ENGINEERING MECHANICS 2004
NATIONAL CONFERENCE
with international participation
Svratka, Czech Republic, 10 - 13 May 2004

ITERATIVE MODEL CORRECTION BASED ON TRANSFER FUNCTION

M. Musil

Summary: *The mathematical model of a vibrating mechanical system obtained by modeling in finite elements method (FEM) should be consistent with data, which follow from the experimental modal analysis (EMA). But real applications confirm that this premise is not quite fulfilled. So it is necessary to modify the FEM model so as the computed and measured modal data reciprocally correspond. A target of this paper is to design a systematic procedure for correction of the mathematical model based on the transfer function.*

1. Úvod

Metóda konečných prvkov (MKP) je atraktívnym prostriedkom modelovania vlastností mechanických sústav. Výsledky získané na základe matematického modelu však nie sú konzistentné s výsledkami získanými experimentálne. Z uvedeného vyplýva prirodzená snaha korekcie parametrov matematického modelu tak aby bol v súlade s nameranými údajmi. Ako vhodný indikátor zhody sa často používajú vypočítané respektíve namerané vlastné uhlové frekvencie a vlastné tvary sústavy. Konkrétna realizácia korekcie matematického modelu však naráža na problémy súvisiace so zjednodušovaním pri modelovaní mechanickej sústavy, s chybami pri experimentálnom určovaní spektrálnych a modálnych vlastností, na nekompletnosť nameraných modálnych údajov a na zlú podmienenosťou uvedenej úlohy.

Cieľom príspevku je navrhnúť iteračnú metódu pre korekciu matematického modelu, ktorá ako indikátor zhody používa namerané frekvenčné prenosy sústavy a ktorá využíva citlivostnú analýzu matice frekvenčných prenosov.

2. Matematický model

Matematický model mechanickej sústavy vytvorený pomocou metódy konečných prvkov (MKP) je daný vektorovou diferenciálnou rovnicou:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{v}}(t) + \boldsymbol{B}\,\dot{\boldsymbol{v}}(t) + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{f}(t), \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{v}(t)$ je q-rozmerný vektor vyjadrujúci zovšeobecnené výchylky hmôt sústavy. Koeficientové matice $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M}$ sú vo všeobecnosti nesymetrické štvorcové matice stupňa q reprezentujúce zotrvačné, tlmiace a tuhostné parametre jednotlivých častí sústavy, pričom matica $\boldsymbol{M}$ je pozitívne definitná. Vektor $\boldsymbol{f}(t)$ je q-rozmerný vektor zovšeobecnených síl.

* Doc. Ing. Miloš Musil, PhD.: Katedra technickej mechaniky, Strojnícka fakulta STU Bratislava, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, tel.: +421 2 57296 389; e-mail: milos.musil@stuba.sk

Koeficientové matice:

$$\boldsymbol{K} = \sum_{j=1}^{n_K} \varphi_j \boldsymbol{K_{Gj}}, \quad \boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{n_B} \psi_j \boldsymbol{B_{Gj}}, \quad \boldsymbol{M} = \sum_{j=1}^{n_M} \upsilon_j \boldsymbol{M_{Gj}}, \tag{2}$$

sú reprezentované hľadanými korekčnými koeficientmi φ_j, ψ_j, υ_j, ktoré sú funkciami chýb v odhade konštrukčných parametrov a globálnymi elementovými maticami $\boldsymbol{K_{Gj}}$, $\boldsymbol{B_{Gj}}$, $\boldsymbol{M_{Gj}}$, ktoré reprezentujú spomínané fyzikálne vlastnosti časti sústavy.

Aplikovaním Fourireovej transformácie na rovnicu (1) dostaneme vzťah:

$$(\boldsymbol{K} + i\,\omega\,\boldsymbol{B} - \omega^2\,\boldsymbol{M})\;\boldsymbol{v}(i\omega) = \boldsymbol{f}(i\omega), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}(i\omega) = \boldsymbol{H}(i\omega)\;\boldsymbol{f}(i\omega), \tag{4}$$

