

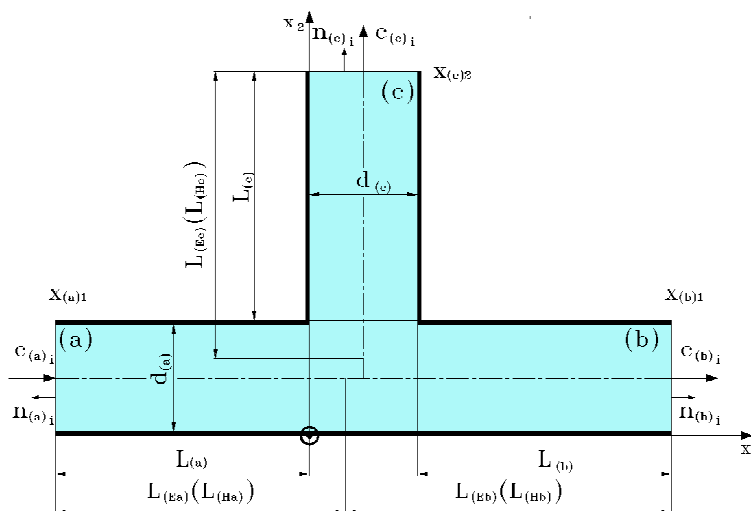
## MATHEMATICAL MODEL OF THE T-PART FOR UNSTEADY UNCOMPRESSIBLE FLUID FLOW, THE EQUIVALENT LENGTH SETTING

J. Štigler\*

*Summary: This paper links up to the previous papers, listed at the end of this paper, where the mathematical model of unsteady fluid flow through T-part had been established. The equivalent lengths of branches are setting up in this paper.*

### 1. Úvod

Tento článek navazuje na publikace uvedené na konci článku. V těchto publikacích bylo popsáno odvození a sestavení matematického modelu rozvětvení tvaru T a určování energetického a hybnostního součinitele v závislosti na poměru průtoků. Cílem bylo nahlížet na rozvětvení tvaru T jako na prvek systému. Takový model bude využit při řešení proudových poměrů v potrubních sítích a to, jak při stacionárním, tak při nestacionárním proudění. Ve vytvořeném nestacionárním modelu se kromě již uvedených součinitelů vyskytují tzv. ekvivalentní délky jednotlivých větví. Cílem tohoto článku je určit tyto ekvivalentní délky. Jejich určování je provedeno na základě numerického modelování proudění v rozvětvení. Na obrázku je znázorněno rozvětvení s jeho základním označením.



Obr. 1 Nákres rozvětvení, pro které je vytvořen matematický model rozvětvení

\* Ing. Jaroslav Štigler, Ph.D.; Odbor fluidního inženýrství Victora Kaplana, Energetického ústavu, VUT FSI v Brně; Technická 2896/2, 616 69 Brno; tel.: +420 541 14 2329, fax: +420 541 14 2347; e-mail: stigler@eu.fme.vutbr.cz

## 2. Matematický model rozvětvení pro nestacionární proudění

Matematický model je tvořen, energetickou rovnicí vyjadřující zákon zachování energie při průtoku kapaliny rozvětvením, hybnostní rovnicí vyjadřující změnu hybnosti kapaliny při jejím průtoku rozvětvením a rovnicí kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu vyjadřující zákon zachování hmoty. První dvě rovnice jsou odvozeny z časově středované Navier-Stokesovy rovnice (dále již jen NS rovnice)

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial c_i}{\partial x_j} c_j + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = \rho g_i. \quad (2.1)$$

Energetickou rovnicí dostaneme vynásobením NS rovnice rychlostí  $c_i$  a integrací přes celou oblast rozvětvení  $V$

