{y^{(k)}\} e^{p_k t} = \{y^{(k)}\} e^{\alpha_k t} e^{i\beta_k t} \quad (28)$$

Z (28) je patrné, že  $\alpha_k$  je pro tlumený systém záporné a  $\beta_k$  značí frekvenci jeho tlumeného kmitání. Znázorníme-li výsledná přemístění  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) jako rotující vektory v komplexní rovině (Obr.3), bude jejich úhlová rychlost rovna  $\beta_k$ . Rychlosti  $\dot{u}_i$  odpovídající přemístěním  $u_i$  jsou fázově posunuta o úhel  $\psi_k$ , který je argumentem vektoru  $p_k$ , vyjádřeným ve formě

$$p_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} e^{i\psi_k} \quad (28)$$

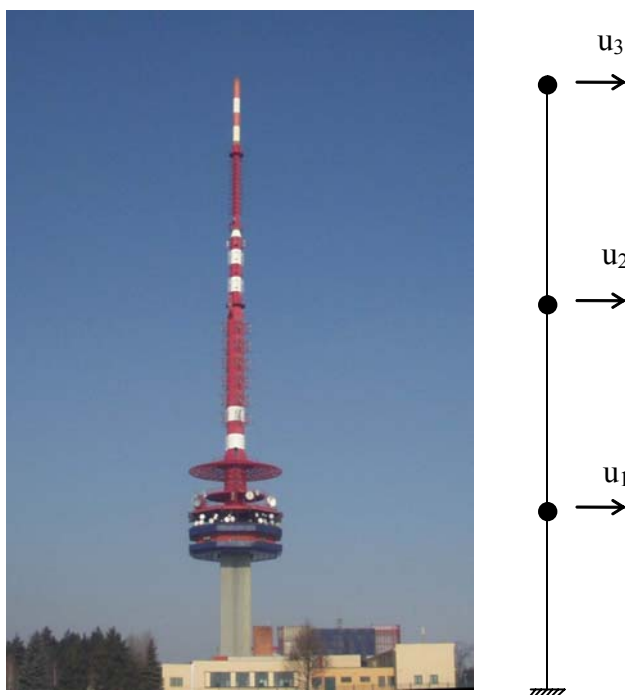
kde

$$\tan \psi_k = \frac{\beta_k}{\alpha_k} \quad (29)$$

Obecně lze říci, jak je na příkladech na Obr. 3 vidět, že každé přemístění  $u_i$  má různý fázový úhel  $\theta_i$ . Řešením vlastních hodnot získáme relativní, nikoliv absolutní amplitudy přemístění a je tedy určena pouze relativní hodnota komplexního přemístění. Podobně nejsou dány absolutní fázové úhly  $\theta_i$ , ale jejich rozdíly.

## 5. Aplikace - analýza štíhlé stavební konstrukce

Pro ilustraci dynamického chování konstrukce s vlivem neproporcionálního útlumu byly provedeny časové průběhy vlastního kmitání věže TV Ostrava – Hošťálkovice. Její konstrukce byla modelována jako systém se třemi stupni volnosti (Obr. 5). Umístěním pohlcovače kmitů, který působí proti možnému nežádoucímu dynamickému namáhání větrem, se původní soustava s proporcionálním útlumem změnila na systém, kdy matice tlumení je již neproporcionální.



Obr. 5 Skutečná konstrukce a její výpočtový model

Řešení bylo provedeno metodami uvedenými v kapitole č.4, přičemž matice útlumu byla uvažována pro

a) *proporcionálně tlumenou soustavu*

v tzv. Rayleighově tvaru, což je speciální případ (2) pro  $n = 2$

$$[C] = \beta_0 [M] + \beta_1 [K] \quad (30)$$

kde konstanty  $\beta_0$  a  $\beta_1$  jsou stanoveny z prvních dvou vlastních frekvencí netlumeného systému dle poměrného tlumení

$$\zeta = \frac{\beta_0}{2\omega_i} + \frac{\beta_1 \omega_i}{2} \quad (31)$$

jehož velikost

$$\zeta = 0,004 \quad (32)$$

byla určena měřením na konstrukci.

