



THE STRAIGHT PATH STABILITY OF AN ARRAY OF COLLINEAR MICRO-CRACKS INTERACTING WITH AN ARRAY OF CIRCULAR INCLUSIONS

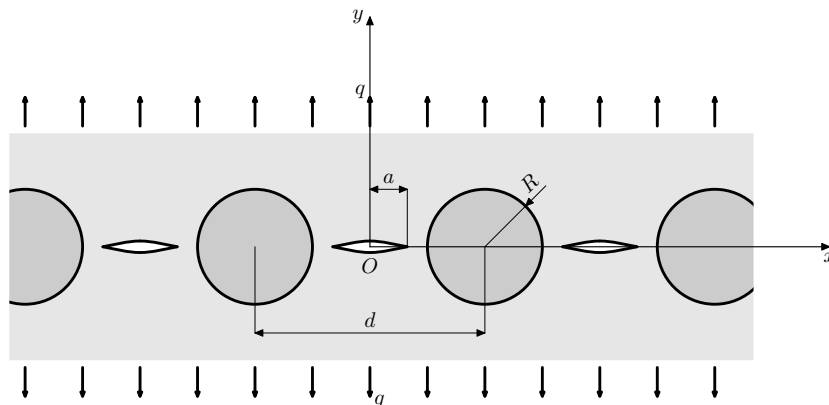
Tomáš Profant*, Michal Kotoul*

Summary: *A simplified mathematical model of the micro-cracking of the particle reinforced composites is investigated. The micro-cracking is represented by an array of the collinear slightly curved micro-cracks situated between neighbouring circular inclusions which exhibit different elastic properties than matrix. The model of the array of slightly curved micro-cracks is based on the already known solution to the interaction of the straight path micro-cracks and inclusions. The problem is solved using the technique of distributed dislocations and Bueckner principle. The Galerkin method and Muschelischvili complex potentials are applied to develop fundamental solution for a single dislocation situated in a general point between inclusions.*

1. Úvod

Kompozitní materiály tvořené křehkou maticí se vyznačují vysokou pevností, ale i křehkostí, a pro jejich matici je typická přítomnost vysoké koncentrace mikrotrhlin. Mikrotrhliny vznikají již během výrobního procesu kompozitu nebo např. při jeho zatěžování. Tvorba mikrotrhlin probíhá až do vyčerpání nukleačních míst a jejich růst je zpravidla blokován překážkami typu hranice zrn matrice nebo sekundárních částic. Shluk mikrotrhlin se postupně stává stabilní, ale jen do okamžiku dosažení kritického napětí, při kterém dochází k rychlé vzájemné koalescenci mikrotrhlin. Koalescence neprobíhá přímou srážkou čel mikrotrhlin, ale jejich vzájemným obcházením, viz Melin (1983). Zajímavá situace nastává v případě, když se mezi mikrotrhlinami nachází kovová částice, která je elasticky měkčí než keramická matrice. V pozitivním případě může převládnout přitažlivá interakce mezi částicí a mikrotrhlinami. Čela mikrotrhlin proniknou přes rozhraní částice/matrice a k jejich koalescenci vzájemným obcházením dojde až uvnitř částice. Tímto se odstraní geometrické stísnění částice a vznikne plastický můstek. V negativním případě může nad přitažlivou interakcí mikrotrhliny a částice převládnout vzájemná interakce mikrotrhlin. Jejím vlivem mohou čela mikrotrhlin částici obejít, čímž dojde k vyloučení částice z lomového procesu a vliv částic na lomovou houževnatost kompozitu bude nevýznamný. Je zřejmé, že k bližšímu pochopení lomových problémů v částicových kompozitech je nutné

* Ing. Tomáš Profant, Ph.D., Prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc.: Ústav mechaniky těles, FSI VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno



Obrázek 1. Nekonečná řada kolineárních mikrotrhlin a kruhových částic.

zabývat se mechanikou shluků mikrotrhlin interagujících s částicemi druhé fáze za pomoci vhodně zjednodušeného matematického modelu.

Studovaný problém bude uvažován jako rovinná úloha pružnosti a naváže na příspěvek Profant & Kotoul (2003), kde bylo popsáno fundamentální řešení pro jednotlivé dislokace ležící mezi kruhovými částicemi. Byla také sestavena integrální rovnice pro případ řady přímých kolineárních mikrotrhlin, jejíž řešení bude dále popsáno a zobecněno na případ interakce řady mírně ohnutých mikrotrhlin a řady kruhových částic.