$$\begin{aligned} & r \frac{\partial Q_{(a)}}{\partial t} \frac{Q_{(a)}}{S_{(a)}} L_{(Ea)} + \frac{r}{2} \frac{Q_{(a)}^2}{S_{(a)}^2} \cdot Q_{(a)} + p_{(a)} Q_{(a)} - \text{sign}(c_{(a)1}) r g_1 |Q_{(a)}| L_{(Ha)} + \\ & + r \frac{\partial Q_{(b)}}{\partial t} \frac{Q_{(b)}}{S_{(b)}} L_{(Eb)} + \frac{r}{2} \frac{Q_{(b)}^2}{S_{(b)}^2} \cdot Q_{(b)} + p_{(b)} Q_{(b)} - \text{sign}(c_{(b)1}) r g_1 |Q_{(b)}| L_{(Hb)} + \\ & + r \frac{\partial Q_{(c)}}{\partial t} \frac{Q_{(c)}}{S_{(c)}} L_{(Ec)} + \frac{r}{2} \frac{Q_{(c)}^2}{S_{(c)}^2} \cdot Q_{(c)} + p_{(c)} Q_{(c)} - \text{sign}(c_{(c)2}) r g_2 |Q_{(c)}| L_{(Hc)} + \\ & + \frac{1}{2} r x_E \frac{Q_{(c)}^2}{S_{(c)}^2} |Q_{(c)}| = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hybnostní rovnici jsme dostali integrací NS rovnice přes oblast rozvětvení  $V$ . Vzhledem k tomu, že se jedná o vektorovou rovnici, tak reprezentuje tři složkové rovnice. Pro matematický model je potřeba již jen jedna rovnice. Budeme brát složkovou rovnici ve směru  $x_1$ .

$$\begin{aligned} & \text{sign}(c_{(a)1}) \left[ r \frac{\partial |Q_{(a)}|}{\partial t} L_{(Ha)} + r \cdot Q_{(a)} \frac{|Q_{(a)}|}{S_{(a)}} \right] + p_{(a)} n_{(a)1} S_{(a)} + \\ & + \text{sign}(c_{(b)1}) \left[ r \frac{\partial |Q_{(b)}|}{\partial t} L_{(Hb)} + r \cdot Q_{(b)} \frac{|Q_{(b)}|}{S_{(b)}} \right] + p_{(b)} n_{(b)1} S_{(b)} + \\ & + r S_{(c)} x_{(H)1} \frac{Q_{(c)}^2}{S_{(c)}^2} = r g_1 V \end{aligned} \quad (2.3)$$

Důvodem je to, že složková rovnice ve směru  $x_3$  je bezpředmětná, protože ve směru  $x_3$  nevede žádná z větví rozvětvení. Složkovou rovnicí ve směru  $x_2$  do matematického modelu nebudeme uvažovat proto, že v tomto případě je hybnostní součinitel  $\xi_{(H2)}$  závislý na absolutním tlaku v větvi  $c$  a nikoli na rozdílu tlaků.

Tyto dvě rovnice jsou ještě doplněny rovnicí kontinuity

$$Q_{(a)} + Q_{(b)} + Q_{(c)} = 0. \quad (2.4)$$

Znaménko u průtoků je určováno následujícím způsobem. Pokud se jedná o přítok do rozvětvení pak je u průtoku znaménko -. Pokud se jedná o odtok z rozvětvení pak je u průtoku znaménko +.

Aby bylo možné tento matematický model použít v praxi je třeba nejdříve znát průběhy energetického a hybnostního součinitele  $\xi_{(E)}$ ,  $\xi_{(H1)}$ . Ty již byli řešeny v publikaci .....

Při řešení nestacionárního proudění musí být známy energetické a hybnostní ekvivalentní délky potrubí, které vystupují u nestacionárních členů v matematickém modelu rozvětvení. V dalších kapitolách bude ukázáno jejich určení. Při jejich odvození vycházíme z toho, jak byly upravovány nestacionární členy do výsledné podoby v matematickém modelu rozvětvení.

### 3. Úprava nestacionárního členu v hybnostní rovnici

Nestacionární člen v hybnostní rovnici vyjadřuje setrvačnou sílu vyvolanou lokálním zrychlením.

$$F_{(t)i} = \rho \int_V \frac{\partial c_i}{\partial t} dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_V c_i dV \quad (3.1)$$

Složky této setrvačné síly můžeme upravit pomocí první a druhé integrální věty o střední hodnotě.

$$\begin{aligned} F_{(t)1} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} c_1 dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{x_{(a)1}}^{x_{(b)1}} \text{sign}(c_{(s)1}) |Q_{(1)}| dx_1 \right] = \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[ \text{sign}(c_{(a)1}) |Q_{(a)}| (\beta_{(H1)} - x_{(a)1}) + \text{sign}(c_{(b)1}) |Q_{(b)}| (x_{(b)1} - \beta_{(H1)}) \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} F_{(t)2} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_2} c_2 dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{x_{(0)2}}^{x_{(c)2}} \text{sign}(c_{(s)2}) |Q_{(2)}| dx_2 \right] = \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[ \text{sign}(c_{(c)2}) |Q_{(c)}| (x_{(c)2} - \beta_{(H2)}) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pro náš případ platí, že  $\text{sign}(c_{(a)1})=1$ ,  $\text{sign}(c_{(b)1})=1$  a  $\text{sign}(c_{(c)2})=1$ . Pak pro určení koeficientu  $\beta_{(H1)}$  a  $\beta_{(H2)}$  je možné použít následující vztahy