$$v_j(i\omega) = H_{jk}(i\omega)\;f_k(i\omega), \tag{5}$$

kde $\boldsymbol{H}(i\omega) = \{\boldsymbol{h}_k(i\omega)\} = \{H_{jk}(i\omega)\} = (\boldsymbol{K} + i\,\omega\,\boldsymbol{B} - \omega^2\,\boldsymbol{M})^{-1}$ je matica frekvenčných prenosov sústavy s prvkami H_{jk}, ktoré vyjadrujú frekvenčný prenos sústavy medzi k-tym vstupom $f_k(i\omega)$ a j-tym výstupom $v_j(i\omega)$. Vektor $\boldsymbol{h}_k(i\omega) = (\boldsymbol{K} + i\,\omega\,\boldsymbol{B} - \omega^2\,\boldsymbol{M})^{-1}\,\boldsymbol{e}_k$ je tvorený vektorom odozviev – frekvenčných prenosov na jednotkový k-ty vstup ($\boldsymbol{e}_k$ je nulový stlpcový vektor s jednotkou v k-tom riadku).

3. Priama metóda korekcie

Rovnicu (3) možno transformovať do tvaru:

$$(\boldsymbol{K} + i\,\omega\,\boldsymbol{B} - \omega^2\,\boldsymbol{M})^{-1}\,\boldsymbol{h}_k(i\omega) = \boldsymbol{e}_k,$$
$$\boldsymbol{A}_{KGkl} = \{\boldsymbol{K}_{Gj}\,\boldsymbol{h}_k(i\omega_l)\},\ \boldsymbol{A}_{BGkl} = \{\boldsymbol{B}_{Gj}\,\boldsymbol{h}_k(i\omega_l)\},\ \boldsymbol{A}_{MGkl} = \{\boldsymbol{M}_{Gj}\,\boldsymbol{h}_k(i\omega_l)\},$$
$$\boldsymbol{x}_{\varphi_j} = \{\varphi_j\},\ \boldsymbol{x}_{\psi_j} = \{\psi_j\},\ \boldsymbol{x}_{\upsilon j} = \{\upsilon_j\},$$
$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_{\varphi},\ \boldsymbol{x}_{\psi},\ \boldsymbol{x}_{\upsilon}]^T.$$
$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{A}_{kl} = [\boldsymbol{A}_{KGkl},\ i\omega_l\,\boldsymbol{A}_{BGkl},\ -\omega_l^{\,2}\,\boldsymbol{A}_{MGkl}], & \boldsymbol{b}_{kl} = \boldsymbol{e}_k, & \boldsymbol{A}_{kl}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{kl}, \\ \boldsymbol{A}_k = \{\boldsymbol{A}_{kl}^{\ T}\}^T, & \boldsymbol{b}_k = \{\boldsymbol{b}_{kl}^{\ T}\}^T, & \boldsymbol{A}_k\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_k, \\ \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{A}_k^{\ T}\}^T, & \boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{b}_k^{\ T}\}^T, & \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \end{array} \tag{5}$$

z ktoré možno priamo určiť hľadané korekčné parametre φ_j, ψ_j, υ_j Musil (98).

Vo všeobecnosti uvedený systém výpočtových rovníc je nekonzistentný z dôvodov chýb pri modelovaní (konečný počet stupňov voľnosti, modely tlmenia, linearizácia a pod.) a chyby respektíve technické obmedzenia pri meraní. Navyše, keďže prvky vektora $\boldsymbol{h}_k(i\omega_l)$ sa určujú experimentálne je prakticky nemožne určiť kompletne všetky prvky tohto vektora (je prakticky nemožné merať všetky stupne voľnosti, ktoré má model zostavený pomocou MKP). Tento problém sa rieši využitím metód redukcie respektíve expanzie pri ktorých sa dopočítavajú chýbajúce nezmerané prvky vektora $\boldsymbol{h}_k(i\omega_l)$ na základe pôvodného matematického modelu, čím sa vnáša ďalšia nekonzistentnosť do uvedeného systému. Potom z rovnice (5) určované korekčné parametre sú zaťažené veľkými chybami a vedú k nereálnym výsledkom.

4. Iteračná metóda korekcie

Vzťah medzi prvkami matice frekvenčných prenosov a korekčnými parametrami je nelineárny. Linearizácia uvedeného vzťahu vychádza z metodiky postupných lineárnych aproximácii. Vektory naladenia $\boldsymbol{l(p)}$ a požadovaného naladenia $\boldsymbol{l}^*$ sú tvorené analyticky respektíve experimentálne určenými prvkami vektora $\boldsymbol{h}_k(i\omega_l)$, pričom súradnice obidvoch vektorov spolu korešpondujú. Vektor ladiacich parametrov $\boldsymbol{p}$ je tvorený korekčnými parametrami φ_j, ψ_j, υ_j. V blízkom okolí štartovacieho bodu $\boldsymbol{p}_0$ sa nahradí nelineárna vektorová funkcia $\boldsymbol{l(p)}$ vektorového argumentu $\boldsymbol{p}$ prvými dvoma členmi Taylorovho radu Zeman (1988)