2. Řada přímých mikrotrhlin

Nechť rovina xOy představuje isotropní, lineárně elastickou matici kompozitu obsahující síť mikrotrhlin modelovanou nekonečnou periodickou řadou přímých kolineárních mikrotrhlin stejné délky $2a$, přičemž mikrotrhliny jsou vzájemně odděleny kruhovými částicemi o poloměru R se středy vzdálenými od sebe o d , viz obrázek 1. Tato úloha vede na řešení singulární integrální rovnice, viz Profant & Kotoul (2003), která se po normování na interval $(-1, 1)$ může psát ve tvaru

$$\frac{\pi(\kappa_e + 1)}{\mu_e} \sigma_{yy}^{appl}(t) + 2 \int_{-1}^1 \frac{B_y(s)}{t-s} ds + \frac{d}{\pi} \int_{-1}^1 B_y(s) \frac{K_{yy}(t, s) \sin(\pi a/d)}{\sqrt{1 - \sin^2(\pi a/d) s^2}} ds = 0, \quad (1)$$

kde $t \in (-1, 1)$, $\sigma_{yy}^{appl}(t)$ je napětí vznikající na lících mikrotrhlin v důsledku vnějšího zatížení q , viz Kosmodamianskij (1964), a nesingulární jádro $K_{yy}(t, s)$ je integrovatelná funkce na intervalu $[-1, 1]$, jak v proměnné t , tak i v proměnné s a popisuje veškerou interakci mezi sekundárními částicemi a dislokacemi modelující mikrotrhliny, viz Profant & Kotoul (2004). Integrální rovnici (1) je nutné ještě doplnit podmínkou konzistence zajišťující uzavření konců mikrotrhlin

$$\int_{-1}^1 B_y(s) ds = 0. \quad (2)$$

Integrální rovnice (1) pro neznámou hustotu Burgersova vektoru $B_y(s)$ může být řešena pomocí kvadratury Gausse-Jacobiho a pro $B_y(s)$ se může psát, viz Kaya & Erdogan (1987)

$$B_y(s) = w(s)\phi_y(s), \quad (3)$$

kde $\phi_y(s)$ je nějaká ohraničená funkce na intervalu $[-1, 1]$

$$\phi_y(s) = \sum_{n=0}^{N_B} c_n P_n^{(-\lambda, -\lambda)}(s) \quad (4)$$

a $w(s)$ je fundamentální řešení rovnice (1) v případě, že $K_{yy}(t, s) = 0$. Výrazem $P_n^{(-\lambda, -\lambda)}(s)$ je označen Jacobiho polynom stupně n , proměnné s a exponentem váhových funkcí $-\lambda$. Tvar $w(t)$ závisí na charakteru řešené úlohy. V daném případě

$$w(s) = (1 - s^2)^{-\lambda}, \quad (5)$$

kde obecně $\lambda \in (0, 1)$ závisí na materiálových charakteristikách matrice a částic. Hodnoty nesingulárního jádra $K_{yy}(t, s)$ jsou dány jen v určitých libovolně zvolených hodnotách $s = s_i$, kde $i = 0 \dots N_f$ a je proto nutné ho aproximovat v proměnné s vhodným systémem polynomů

$$\frac{d}{\pi} K_{yy}(t_i, s) \frac{\sin(\pi a/d)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\pi a/d)}} = \sum_{n=0}^{N_f} d_n(t_i) P_n^{(-\lambda, -\lambda)}(s), \quad (6)$$

kde koeficienty aproximace $d_n(t_i)$ závisí na hodnotě $t = t_i$, kde $i = 0, 1, \dots, N_B - 1$, a N_B je stupeň aproximace funkce $\phi_y(s)$ ze vztahu (4). Zpětnou transformací proměnné s lze pomocí hustoty Burgersova vektoru $B_y(x)$ vyjádřit zobecněný faktor intenzity napětí

$$H_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} r^\lambda \sigma_{yy}(r, \theta = 0) = \pm \lim_{x \rightarrow \pm a^\mp} \mu^* \sqrt{2\pi} (a \mp x)^\lambda B_y(x), \quad (7)$$

kde

$$\mu^* = \frac{2\mu_e(1 + \alpha)}{(1 + \kappa_e)(1 - \beta^2)} \frac{1 + 2\beta(1 - \lambda)}{\sin \pi \lambda} \quad (8)$$

a kde α, β jsou Dundursovy parametry, viz Dundurs & Mura (1964). V případě mikrotrhlin, jejichž vrcholy leží pouze v matrici ($\lambda = 1/2, \alpha = 0, \beta = 0$), přejde zobecněný faktor intenzity napětí (7) v koeficient intenzity napětí K_I , pro který platí

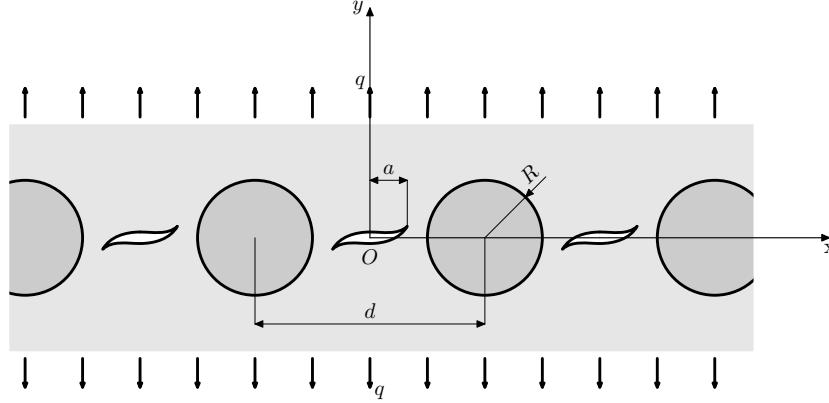
$$K_I = \frac{2\mu_e}{\kappa_e + 1} \sqrt{d \tan\left(\frac{\pi}{d} a\right)} \phi_y(1). \quad (9)$$