$$\int_{x_{(a)1}}^{x_{(b)1}} |Q_{(1)}| dx_1 = |Q_{(a)}| (\beta_{(H1)} - x_{(a)1}) + |Q_{(b)}| (x_{(b)1} - \beta_{(H1)}), \quad (3.4)$$

$$\int_{x_{(0)2}}^{x_{(c)2}} |Q_{(2)}| dx_2 = |Q_{(c)}| (x_{(c)2} - \beta_{(H2)}). \quad (3.5)$$

### 4. Úprava nestacionárního členu v energetické rovnici

Pro úpravu nestacionárního členu v energetické rovnici platí obdobný postup. Tento člen vyjadřuje urychlující energii.

$$E_{(t)} = \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V c^2 dV = \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (c_1^2 + c_2^2) dV = \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V c_1^2 dV + \int_V c_2^2 dV \right) \quad (4.1)$$

$$\int_{V_1} c_1^2 dV = \int_{x_1} \frac{Q_1^2}{S} dx_1 = \frac{Q_{(a)}^2}{S_{(a)}} (\beta_{E1} - x_{(a)1}) + \frac{Q_{(b)}^2}{S_{(b)}} (x_{(b)1} - \beta_{E1}) \quad (4.2)$$

$$\int_{V_{II}} c_2^2 dV = \int_{x_2} \frac{Q_2^2}{S} dx_2 = \frac{Q_{(c)}^2}{S_{(c)}} (x_{(c)2} - \beta_{E2}) \quad (4.3)$$

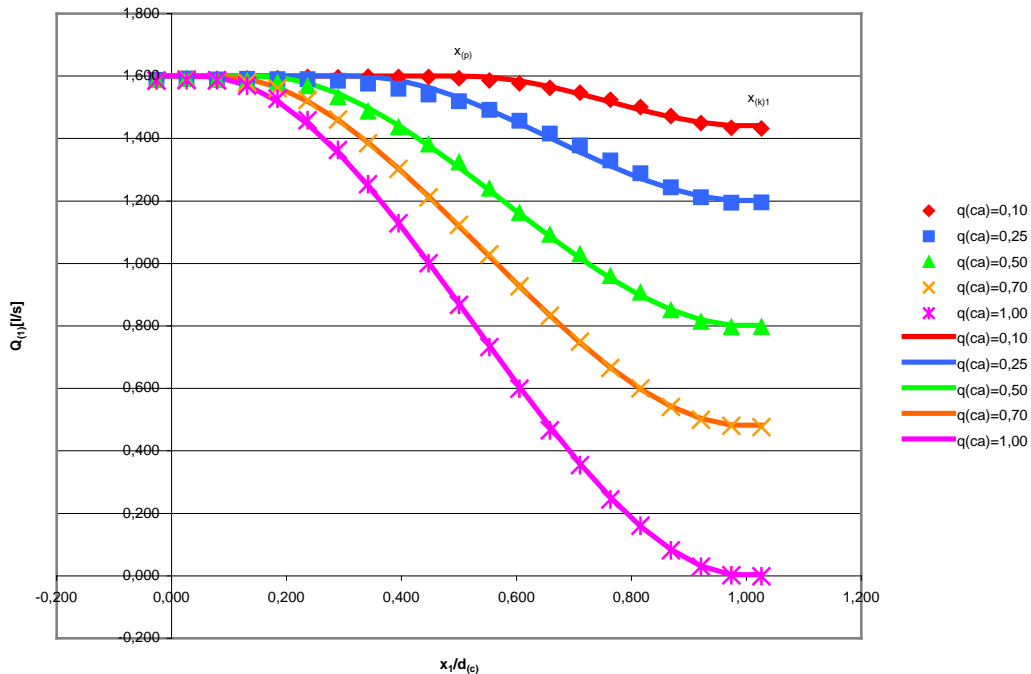
Za předpokladu, že průřez je ve všech větvích konstantní můžeme pro určení koeficientů  $\beta_{(E1)}$  a  $\beta_{(E2)}$  použít vztahy