$$\boldsymbol{l(p)} = \boldsymbol{l(p_0)} + \boldsymbol{L(p_0)}\ (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0), \qquad (6)$$

kde pre vo všeobecnosti obdĺžnikovú maticu ladenia (Jakobiho maticu) platí:

$$\boldsymbol{L(p_0)} = \frac{\partial \boldsymbol{l}(\boldsymbol{p}_0)}{\partial \boldsymbol{p}^T}. \qquad (7)$$

Keďže vektor naladenia $\boldsymbol{l(p)}$ je tvorený prvkami matice frekvenčných prenosov $\boldsymbol{H}(i\omega) = (\boldsymbol{K} + i\ \omega\ \boldsymbol{B} - \omega^2\ \boldsymbol{M})^{-1}$ a zároveň platí $\frac{\partial \boldsymbol{Y}^{-1}}{\partial x} = -\boldsymbol{Y}^{1}\ \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial x}\ \boldsymbol{Y}^{1}$, potom matica ladenia má tvar Friswell a Mottershead (1994):

$$\boldsymbol{L(p_0)} = -\ \boldsymbol{H}(i\omega)\ \frac{\partial(\boldsymbol{K} + i\ \omega\ \boldsymbol{B} - \omega^2\ \boldsymbol{M})}{\partial \boldsymbol{p}^T}\ \boldsymbol{H}(i\omega).$$

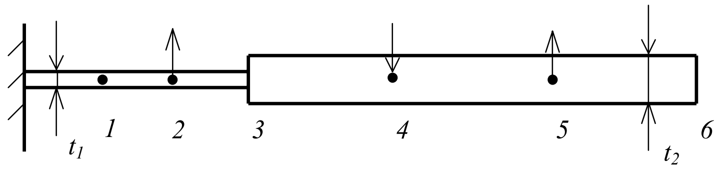
Vzťah (6) je základ pre iteračný výpočet ladiacich a teda aj korekčných parametrov $\boldsymbol{p}_{i+1}$:

$$\boldsymbol{p}_{i+1} = \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{L(p_i)}^+\ [\boldsymbol{l}^* - \boldsymbol{l(p_i)}], \qquad (6)$$

kde operátor $()^+$ reprezentuje pseudoinverziu matice.

5. Príklad

Uvažujme ohybové kmitanie, osadeného nosníka konštantnej šírky b (obr. 1), ktorého vlastnosti reprezentujú nesprávne odhadnuté konštrukčné parametre hrúbky t_1 a t_2 a namerané frekvenčné prenosové funkcie $H_{24}(i\omega)$ a $H_{54}(i\omega)$. Tlmiace vlastnosti reprezentuje koeficient vonkajšieho proporcionálneho tlmenia α ($\boldsymbol{B} = \alpha \boldsymbol{M}$).



Obr. 1. Model konštrukcie

Model uvedenej konštrukcie vytvorený využitím MKP má 12 stupňov voľnosti a konštrukčné parametre t_{A1} = 4 mm a t_{A2} = 6 mm pričom skutočná konštrukcia má 24 stupňov voľnosti a konštrukčné parametre t_{E1} = 41 mm a t_{E2} = 58 mm.

Globálne elementové matice $\boldsymbol{K}_{Gj}$, $\boldsymbol{B}_{Gj}$, $\boldsymbol{M}_{Gj}$,vytvorené na základe MKP sú funkciami fyzikálnych parametrov Inman (2000):

$$\boldsymbol{K}_{Gj} = 2\, E\, J_j\, \boldsymbol{E}_{Kj}, \qquad \boldsymbol{B}_{Gj} = \alpha\, \rho\, S_j\, \boldsymbol{E}_{Mj}, \qquad \boldsymbol{M}_{G_j} = \rho\, S_j\, \boldsymbol{E}_{Mj},$$

$$\boldsymbol{K}_{G_j} = \frac{E\, b\, t_j^3}{6}\, \boldsymbol{E}_{K_j}, \qquad \boldsymbol{B}_{G_j} = \alpha\, \rho\, b\, t_j\, \boldsymbol{E}_{M_j}, \qquad \boldsymbol{M}_{G_j} = \rho\, b\, t_j\, \boldsymbol{E}_{M_j}.$$