U mikrotrhlin, jejichž vrcholy se nacházejí na rozhraní částice/matrice je vhodnější místo zobecněného součinitele intenzity napětí H_I sledovat střední napětí $\bar{\sigma}$ v určité oblasti d^* před čelem mikrotrhlin, které nesmí překročit kritickou hodnotu napětí σ_C v částici, určenou pomocí lomové houževnatosti

$$\sigma_C = \frac{2K_{IC,i}}{\sqrt{2\pi d^*}}. \quad (10)$$

Zde $K_{IC,i}$ značí lomovou houževnatost částic. Ze vztahu pro střední napětí

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{d^*} \int_0^{d^*} (\sigma_{\theta\theta})_{\max} dr = \frac{1}{d^*} \int_0^{d^*} \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-\lambda} dr, \quad (11)$$



Obrázek 2. Nekonečná řada kolineárních slabě ohnutých mikrotrhlin a kruhových částic.

vztahu pro kritické napětí q_{hom}^C případu řady mikrotrhlin v matrici bez částic

$$q_{hom}^C = \frac{K_{IC,e}}{\sqrt{d \tan(\pi a/d)}} \quad (12)$$

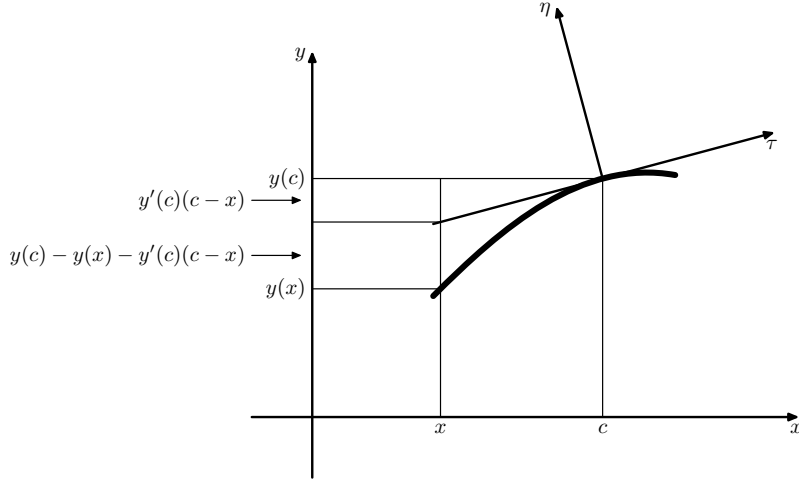
a kritéria stability $\bar{\sigma} < \sigma_C$, se dostane výraz

$$\frac{q^C}{q_{hom}^C} = \frac{(2\pi)^{\lambda-1/2}(1-\beta^2)(1-\lambda)\sin(\pi\lambda)}{(1+\alpha)(1+2\beta(1-\lambda))\sum_{n=1}^{N_B} c_n^* P_n^{(-\lambda,-\lambda)}(1)} \frac{K_{IC,i}}{K_{IC,e}} \left[\frac{d}{d^*} \tan\left(\frac{\pi a}{d}\right) \right]^{1/2-\lambda}, \quad (13)$$

který vyjadřuje závislost poměru kritického zatížení periodické řady mikrotrhlin v nehomogenním a homogenním materiálu na geometrické konfiguraci mikrotrhlin a částic a na elastických a lomových vlastnostech matrice a částic. Zde $K_{IC,e}$ představuje lomovou houževnatost matrice a c_n^* jsou koeficienty aproximace hustoty Burgersova vektoru $B_y(x)$ ze vztahu (4) normované vnějším zatížením kompozitu q .

3. Řada mírně ohnutých mikrotrhlin

Dále bude popsán model matrice kompozitu zpevněné částicemi druhé fáze a oslabené sítě mírně ohnutých mikrotrhlin. Stejně jako výše, rovina xOy představuje isotropní, lineárně elastické prostředí obsahující nekonečnou řadu kruhových částic stejného poloměru R . Středů částic jsou od sebe vzdáleny o d a jejich materiál má obecně jiné elastické vlastnosti než matrice. Mezi částicemi se nachází mikrotrhliny, které se kvazistaticky šíří v podmínkách módu I a jejich konce jsou mírně vychýleny z přímého směru, např. vlivem malé poruchy zatížení (viz obrázek 2). Analýza předkládaného problému je založena na článku Melin (1983), kde byl řešen problém homogenního prostředí oslabeného nekonečnou řadou slabě ohnutých mikrotrhlin. Aby byl problém analyticky zvládnutelný, musí být odchylka mikrotrhlin od jejich horizontálního směru šíření popsána dostatečně hladkou lichou funkcí $y(x)$, která je periodická s periodou d a její derivace musí splňovat podmínku $|y'(x)| \ll 1$. Podobně jako v předchozím případě budou mikrotrhliny modelovány spojitým polem dislokací se složkami hustoty Burgersova vektoru $B_\tau(x)$ a $B_\eta(x)$ (systém souřadnic (τ, η) je lokální a zavádí se na křivce mikrotrhlin $y(x)$, viz obrázek 3) s využitím Buecknerova principu. Složky hustoty Burgersova vektoru $B_\tau(x)$ a $B_\eta(x)$ se hledají v aproximaci $O(y'(x))$, tj. jsou ponechány jen členy lineární v $y'(x)$. Navíc interakční



Obrázek 3. Souřadný systém (τ, η) na křivce $y(x)$.

