

TWO SCALE MODELING OF MASONRY

J. Novák*, J. Šejnoha*

Summary: *The first scale (meso-structural) serves to determine the effective properties of masonry and nonlinear loading paths (macroscopic stress vs. macroscopic strain). To that end, certain periodic cells (PUC) were created for both regular and quarry-stone mesostructures. The structure energies needed in the macro-scale analysis are determined as areas under the loading curves derived on meso-scale and multiplied by the width of the localization band. This paper is focused on the first level of modelling and non-linear homogenization is applied to a regular free-stone mesostructure.*

1. Úvod

Víceúrovňové modelování je základním nástrojem v analýze konstrukcí s uvážením heterogenity a nepružného chování materiálu. U zděných konstrukcí se řešení redukuje na dvě úrovně.

První úroveň, označovaná jako mezostrukturální či mezoskopická, slouží k zjištění efektivních mechanických vlastností zdiva pro makroskopický materiálový bod. Při pravidelném geometrickém uspořádání struktury, jako je např. řádkové zdivo (ať už cihelné nebo z kamenných bloků), poskytuje základní informaci o textuře zdiva digitalizovaný snímek, označovaný jako bitmapa. Pomocí ní lze vytvořit vhodný reprezentativní objemový vzorek (*RVE* - Representative Volume Element) a k němu pak přiřadit vhodnou periodickou buňku (*PUC* - Periodic Unit Cell). Pro náhodně uspořádanou strukturu se *PUC* vytváří pomocí vhodných statistických deskriptorů (viz např. [1], [2]). Pokud podklady pro plně statistický přístup nejsou k dispozici, jak je tomu např. u zdiva z lomového kamene, využívají se k sestrojení *PUC* údaje z vyhodnocených jádrových vrtů (materiálové vlastnosti kamene a pojiva, objemové zastoupení těchto fází apod.) a popisné informace o zdivu získané při vyhodnocení kopaných sond (rozměry kamenů, tloušťky spár apod) (viz [3], [4]). Na mezostrukturální úrovni model respektuje kvazikřehké vlastnosti jak kamene, tak malty. Výsledkem počítačových simulací jsou zatěžovací dráhy, vyjadřující nelineární závislost efektivních (průměrných, makroskopických) napětí na efektivních (průměrných) deformacích. Z nich lze pak sestrojit hranice porušení.

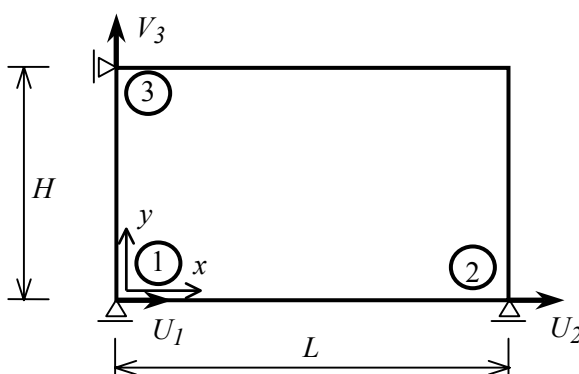
* Ing. Jan Novák, Prof. Ing. Jiří Šejnoha, DrSc.: Katedra stavební mechaniky, ČVUT - Fakulta stavební; Thákurova7; 166 29 Praha 6; tel.: +420.608 861 496,
e-mail: jan.novak@ikpce.com

Druhá úroveň (makroskopická) využívá materiálových závislostí z mezostруктурální úrovně. V současnosti neexistuje univerzální komerční software, který by umožňoval 3D počítačové řešení, respektující anizotropní porušování rozsáhlých zděných konstrukcí, jakkoli jisté pokusy byly učiněny (viz [5]). Ve zprávě [6] jsme na příkladě lomového opukového zdiva, které tvoří výplň Karlova mostu, i na příkladě pravidelného obvodového pískovcového zdiva ukázali, že pokud o jeho porušení rozhoduje převážně malta, hranice porušení pravidelného i náhodně uspořádaného zdiva vykazují charakter izotropního porušení. Anizotropie porušení se tak projeví na makroúrovni teprve jako důsledek rozvoje trhlin ve zdivu. Takovou situaci zvládá poměrně dobře 3D komerční varianta programu ATENA [7], [8]. Pro 3D simulace jsou ve zprávě [6] diskutovány modely obecně anizotropního porušování respektujícího rozdílné hodnoty efektivních (makroskopických) lomových energií pro hlavní směry materiálové anizotropie. Jejich implementace do vhodného softwarového balíku však není triviální a vyžádá si delší čas. Takovéto konsistentní řešení je součástí náplně projektu GAČR 103/04/1321 s názvem *Konstitutivní modely pro zdivo*.