$$\int_{x_1} Q_{(1)}^2 dx_1 = Q_{(a)}^2 (\beta_{E1} - x_{(a)1}) + Q_{(b)}^2 (x_{(b)1} - \beta_{E1}), \quad (4.4)$$

$$\int_{x_2} Q_{(2)}^2 dx_2 = Q_{(c)}^2 (x_{(c)2} - \beta_{E2}). \quad (4.5)$$

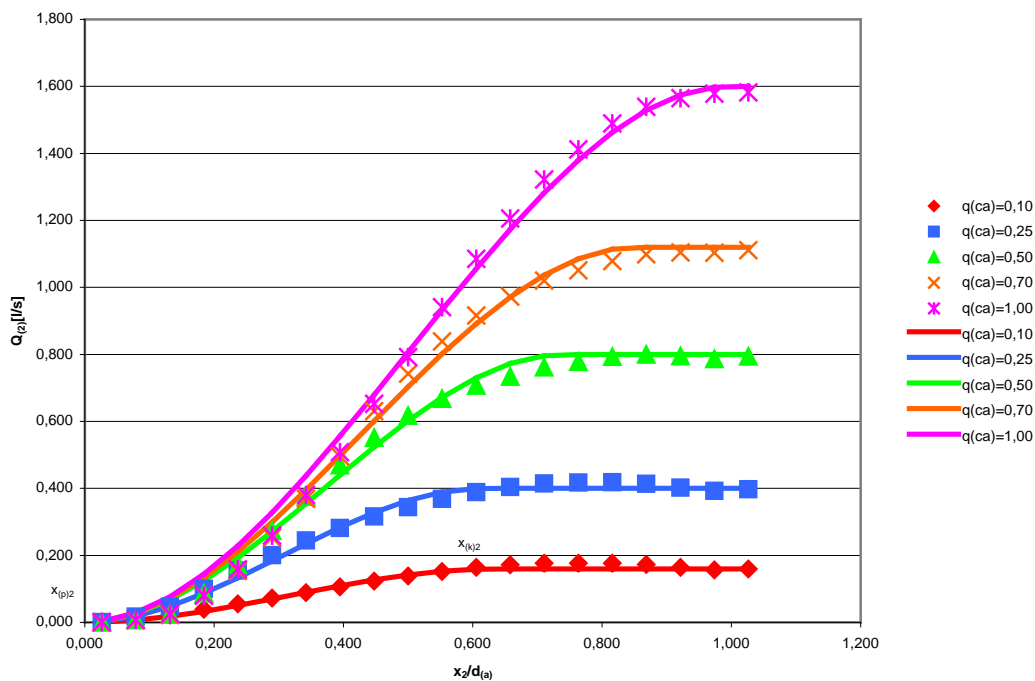
## 5. Změna průtoků ve směru $x_2$ a $x_3$ .

Aby mohli být určeny ekvivalentní délky musí být známy koeficienty  $\beta_{(H1)}$ ,  $\beta_{(H2)}$ ,  $\beta_{(E1)}$  a  $\beta_{(E2)}$ . Ty budou určeny ze vztahů (3.4), (3.5), (4.4) a (4.5), za předpokladu, že je známa hodnota integrálů straně těchto vztahů.