členy, tj. integrály s regulárními jádry $K_{xx}(x, c)$ a $K_{yy}(x, c)$ popisující interakce dislokací a částic, jsou brány v aproximaci $o(y'(x))$ (tj. odpovídají přímým mikrotrhlinám) a jejich vliv se projeví jako jisté dodatečné napětí k aplikovaným napětím $\sigma_{xx}^{appl}(x)$ a $\sigma_{yy}^{appl}(x)$ ve výsledných normálových $T_n(x)$ a smykových $T_t(x)$ napětích na lících mikrotrhlin

$$T_n(x) = -\sigma_{yy}^{appl}(x) - \frac{\mu_e}{\pi(\kappa_e + 1)} \int_{-a}^a B_y(c) K_{yy}(x, c) dc, \quad (14)$$

$$T_t(x) = - \left(\sigma_{yy}^{appl}(x) + \frac{\mu_e}{\pi(\kappa_e + 1)} \int_{-a}^a B_y(c) K_{yy}(x, c) dc - \sigma_{xx}^{appl}(x) - \frac{\mu_e}{\pi(\kappa_e + 1)} \int_{-a}^a B_y(c) K_{xx}(x, c) dc \right) y'(x). \quad (15)$$

Podobně jako v případě problému přímých mikrotrhlin, jsou $\sigma_{xx}^{appl}(x)$ a $\sigma_{yy}^{appl}(x)$ napětí působící mezi částicemi v prostředí bez mikrotrhlin a $B_y(c)$ je známá hustota Burgersova vektoru z výše popsaného problému interakce přímých mikrotrhlin a kruhových částic. Z rovnováhy normálových a smykových napětí na lících mikrotrhlin se dostane soustava integrálních rovnic, která po normování na jednotkový interval má tvar

$$\begin{aligned} -\frac{\pi(\kappa_e + 1)}{\mu_e} T_n(t) + 2 \int_{-1}^1 B_\eta(s) \frac{1}{t-s} ds + 2 \int_{-1}^1 B_\tau(s) \left(y(t) \frac{\pi \sqrt{1 - \sin^2(\pi a/d)t^2}}{(s-t)^2} - \right. \\ \left. - y(s) \frac{\pi}{d} \frac{1 - \sin^2(\pi a/d)st}{\sqrt{1 - \sin^2(\pi a/d)s^2(s-t)^2}} - y'(s) \frac{\pi \sqrt{1 - \sin^2(\pi a/d)s^2}}{s-t} + \right. \\ \left. + 2y'(t) \frac{\pi \sqrt{1 - \sin^2(\pi a/d)t^2}}{s-t} \right) \frac{1}{\sin(\pi a/d)} ds = 0, \quad (16) \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi(\kappa_e + 1)}{\mu_e} T_t(t) + 2 \int_{-1}^1 B_\eta(s) \left(y(t) \frac{\pi \sqrt{1 - \sin^2(\pi a/d)t^2}}{(s-t)^2} - y(s) \frac{\pi \sqrt{1 - \sin^2(\pi a/d)s^2}}{(s-t)^2} + \right.$$

$$+ \left(y(s) \sqrt{1 - \sin^2(\pi a/d) s^2} \right)' \frac{\pi}{d} \frac{1}{s-t} \frac{1}{\sin(\pi a/d)} ds + 2 \int_{-1}^1 B_\tau(s) \frac{1}{t-s} ds = 0. \quad (17)$$

Uzavřenost konců mikrotrhlin zajistí podmínka konzistence

$$\int_{-1}^1 \left(B_\tau(s) - y'(s) \frac{\sqrt{1 - \sin^2(\pi a/d) s^2}}{\sin(\pi a/d)} B_\eta(s) \right) ds = 0, \quad (18)$$

$$\int_{-1}^1 \left(B_\eta(s) + y'(s) \frac{\sqrt{1 - \sin^2(\pi a/d) s^2}}{\sin(\pi a/d)} B_\tau(s) \right) ds = 0. \quad (19)$$