---

\* Ing. Stanislav Hračov : UTAM AV ČR, Prosecká 76, 190 00 Praha 9, e-mail: hracov.itam.cas.cz



b) *neproporcionálně tlumenou soustavu*

ve tvaru

$$[C] = \beta_0 [M] + \beta_1 [K] + \beta_{0T} [M_n] + \beta_{1T} [K_n] \quad (33)$$

kdy se vliv instalace pohlcovače kmitů do konstrukce v bodě s výchylkou  $u_3$  projeví zvýšením poměrného útlumu v tomto místě o hodnotu

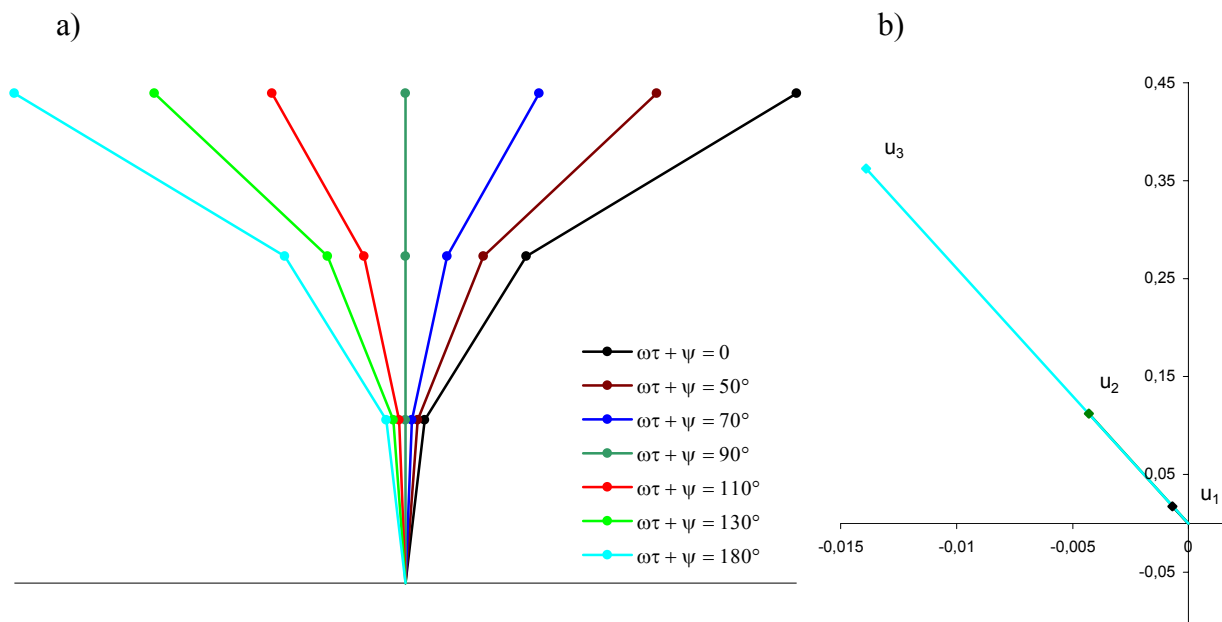
$$\zeta_T = 0,0075 \quad (34)$$

a ovlivní tak útlum prvků matice hmotnosti a tuhosti o souřadnicích [3,3]. V rovnici (33) jsou konstanty  $\beta_0$  a  $\beta_1$  uvažovány o stejné velikosti jako u soustavy s proporcionálním útlumem, součinitele  $\beta_{0T}$  a  $\beta_{1T}$  opět stanovíme pro první dvě vlastní frekvence dle