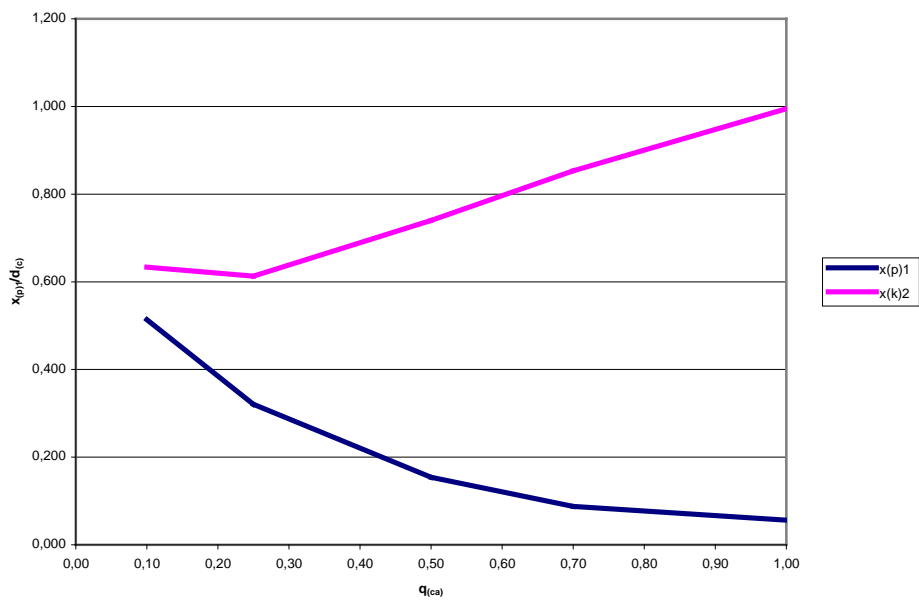


obr 02. Průběh průtoku  $Q_{(1)}$  ve směru osy  $x_{(1)}$

Aby mohly být tyto integrály určeny pak, musí být známy průběhy průtoku  $Q_{(1)}$  v závislosti na souřadnici  $x_{(1)}$  a průběh průtoku  $Q_{(2)}$  v závislosti na souřadnici  $x_{(2)}$ . Určení těchto průběhů experimentálně je obtížné. Proto byly určeny na základě numerického modelování proudění v rozvětvení. Jejich výsledky pro různé poměry průtoků jsou vykresleny na obrázku 02 a 03.



obr 03. Průběh průtoku  $Q_{(2)}$  ve směru osy  $x_{(2)}$



obr 04. Závislost  $x_{(p)1}$  a  $x_{(k)2}$  na poměru průtoků  $q_{(ca)}$

Osamocené body jsou hodnoty zjištěné numerickým modelováním. Body lze proložit polynomem třetího stupně. U průběhu  $Q_{(1)}$  je patrné, že počátky přechodu jsou posunuté v závislosti na poměru průtoků ve směru kladné osy  $x_1$ . Koncový bod polynomu je pevný. Polohu počátku přechodu označíme  $x_{(p)1}$ , polohu konce přechodu  $x_{(k)1}$ . U průběhu  $Q_{(2)}$  je zase posunutý konec přechodu a počáteční bod je pevný. Polohu počátku přechodu označíme  $x_{(p)2} = 0$ , a polohu konce přechodu označíme  $x_{(k)2}$ . Průběhy průtoků je možné tedy nahradit těmito funkcemi

$$Q_{(1)} = \frac{Q_{(a)} - Q_{(b)}}{(x_{(k)1} - x_{(p)1})^3} \left[ 2x^3 - x_{(p)1} (3x^2 - x_{(p)1}^2) - 3x_{(k)1} (x - x_{(p)1})^2 \right] + Q_{(a)} \quad (5.1)$$

$$Q_{(2)} = -\frac{Q_{(c)}}{x_{(k)2}^3} \left[ 2x_2^3 - 3x_{(k)2} x_2^2 \right]. \quad (5.2)$$

Z průběhů průtoků je vidět, že polohy  $x_{(p)1}$  a  $x_{(k)2}$  jsou na poměru průtoků

$$q_{(ca)} = \frac{Q_{(c)}}{Q_{(a)}} \quad (5.3)$$

závislé. Tato závislost je znázorněna na obr. 04.

## 6. Ekvivalentní délky potrubí

Pro tyto průběhy změn průtoků je již možné vypočítat integrály ve vztazích (3.4), (3.5), (4.4) a (4.5) a vyjádřit z nich hledané koeficienty  $\beta_{(H1)}$ ,  $\beta_{(H2)}$ ,  $\beta_{(E1)}$  a  $\beta_{(E2)}$ .

$$\beta_{(H1)} = x_{(p)1} + \frac{1}{2} (d_{(c)} - x_{(p)1}), \quad (6.1)$$

$$\beta_{(H2)} = \frac{1}{2} x_{(k)2}, \quad (6.2)$$

$$\beta_{(E1)} = x_{(p)1} + \left[ \frac{Q_{(c)}}{(Q_{(a)} + Q_{(b)})} \frac{13}{35} + \frac{Q_{(b)}}{(Q_{(a)} + Q_{(b)})} \right] (d_{(c)} - x_{(p)1}), \quad (6.3)$$

$$\beta_{(E2)} = x_{(k)2} \frac{22}{35}. \quad (6.4)$$

Ekvivalentní délky jsou vyjádřeny vztahy

$$L_{(Ha)} = (\beta_{(H1)} - x_{(a)1}), \quad L_{(Hb)} = (x_{(b)1} - \beta_{(H1)}) \quad L_{(Hc)} = (x_{(c)2} - \beta_{(H2)}) \quad (6.5)$$

$$L_{(Ea)} = (\beta_{(E1)} - x_{(a)1}), \quad L_{(Eb)} = (x_{(b)1} - \beta_{(E1)}) \quad L_{(Ec)} = (x_{(c)2} - \beta_{(E2)}) \quad (6.6)$$