Neznámé složky hustoty Burgersova vektoru $B_\tau(t)$ a $B_\eta(t)$ v proměnné $t \in (-1, 1)$ se hledají ve tvaru

$$B_\tau(t) = B_\tau^{(0)}(t) + B_\tau^{(1)}(t), \quad B_\eta(t) = B_\eta^{(0)}(t) + B_\eta^{(1)}(t), \quad (20)$$

kde $B_\tau^{(1)}(t) = O(y'(t))$ a $B_\eta^{(1)}(t) = O(y'(t))$, a mohou se určit pomocí iterační metody jako první iterace řešení soustavy integrálních rovnic (16) a (17). Nulté iterace $B_\tau^{(0)}(t)$ a $B_\eta^{(0)}(t)$ odpovídají řešení soustavy (16) a (17) při $y'(t) = 0$. Po jejich vyjádření se dosadí zpět do (16) a (17), tentokrát při nenulovém $y'(t)$. Dostanou se dvě Cauchyho integrální rovnice prvního druhu, ve kterých jako neznámé vystupují složky hustoty Burgersova vektoru $B_\tau(t)$ a $B_\eta(t)$. Řešení obou integrálních rovnic lze za předpokladu $|y'(t)| \ll 1$ vyjádřit v uzavřeném tvaru, avšak k dalším cílům je nutná pouze znalost řešení pro složku hustoty Burgersova vektoru $B_\tau(t)$, které zde bohužel pro svou komplikovanost nemůže být uvedeno.

Cílem úlohy je sledovat chování čel mikrotrhlin při jejich slabé odchylce od horizontálního směru šíření. Jde o popis chování funkce $y(x)$ a změny její derivace $y'(x)$ při růstu mikrotrhlin. Kritérium stability směru šíření mikrotrhlin podle Melin (1983) říká, že směr šíření mikrotrhlin zůstává stabilní, dokud poměr $[y(a)/a]/[y_0/a_0]$ nepřekročí předem stanovenou hodnotu při dostatečně velkém poměru a/a_0 a naopak velmi malém poměru y_0/a_0 . Zde a_0 značí počáteční délku mikrotrhlin, při níž došlo k vychýlení jejich vrcholů od horizontálního směru šíření z nulové hodnoty na hodnotu y_0 . Za předpokladu, že $y(a) = aZ(a)$, kde $Z(a)$ je dostatečně hladká funkce a za podmínky růstu mikrotrhlin $K_{II} = 0$, kde koeficient intenzity napětí K_{II} je určen pomocí $B_\tau(t)$ transformované zpět do proměnné x

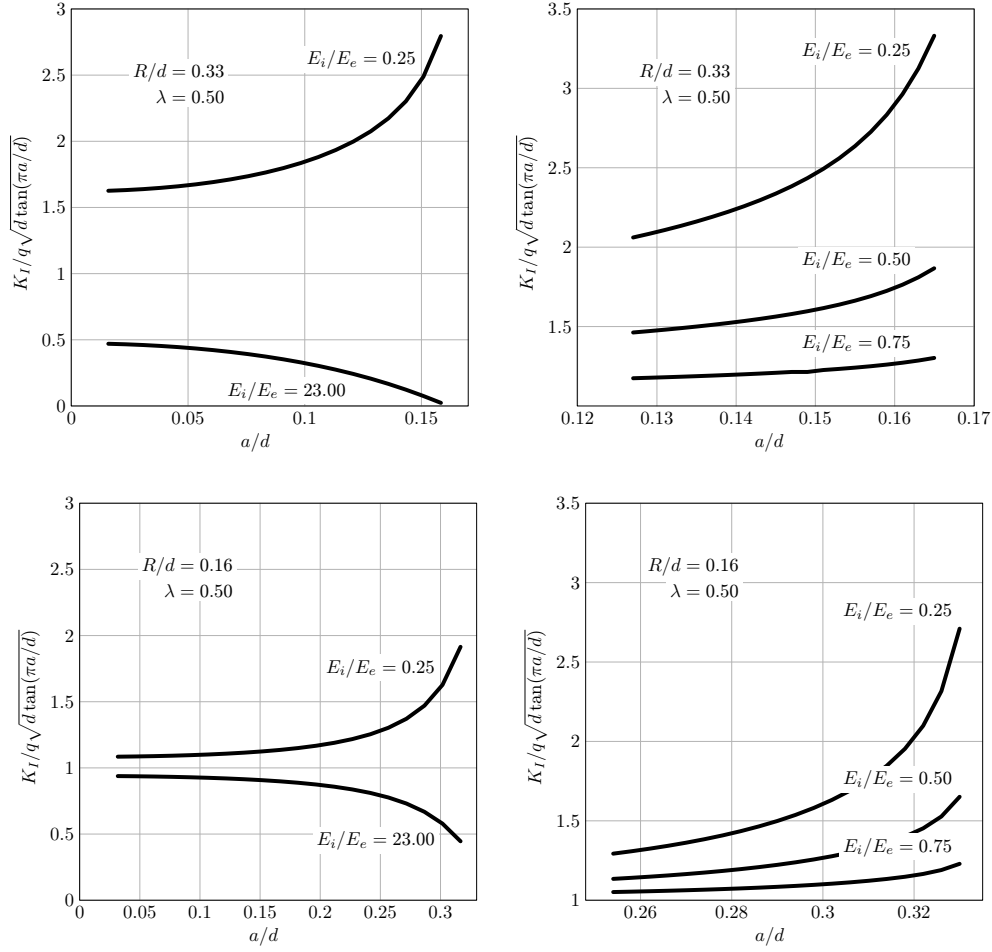
$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \frac{2\mu_e}{\kappa_e + 1} \lim_{x \rightarrow a} (a-x)^{1/2} B_\tau(x), \quad (21)$$