V tomto příspěvku se omezíme na materiálové modelování mezoskopické struktury pravidelného pískovcového zdiva. Základní materiálové charakteristiky, jako jsou pevnosti v tahu a tlaku a lomové houževnatosti obou fází jsme získali z literatury, jednak ([3], [4]) a jednak z výsledků měření provedených v Kloknerově ústavu kolektivem P. Boušky. K lomové houževnatosti malty jsme dospěli inženýrským odhadem. Nejistoty ve volbě parametrů (závislost na původu kamene, vlhkosti apod.) se snažíme překlenout parametrickou studií. Veškeré nelineární výpočty na *PUC* byly provedeny programem ATENA za předpokladu rovinné deformace, jež je prostorovému chování poměrně blízká.

2. Základní vztahy pro konstrukci periodické buňky (*PUC*)

K homogenizaci na *PUC* lze použít dva algoritmy. Prvním konstruujeme makroskopické zatěžovací dráhy metodou *řízených zatěžovacích sil* (load control), druhým *metodou řízených posunů* (displacement control). Nejprve popíšeme postup *zatěžování silami*. Omezíme se na 2D řešení. Pro obdélníkovou *PUC* na obr.1, zavedeme staticky určité podepření v uzlech 1, 2, 3. Tloušťka ve směru z je 1m. Nechť E_{xx} , E_{yy} , $2E_{xy}$ jsou inženýrské makroskopické deformace představující zprůměrované hodnoty skutečných inženýrských deformací ε_{xx} , ε_{yy} , $2\varepsilon_{xy}$ (srov. [9], [10]).



Obr. 1 *PUC* v soustavě souřadnic

Makroskopické posuny U, V vyjádříme lineární interpolací uzlových posunů U_1, U_2, V_3 takto:

$$\begin{Bmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y}{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Deformace a uzlové posuny jsou svázány vztahy

$$\begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{H} \\ -\frac{1}{H} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

neboli

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \mathbf{d}. \quad (2')$$

Vektoru uzlových posunů $\mathbf{d} = \{U_1, U_2, V_3\}^T$ odpovídá vektor uzlových sil $\mathbf{f} = \{F_{x1}, F_{x2}, F_{y3}\}^T$ působících v uzlech 1, 2, 3. Podobně vektoru makroskopické deformace $\mathbf{E} = \{E_{xx}, E_{yy}, 2E_{xy}\}^T$ odpovídá vektor makroskopických napětí $\mathbf{\Sigma} = \{\Sigma_{xx}, \Sigma_{yy}, \Sigma_{xy}\}^T$. Makroskopická napětí a uzlové síly jsou svázány principem virtuálních posunutí

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} = \int_V \delta \mathbf{E}^T \mathbf{\Sigma} dV = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{\Sigma} LH. \quad (3)$$

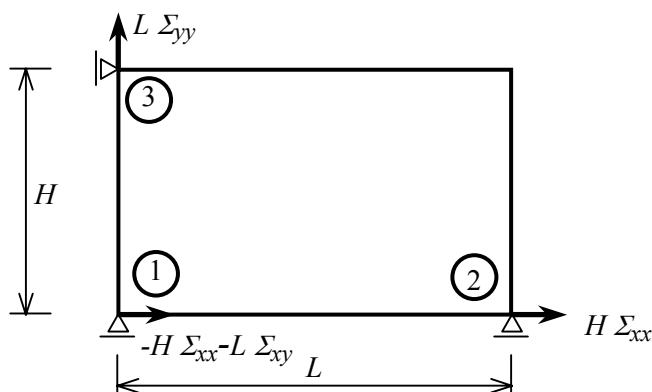
Odtud

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}^T \mathbf{\Sigma} LH, \quad (4)$$

neboli

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -H & 0 & -L \\ H & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Sigma_{xx} \\ \Sigma_{yy} \\ \Sigma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (4')$$