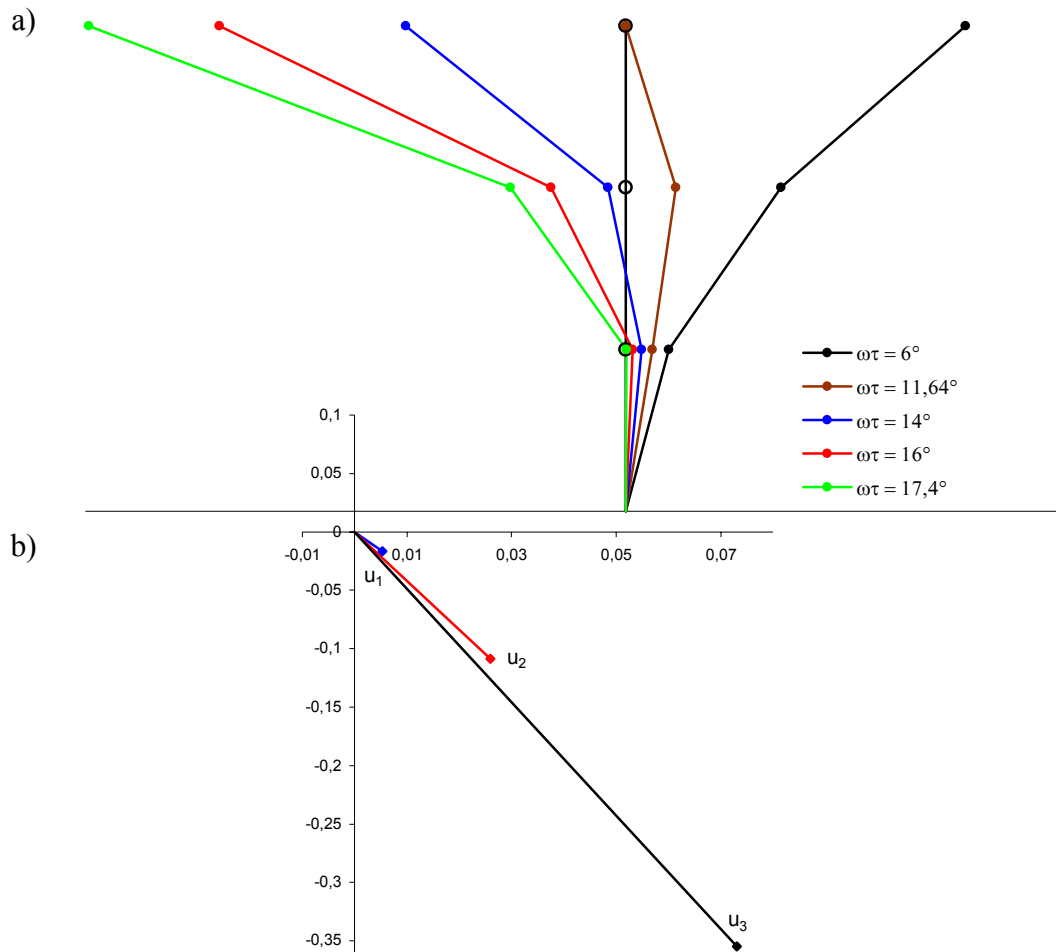
$$\zeta_T = \frac{\beta_{0T}}{2\omega_i} + \frac{\beta_{1T}\omega_i}{2} \quad (35)$$

Matice  $[M_n]$  a  $[K_n]$  v (33) obsahují nenulové prvky pouze s indexy [3,3] a které mají stejnou velikost jako jim odpovídající prvky matic  $[M]$  a  $[K]$ .

Pro ilustraci rozdílnosti dynamického chování výše popsaného proporcionálně a neproporcionálně tlumeného systému – věže TV, jež byly popsány v teoretické části tohoto příspěvku, jsou na Obr.6 a Obr.7 uvedeny časové průběhy vlastního kmitání pro tyto jednotlivé případy.



Obr.6 a) Časový průběh kmitání proporciálně tlumené soustavy v 1.vlastním tvaru  
b) Znázornění složek vektoru přemístění 1.vlastního tvaru proporciálně tlumené soustavy v rovině komplexních čísel



Obr.7 a) Časový průběh kmitání neproporciálně tlumené soustavy v 1.vlastním tvaru  
 b) Znáznornění složek vektoru přemístění 1.vlastního tvaru neproporciálně tlumené soustavy v rovině komplexních čísel

## 6. Závěr

Vyjádření proporcionálního útlumu v pohybových rovnicích je vzhledem k požadované přesnosti stanovení odezvy pro většinu stavebních konstrukcí postačující. Avšak zejména u těch, u kterých je přítomen pohlcovač kmitů, již nelze z výpočetního modelu s tímto útlumem vycházet a je nutno uvažovat tlumení neproporcionální. Tato skutečnost byla dokumentována na příkladu věže televizního vysílače s instalovaným pohlcovačem kmitů, který ukázal fázovou rozdílnost jednotlivých složek vektoru přemístění jejího diskrétního výpočetního modelu. Následkem toho dochází k pohybu uzlů kmitání po konstrukci. Ta pak může při vlastním kmitání připomínat tvar vyšší nebo nižší, než ve kterém se skutečně nachází, což může mít za následek např. nesprávný závěr o působení pohlcovače. Uvedené dynamické chování výpočtových schémat s vlivem neproporcionálního útlumu tedy lépe vystihuje skutečnost, podává přesnější výsledky určení odezvy než při uvážení vlivu proporcionálního tlumení a lze doporučit jejich větší použití.

## 7. Literatura

- [1] W.C.Hurty & M.F. Rubinstein (1982) *Dynamics of structures*, J.Wiley