vede výše popsané kritérium k výrazu

$$F(a) = -\frac{a_0}{d} \left\{ \sum_{m=0}^{N_T} e_m \left[\frac{2\pi \cos(\pi a/d)}{d \sin(\pi a/d)} \left(\sum_{n=0}^m u_{n,m}^K D_n(1) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m+1} u_{n,m+1}^K D_n(1) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} u_{n,m-1}^K D_n(1) \right) + \frac{2\pi \cos(2\pi a/d)}{d \sin(2\pi a/d)} T_{m+1}(1) \right] \right\} / \left(\sum_{m=0}^{N_T} (2f_m + e_m) T_{m+1}(1) \right), \quad (22)$$

kde při

$$F(a) > 1 \quad (23)$$

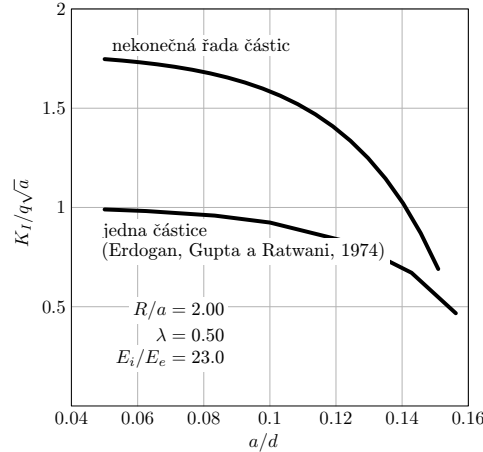


Obrázek 4. Závislost koeficientu intenzity napětí K_I na relativní délce mikrotrhlin a/d pro periodickou řadu mikrotrhlin a částic, kdy vrcholy mikrotrhlin leží v matici.

dojde k nestabilnímu šíření mikrotrhlin. Ve vztahu (22) značí $u_{n,m}^K$ n -tý koeficient Čebyševova polynomu stupně m , e_m a f_m jsou koeficienty aproximace normálových $T_n(x)$ a tečných $T_t(x)$ napětí Čebyševovými polynomy stupně N_T , $D_n(x)$ jsou singulární integrály, jejichž tvar lze nalézt např. v Kaya & Erdogan (1987) a $T_{m+1}(x)$ je Čebyševův polynom prvního druhu řádu $m + 1$.

4. Numerické výsledky

Na závěr budou uvedeny některé numerické výsledky. Na obrázku 4 jsou grafy popisující chování koeficientu intenzity napětí K_I v závislosti na relativní délce mikrotrhlin a/d , jejichž vrcholy se nacházejí jen v matici. Hodnoty koeficientu intenzity napětí K_I jsou normovány vzhledem k homogennímu případu (matrice bez částic). Stupeň aproximace hustoty Burgersova vektoru $B_y(x)$ byl zvolen $N_B = 11$, stupeň aproximace Bubnovovy-Galerkinovy metody pro aplikované napětí $\sigma_{yy}^{appl}(x)$ byl zvolen $N_G = 7$, stupeň aproximace Bubnovovy-Galerkinovy metody pro napětí $\sigma_{e,yy}^{1dis}(x)$ byl zvolen $N_G = 14$ a stupeň aproximace nesingulárního jádra $K_{yy}(x, c)$ byl zvolen $N_f = 10$. Grafy v levém sloupci zobrazují

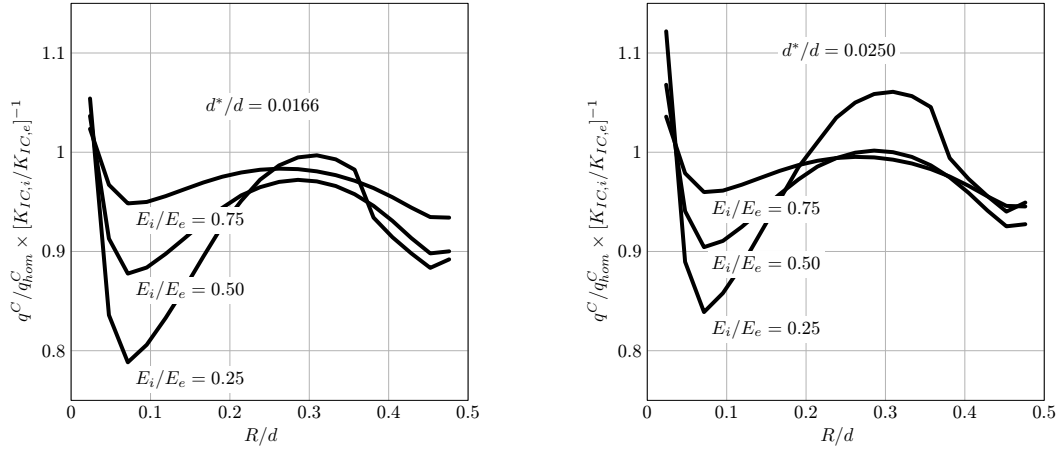


Obrázek 5. Srovnání závislostí koeficientů intenzity napětí K_I na relativní délce mikrotrhlin v případě problému nekonečné řady částic a mikrotrhlin a problému jedné částice a jedné mikrotrhliny.