Potom korekčné parametre φ_j, ψ_j, υ_j sú funkciami konštrukčných parametrov:

$$\varphi_j = \frac{t_j^3}{t_{Aj}^3}, \qquad \psi_j = \frac{t_j}{t_{Aj}}, \qquad \upsilon_j = \frac{t_j}{t_{Aj}}.$$

a matica ladenia $\boldsymbol{L}([t_1, t_2]^T)$ má tvar:

$$\boldsymbol{L}([t_1, t_2]^T) = [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_5]^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{H}(i\omega)}{\partial t_1}, \frac{\partial \boldsymbol{H}(i\omega)}{\partial t_2}\right] \boldsymbol{e}_4,$$

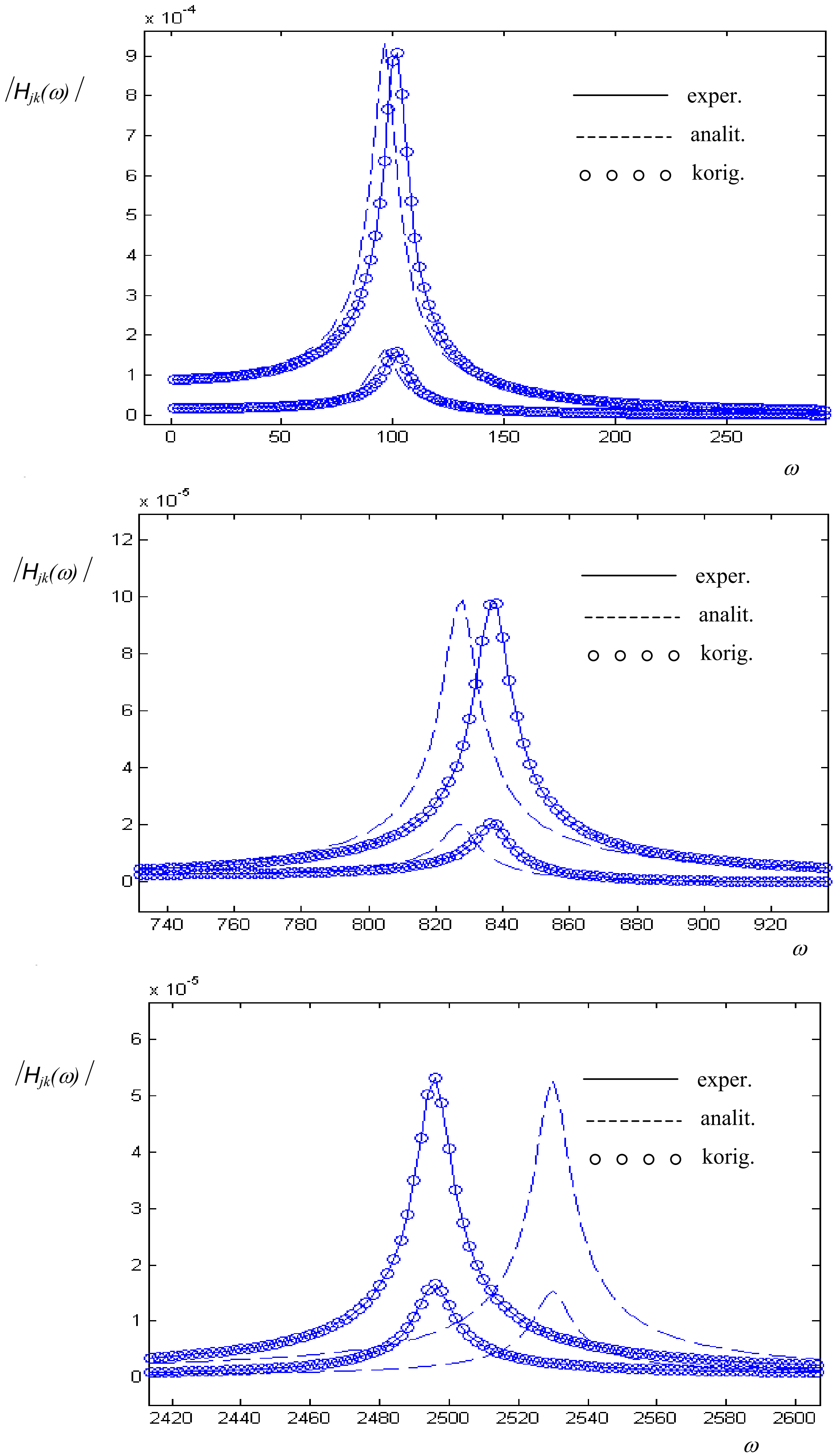
kde

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}(i\omega)}{\partial t_j} = -\, \boldsymbol{H}(i\omega)^{-1}\, \frac{\partial(\boldsymbol{K} + i\,\omega\, \boldsymbol{B} - \omega^2\, \boldsymbol{M})}{\partial t_j}\, \boldsymbol{H}(i\omega)^{-1},$$