Přiřazení sil k napětím, z něhož vychází postup založený na silovém zatěžování, je znázorněno na obr. 2

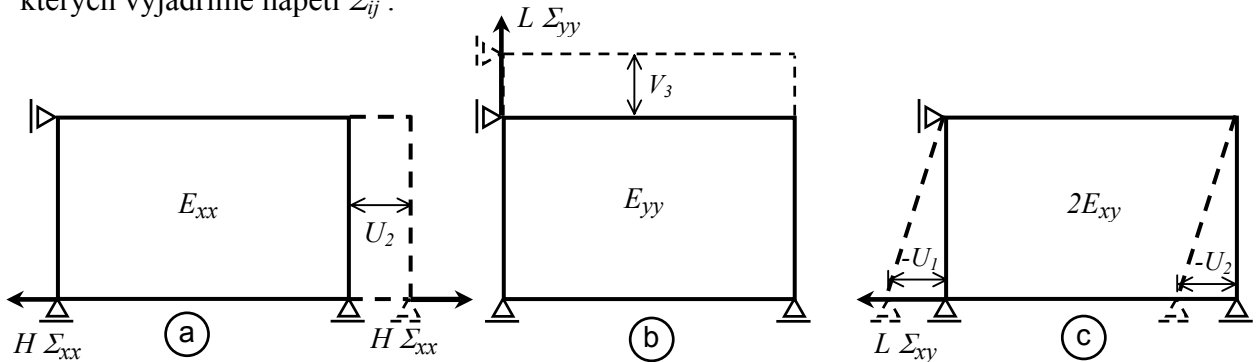


Obr. 2 Zavedení uzlových sil (load control)

Analogicky lze přetvoření *PUC řídit uzlovými posuny*. Inverzí v rovnici (2) vyplyne závislost

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -H \\ L & 0 & -H \\ 0 & H & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Na obr. 3 jsou jednotlivé deformační stavy rozkresleny i s příslušnými uzlovými silami, ze kterých vyjádříme napětí Σ_{ij} .

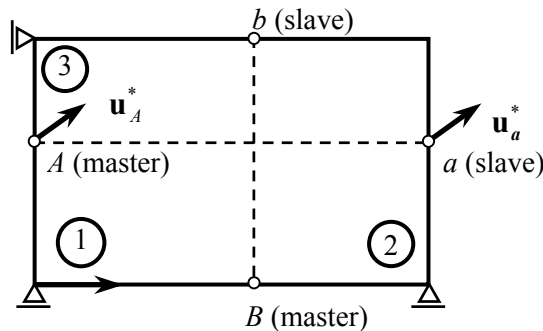


Obr. 3 Základní deformační stavy (*displacement control*)

Zbývá zformulovat okrajové podmínky zajišťující periodicitu *PUC*. Za tím účelem vyjádříme posuny u a v jako součet posunů vyvolaných polem makroskopických deformací a posunů flukтуаčních u^* , v^* , které vystihují vliv heterogenity materiálové struktury. Kombinací vztahů (1) a (5) dostáváme

$$\begin{aligned} u(x,y) &= E_{xx}x - H(2E_{xy}) + u^*(x,y) \\ v(x,y) &= E_{yy}y + v^*(x,y) \end{aligned} \quad (6)$$

S ohledem na strukturu programů ATENA a ATENA Win rozdělíme hraniční uzly do dvou skupin (obr. 4).



Obr. 4 Podmínky periodicity

Uzly typu A, B označíme jako „master“. Uzly typu a, b označíme jako „slave“. Předpokládejme, že odpovídající si uzly a, A mají stejnou souřadnici y (uzel a bychom mohli považovat za uzal A pro *PUC* vpravo od buňky vyšetřované). V takovém případě budou vektory flukтуаčních posunů u_a^* a u_A^* identické. Totéž platí pro flukтуаční posuny v v uzlech b a B .