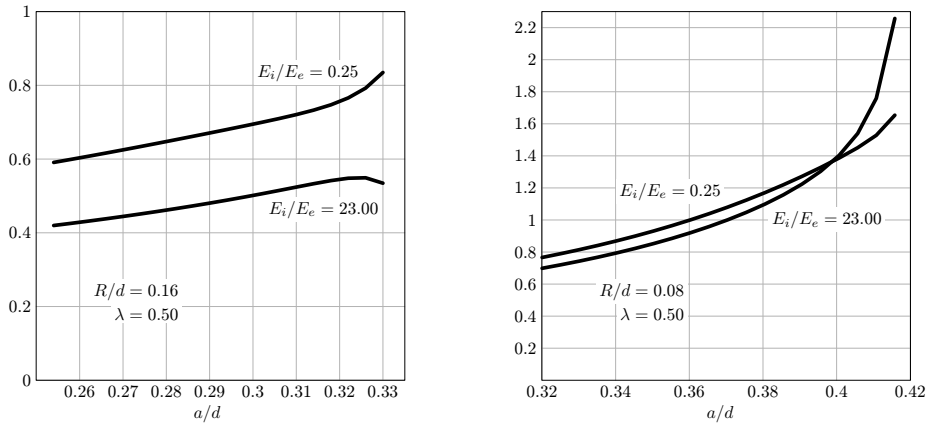
závislost $K_I/q\sqrt{d \tan(\pi a/d)}$ na relativní délce mikrotrhlin a/d pro široký interval hodnot a/d , pro $E_i/E_e = 1/4$ a $E_i/E_e = 23/1$ (tento poměr odpovídá kovovým částicím v epoxidové matici), grafy v pravém sloupci popisují závislosti $K_I/q\sqrt{d \tan(\pi a/d)}$ na relativní délce mikrotrhlin pro úzký interval hodnot $a/d \geq 3/4$ pro poměry elastických konstant $E_i/E_e = 1/4, 1/2$ a $3/4$. Z grafů lze vidět, že vliv částic klesá s jejich rostoucí vzájemnou vzdáleností a jejich rostoucí tuhostí.

Na obrázku 5 je graf srovnávající koeficient intenzity napětí K_I pro nekonečnou řadu mikrotrhlin a částic a pro případ jedné mikrotrhliny a částice. Vrcholy mikrotrhlin resp. mikrotrhliny leží v matici. Jednotlivé stupně aproximací byly voleny stejně jako v předchozím případě. Mikrotrhliny resp. mikrotrhlina celou svou délkou zůstává v matici. Poměr mezi poloměrem částic R a poloviční délkou mikrotrhlin resp. mikrotrhliny a je konstantní ($R/a = 2$), přičemž se mění vzdálenost mezi částicemi resp. vzdálenost mezi částicí a mikrotrhlinou. Problém interakce libovolně orientované mikrotrhliny a kruhové částice řeší práce Erdogana, Gupty & Ratwaniho (1974). V grafu na obrázku 5 je však vyneseno pouze to řešení autorů Erdogana, Gupty & Ratwaniho (1974), které je vhodné k srovnání se zde diskutovanou problematikou, tj. případ mikrotrhliny kolmé k částici. Tuhost částice je o řád vyšší než tuhost matrice (např. kovové částice v epoxidové matici). Z grafu na obrázku 5 vyplývá, že v případě periodické řady mikrotrhlin je v daném intervalu hodnot a/d zesilující účinek interakce mikrotrhlin s rostoucím a/d slabší než stínící účinek částic a dále lze vidět, že vlivem interakce mikrotrhlin jsou hodnoty normovaného faktoru intenzity napětí vyšší pro periodickou řadu mikrotrhlin v porovnání s jednou mikrotrhlinou.

Na obrázku 6 jsou grafy s numerickými výsledky pro normovanou hodnotu kritického aplikovaného zatížení $q^C/q_{hom}^C \times [K_{IC,i}/K_{IC,e}]^{-1}$ v závislosti na relativní velikosti částic R/d pro případ mikrotrhlin, jejichž vrcholy se nacházejí na rozhraní částice/matrice. Jsou zde sledovány případy, kdy poměr Youngových modulů pružnosti částic a matrice je $E_i/E_e = 1/4, 1/2$ a $3/4$ a hodnoty poměru délky procesní zóny mikrotrhlin a vzdálenosti středů částic $d^*/d = 1/40$ a $1/60$. Poměr $E_i/E_e = 1/4$ vede k hodnotě exponentu singularity napětí $\lambda = 0,6535$, poměr $E_i/E_e = 1/2$ vede k exponentu $\lambda = 0,5737$ a poměr $E_i/E_e = 3/4$ k exponentu $\lambda = 0,5295$. K výpočtu hodnot kritického vnějšího



Obrázek 6. Závislosti kritického normovaného vnějšího zatížení $q^C/q_{hom}^C \times [K_{IC,i}/K_{IC,e}]^{-1}$ na relativní velikosti částic R/d . Vrcholy mikrotrhlin leží na rozhraní částice/matrice.