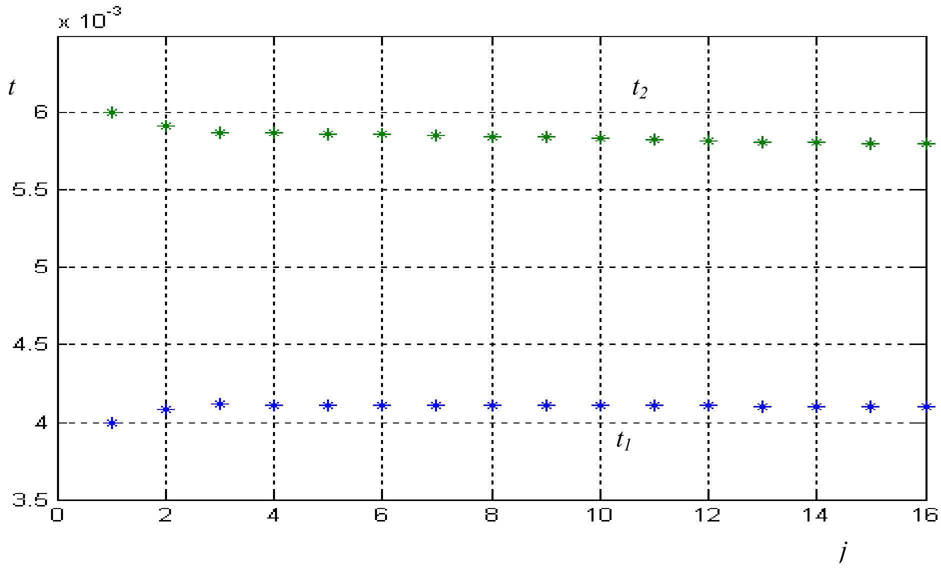
$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial t_j} = \frac{E\, b\, t_j^2}{2}\, \boldsymbol{E}_{K_j}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t_j} = \alpha\, \rho\, b\, \boldsymbol{E}_{M_j}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t_j} = \rho\, b\, \boldsymbol{E}_{M_j},$$

a $\boldsymbol{e}_j$ je nulový vektor s jednotkou v j-tom riadku.

Na obr. 2 je znázornený priebeh zmeraných, odhadnutých a na základe korekcie získaných frekvenčných prenosov sústavy. Na obr. 3 je znázornený priebeh konštrukčných parametrov pre jednotlivé iteračné kroky.



Obr. 2. Frekvenčné prenosy sústavy



Obr. 3. Priebeh konštrukčných parametrov

5. Záver

V uvedenom príspevku bola riešená problematika korekcie matematického modelu na základe nameraných prenosových funkcií. Konštrukčné parametre sú korigované pomocou iteračnej metódy, ktorá vychádza z metodiky postupných lineárnych aproximácii. Uvedený prístup je založený na citlivostnej analýze matice frekvenčných prenosov. Procedúra korekcie je dokumentovaná na príklade ohybového kmitania osadeného nosníka. Získané výsledky naznačujú rýchlu konvergenciu a dostatočnú presnosť uvedenj úlohy korekcie matematického modelu.

6. Literatúra

Musil, M. (1998) Error specification for model correction, in: *Proc. Engineering Mechanics '98* (Svratka 98), VUT Brno, pp.515-520.

Zeman V. Optimalizace (1988) mechanických soustav, in: *Proc. Analýza a optimalizácia mechanických dynamických systémov ´88* (Zborník pracovného seminára Starý Smokovec), ČSVTS VŠDS Žilina, pp 139-182,

Friswell, M. I. & Mottershead, J. E. (1994) Finite element model updating in structural dynamics. Kluwer Academic Publisher, Swansea.

Inman (2000) Engineering Vibration. Prentice Hall, New Jersey