Programy ATENA a ATENA Win umožňují vyjádřit posuny v uzlech „slave“ jako lineární kombinace posunů v uzlech „master“ a v uzlech 1,2,3, kde posuny předepisujeme. S využitím (6) tedy platí ve směru x

$$\begin{aligned} u_a &= E_{xx}L - H(2E_{xy}) + u_a^* \\ u_A &= -H(2E_{xy}) + u_A^* . \end{aligned}$$

Odečtením obou rovnic vyplyne (s uvažováním rovnosti $u_a^* = u_A^*$)

$$u_a = E_{xx}L + u_A . \quad (7)$$

Podobně ve směru y vyjde

$$v_a = E_{yy}y_a + v_A . \quad (8)$$

Stejná vazba je ovšem i mezi uzly 1 a 2, v nichž posuny předepisujeme. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} u_a - u_A &= u_2 - u_1 \quad \Rightarrow \quad u_a = u_A + u_2 - u_1 \\ v_a - v_A &= v_2 - v_1 \quad \Rightarrow \quad v_a = v_A + v_2 - v_1 = v_A . \end{aligned} \quad (9)$$

V uzlu b snadno najdeme analogické vztahy

$$\begin{aligned} u_b &= u_B + u_3 - u_1 = u_B - u_1 \\ v_b &= v_B + v_3 - v_1 = v_B + v_3 . \end{aligned} \quad (10)$$

V testech typu „*displacement control*“ jsou posuny v uzlech 1,2,3 vyjádřeny makroskopickými deformacemi pomocí (5).

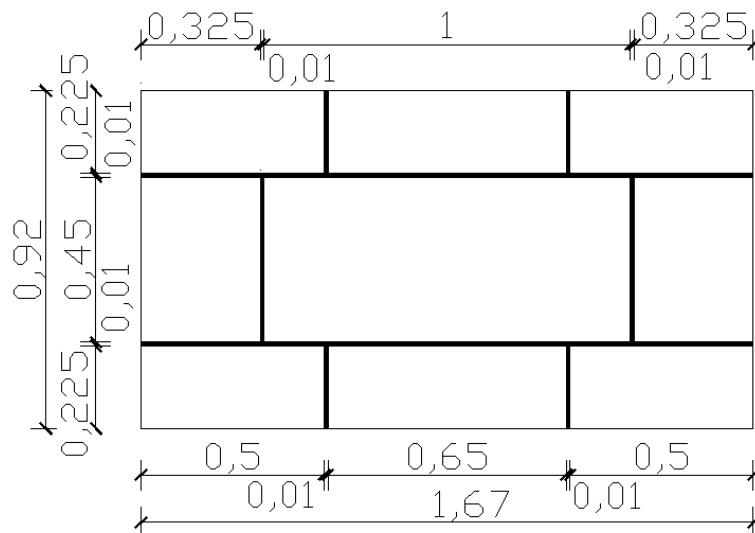
V testech typu „*stress control*“ v uzlech 1,2,3 předepisujeme síly a z hlediska podmínek periodicity (9) a (10) na tyto uzly nahlížíme jako na uzly typu „master“.

3. Odezva *PUC* pro pravidelné pískovcové zdivo

Po prohlídce zdiva kleneb Karlova mostu byl jako odpovídající *REV* všem klenbám vybrán vzorek z klenby č. 6. Rozměry jednotlivých bloků a tloušťek spár byly změřeny in situ. Geometrie *REV*, respektive jednotkové periodické buňky *PUC*, i s příslušnými rozměry jsou patrné z obrázků 5 a 6. Objemové zastoupení kamenné fáze tvoří 97,6% celkového objemu *PUC*, pojivové fáze (malty) 2,4% celkového objemu *PUC*.



Obr. 5 Periodická buňka *PUC* vyjmutá z klenby Karlova mostu



Obr. 6 Rozměry periodické buňky (*PUC*) v metrech

Pro obě fáze zkoumané *PUC* (malta, pískovcové bloky) byl vybrán materiálový model *NonLinCementitious2*, implementovaný v programu ATENA.