Obrázek 7. Kritérium směrové stability šíření mikrotrhlin.

zatížení q^C byly použity stejné stupně aproximací jako ve výše diskutovaném případě mikrotrhlin, jejichž vrcholy se nacházely v matrici. Poněkud zvláštní charakter závislosti $q^C/q_{hom}^C \times [K_{IC,i}/K_{IC,e}]^{-1}$ na R/d lze objasnit následujícím způsobem: počáteční pokles souvisí s růstem poměru velikosti částic a rozměru oblasti dominance singulárního členu asymptotického rozvoje napětí před čelem mikrotrhliny - jinými slovy, s rostoucí velikostí částic se stále více uplatňuje efekt bimateriálového rozhraní na trhlinu šířící se z elasticky tužšího prostředí do elasticky měkčího prostředí. Postupně však dochází k saturaci tohoto efektu, tak jak oblast dominance singulárního členu je stále více uzavřena v částici. V další fázi převáží vliv poklesu zobecněného součinitele intenzity napětí H_I v důsledku zmenšující se relativní délky mikrotrhlin, což se projeví růstem křivek. Nicméně, v jistém momentu je tento trend převážen účinkem rostoucí koncentrace napětí mezi částicemi, která vede k opětovnému růstu H_I a tudíž k poklesu kritického normovaného $q^C/q_{hom}^C \times [K_{IC,i}/K_{IC,e}]^{-1}$.

Na obrázku 7 jsou dva numerické případy stability směru šíření mikrotrhlin studované na základě kritéria (22). Grafy odpovídají případům, kdy $R/d = 1/6$ a $8/100$ a $E_i/E_e =$

1/4 a 23/1. Aproximace v dílčích stádiích výpočtu vedoucí k řešení problému byly voleny stejně jako v předchozích případech. Stupně aproximace normálových a tečných napětí v místech mikrotrhlin byly zvoleny $N_T = 11$. V případě konfigurace částic a mikrotrhlin $R/d = 1/6$ lze vidět, že ke změně směru šíření mikrotrhlin v žádném případě nedojde, protože jak křivka kritéria stability směru šíření mikrotrhlin pro elasticky měkčí částice než matrice ($E_i/E_e = 1/4$), tak i křivka stability směru pro elasticky tužší částice ($E_i/E_e = 23/1$) leží pod hodnotou 1. Oproti známému jevu inklinace trhliny k elasticky měkčím částicím, zde studovaný případ ukazuje lepší směrovou stabilitu mikrotrhlin v blízkosti tužších částic než v blízkosti částic elasticky měkčích. Konfigurace částic a mikrotrhlin pro $R = 8/100$ odpovídá případu, kdy nezávisle na tuhosti částic, dochází při dostatečné délce mikrotrhlin k nestabilitě jejich směru šíření. Tento jev nastává dříve u matrice s elasticky měkčími částicemi než u matrice s částicemi elasticky tužšími. Od určité délky mikrotrhlin se však projeví vliv větší tuhosti částic a křivka stability pro elasticky tužší částice přejde z hodnot nižších než hodnoty křivky stability pro částice elasticky měkčí k hodnotám vyšším. Výsledky se tedy mohou shrnout do závěru, že vliv částic na stabilitu směru šíření mikrotrhlin je dominantní pouze u částic, jejichž vzdálenost středů je řádově shodná s jejich poloměrem. Při větších vzdálenostech středů částic, ztrácejí částice vliv a směr šíření mikrotrhlin ovlivňují zejména samy mikrotrhliny.

5. Poděkování

Tento příspěvek vznikl díky finanční podpoře prostřednictvím grantu GAČR 101/02/0683 a projektu MSM 26210001.

6. Literatura

- Melin, S. (1983) Why Do Cracks Avoid Each Other?, *Int. J. Fract.*, 53, pp.121–128.
- Profant, T. & Kotoul, M. (2003) Study of Interaction of Periodical Array of Colinear Cracks with Periodical Array of Circular Inclusions in Particle Composites, in: *Sborník konference Inženýrská mechanika 2003*, Svratka, CD-ROM.
- Kosmodamianskij, A. S. (1964) Nekotorye zadači teorii uprugosti o koncentracii naprjaženij, ravnovesii i kolebanijach uprugich tel, in: *Sbornik statej, Izdatelstvo Saratovskogo universiteta*, Soratovsk, pp.38–53.
- Profant, T. & Kotoul, M. (2004) Periodická řada kolineárních trhlin oddělených kruhovými elastickými inkluzemi. Část II. Aplikace techniky spojitě rozdělených dislokací, zasláno k publikaci v *Inženýrská mechanika*.
- Dundurs, J. & Mura, T. (1964) Interaction Between an Edge Dislocation and a Circular Inclusion. *J. Mech. Phys. Solids*, 12, pp.177–189.
- Kaya, A. C. & Erdogan, F. (1987) On the Solution of Integral Equations with Strongly Singular Kernels, *Q. Appl. Math.*, 45, pp.105–122.
- Erdogan, F., Gupta, G. D. & Ratwani, M. (1974) Interaction Between a Circular Inclusion and an Arbitrary Oriented Crack. *J. of Appl. Mech.*, 12, pp.1007–1013.