Na následujících obrázcích jsou výsledky počítačové simulace získané přírůstkovým řešením (varianta "*displacement control*").

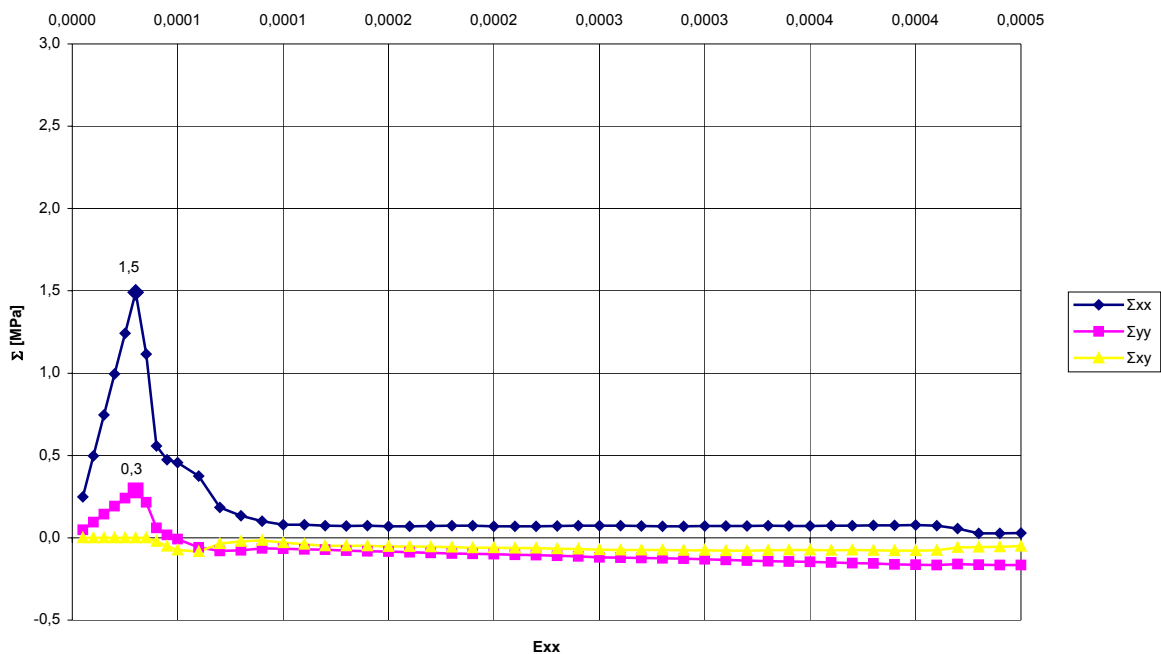
Pro počítačové simulace byly materiálové parametry vybrány s ohledem na pozorované porušování pravidelného zdiva, kde se trhliny šíří nejen ve spárách, ale mnohdy procházejí i kamenem (tab. 1). Takový stav porušení je skutečně na Karlově mostě patrný.

Je třeba zdůraznit, že před 3D analýzou musí být hodnoty makroskopických parametrů pro obě fáze experimentálně upřesněny.

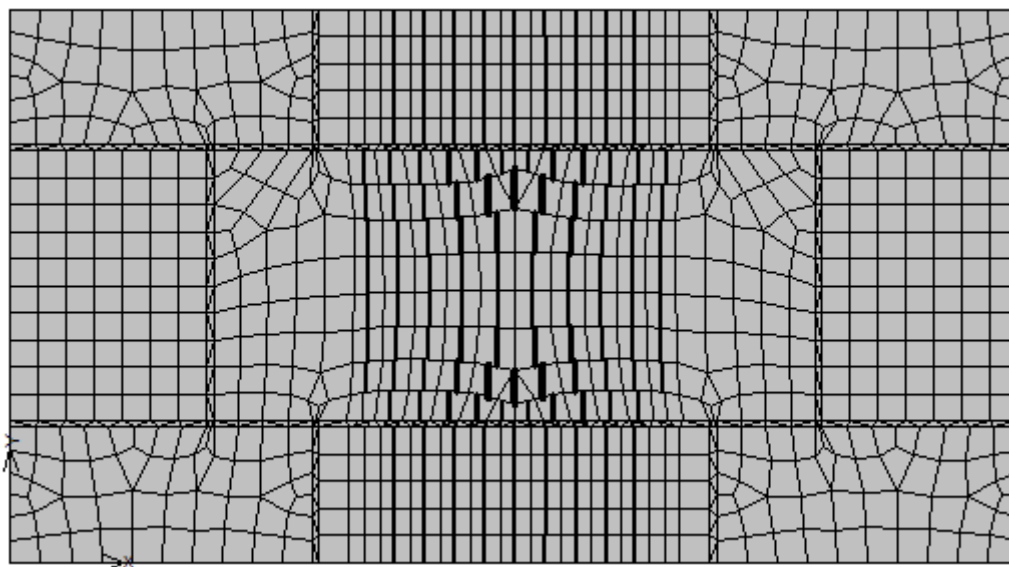
Tab. 1 Materiálové charakteristiky materiálu *PUC* (makroskopického bodu)

NÁZEV VELIČINY	OZNAČENÍ	HODNOTA	ROZMĚR
PÍSKOVCOVÉ BLOKY			
Modul pružnosti	E	$5 \cdot 10^4$	MPa
Pevnost v tahu	F_t	4,00	MPa
Pevnost v tlaku	F_c	50,00	MPa
Specifická lomová energie	G_f	$30 \cdot 10^{-6}$	MNm ⁻¹
MALTA			
Modul pružnosti	E	$1,4 \cdot 10^4$	MPa
Pevnost v tahu	F_t	1,50	MPa
Pevnost v tlaku	F_c	12,0	MPa
Specifická lomová energie	G_f	$40 \cdot 10^{-6}$	MNm ⁻¹

Na obrázcích 7 až 9 je jako příklad znázorněn pracovní diagram (zatěžovací dráha) periodické buňky zatěžované v jednoosém tahu ve směru souřadnicové osy x . V obr. 7 jsou vykresleny všechny tři složky makroskopického tenzoru napětí Σ_{ij} . V obr. 8 je znázorněno pole trhlín jdoucí "přes kámen".

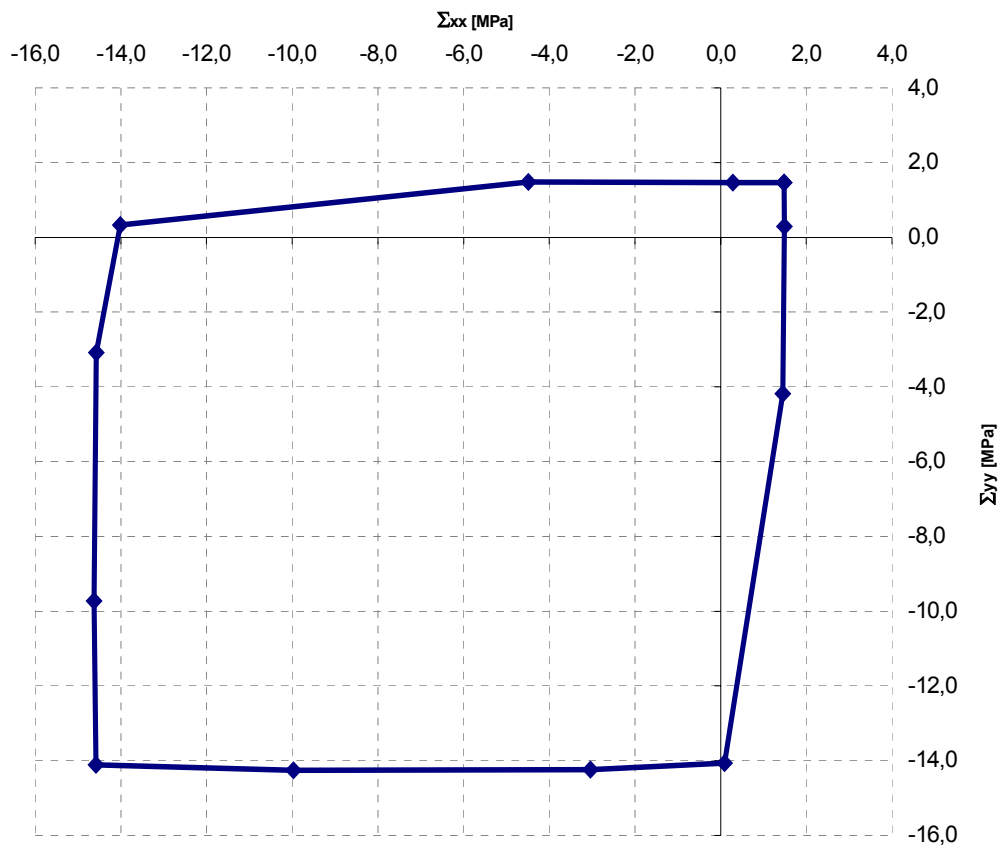


Obr. 7 Předepsaná (řízená) deformace $E_{xx} > 0$



Obr. 8 Schéma trhlín při porušení za předepsané (řízené) deformace $E_{xx} > 0$

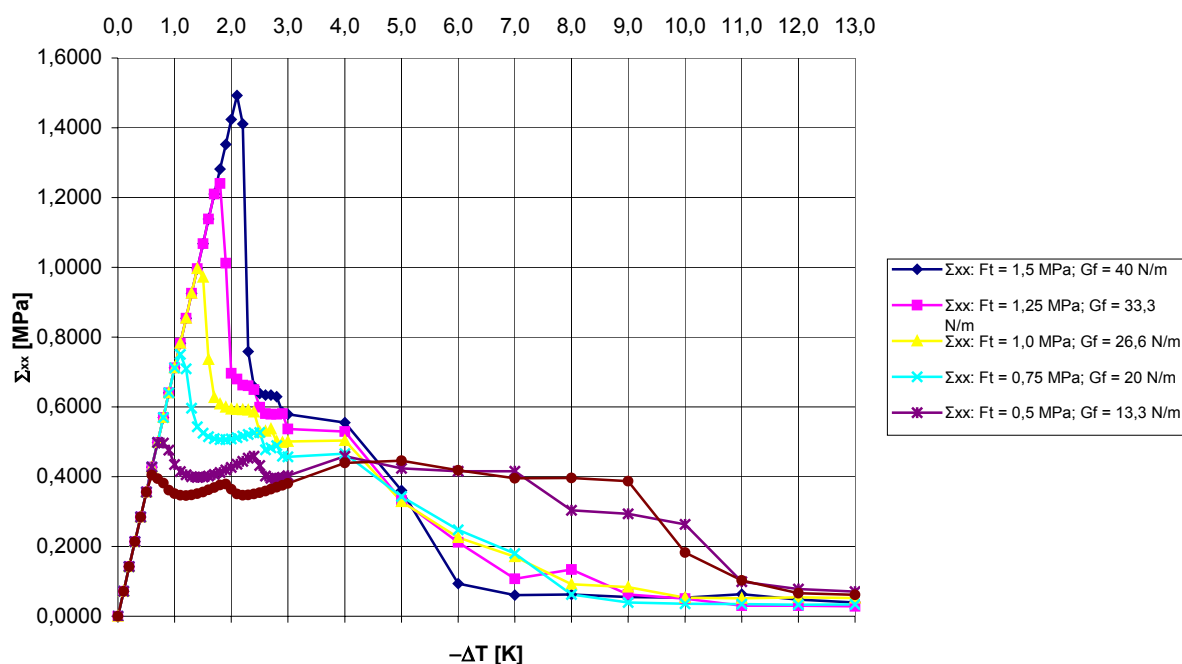
Obdobné zatěžovací dráhy lze získat pro zatížení jednoosým tlakem i pro kombinaci zatížení tah-tah, tah-tlak, tlak-tlak ve směrech souřadnicových os x,y . Výsledkem těchto simulací je pak hrubý tvar hranice porušení v rovině Σ_{xx} a Σ_{yy} při $\Sigma_{xy} = 0$ (obr. 9).



Obr. 9 Hrubý tvar hranice porušení v rovině Σ_{xx} , Σ_{yy} , ($\Sigma_{xy} = 0$)

3. Parametrická studie teplotních účinků za omezené deformace

Při ochlazování zdiva za omezené deformace vznikají trhliny podobně jako při namáhání PUC tahovým napětím $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy}$ nebo předepsanou makroskopickou deformací $E_{xx} = E_{yy}$. Trhliny mají na vývoj napjatosti PUC dvojí vliv. Jednak snižují efektivní tuhost zdiva, jednak redukují hodnoty efektivního součinitele teplotní roztažnosti porušeného zdiva α^* . Vystižení obou efektů vyžaduje předepsat podmínky periodicity pro PUC (9), (10), dále zadat nulové makroskopické deformace $E_{xx} = E_{yy} = 2E_{xy}$ a v každém bodě buňky aplikovat teplotní deformaci při daném $\Delta T < 0$ a hodnotě α pro kámen a maltu. Závislost napětí na ochlazení je patrná z obr. 9.



Obr. 10 Závislost napětí Σ_{xx} na ochlazení ($-\Delta T$)

Je vidět, že lineární vztah

$$\Sigma_{xx} = -E\alpha\Delta T \quad (11)$$

ztrácí při různé deformaci platnost již při velmi nízkých teplotních změnách ($-\Delta T \leq 3^\circ K$).

4. Závěr

V příspěvku je popsán dvouúrovňový model pro zdivo. Pozornost byla věnována první úrovni (mezostrukturální). Model byl demonstrován na příkladě pravidelného zdiva klenby Karlova mostu. Významným výsledkem je chování ochlazeného zdiva při omezených deformacích. Aproximace napětí lineárním modelem je prakticky nepoužitelná. Jakmile se ve zdivu vytvoří trhliny, teplotní změny vyvolají napětí, která jsou zlomkem napětí predikovaných rovnicí (11).

Zjednodušeně řečeno, porušené zdivo na teplotní změny, které se v historii zděné stavby mnohokrát opakovaly, reaguje minimálně.

Poděkování

Tento příspěvek byl vypracován za podpory projektu GAČR 103/04/1321 "Konstitutivní modely pro zdivo", GAČR 106/03/H150 a GAČR 103/02/0020.

Literatura

- [1] Zeman, J., Šejnoha, M., (2001) Numerical evaluation of effective elastic properties of graphite fiber tow impregnated by polymer matrix. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 (str. 69—90).
- [2] Šejnoha, M., Zeman, J., (2002) Micromechanical analysis of random composites, *CTU Reports*, 6 (105 str.)
- [3] Drozd, K., Přikryl, R., (2003) Věrohodnost průzkumných geotechnických metod při hodnocení stavu Karlova mostu. *Geotechnika* 4 (str. 3 – 8).
- [4] Votoček, R., (2003) Geofyzikální průzkum Karlova mostu. *Geotechnika* 3 (str. 7-8)
- [5] Materna, A., Brožovský, J., (2003) Řešení zděných konstrukcí historických staveb, 2nd *International Conference on New Trends in Statics and Dynamics of Buildings*, STU Bratislava, Bratislava.
- [6] Šejnoha, J. a kol., (2004) Počítačový model pro analýzu napjatosti a přetvoření Karlova mostu. *Zpráva 2. Analýza podkladů, Mott MacDonald*, Praha (str. 70).
- [7] Červenka, V. a kol., (2002) ATENA Program Documentation. Part 1. Theory. Prague.
- [8] Jendele, L., (2003) ATENA Program Documentation. Part 7. AtenaWin description, Prague.
- [9] Moulinec, J.C., Suquet, P., (2003) Nonuniform transformation field analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 40 (str. 6937—6955).
- [10] Massart, T. J., (2003) Multi-scale modeling of damage in masonry structures, *Ph.D. Thesis*, TU Eindhoven (152 pp.).