Dosazením za koeficienty a s uvažováním

$$x_{(a)1} = -L_{(a)}, \quad x_{(b)1} = L_{(b)} + d_{(c)}, \quad x_{(c)2} = L_{(c)} + d_{(a)}, \quad (6.7)$$

$$x_{(k)1} = d_{(c)} \quad (6.8)$$

dostaneme

$$L_{(Ha)} = L_{(a)} + \frac{d_{(c)}}{2} \left( 1 + \frac{x_{1(p)}}{d_{(c)}} \right) = L_{(a)} + d_{(c)} \mathbf{I}_{(Ha)} \quad (6.9)$$

$$L_{(Hb)} = L_{(b)} + \frac{d_{(c)}}{2} \left( 1 - \frac{x_{1(p)}}{d_{(c)}} \right) = L_{(b)} + d_{(c)} \mathbf{I}_{(Hb)} \quad (6.10)$$

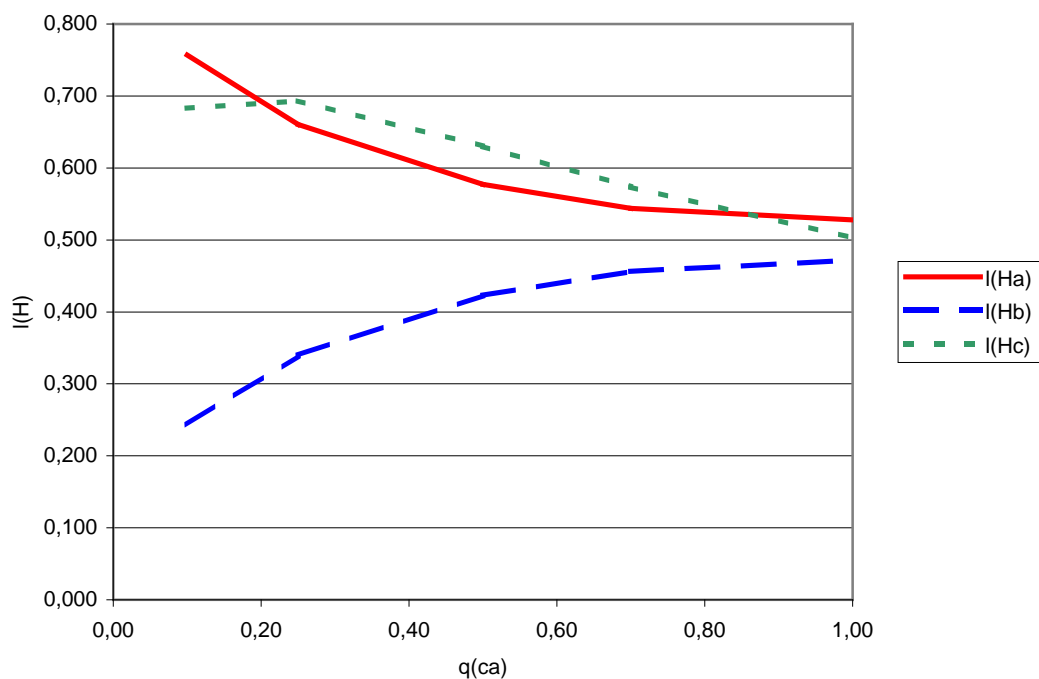
$$L_{(Hc)} = L_{(c)} + d_{(a)} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{x_{(k)2}}{d_{(a)}} \right) = L_{(c)} + d_{(a)} \mathbf{l}_{(Hc)} \quad (6.11)$$

$$L_{(Ea)} = L_{(a)} + d_{(c)} \left[ \frac{x_{(p)1}}{d_{(c)}} + \frac{\left( 1 - \frac{x_{(p)1}}{d_{(c)}} \right)}{\left( 2 - q_{(ca)} \right)} \left( 1 - q_{(ca)} \frac{22}{35} \right) \right] = L_{(a)} + d_{(c)} \mathbf{l}_{(Ea)} \quad (6.12)$$

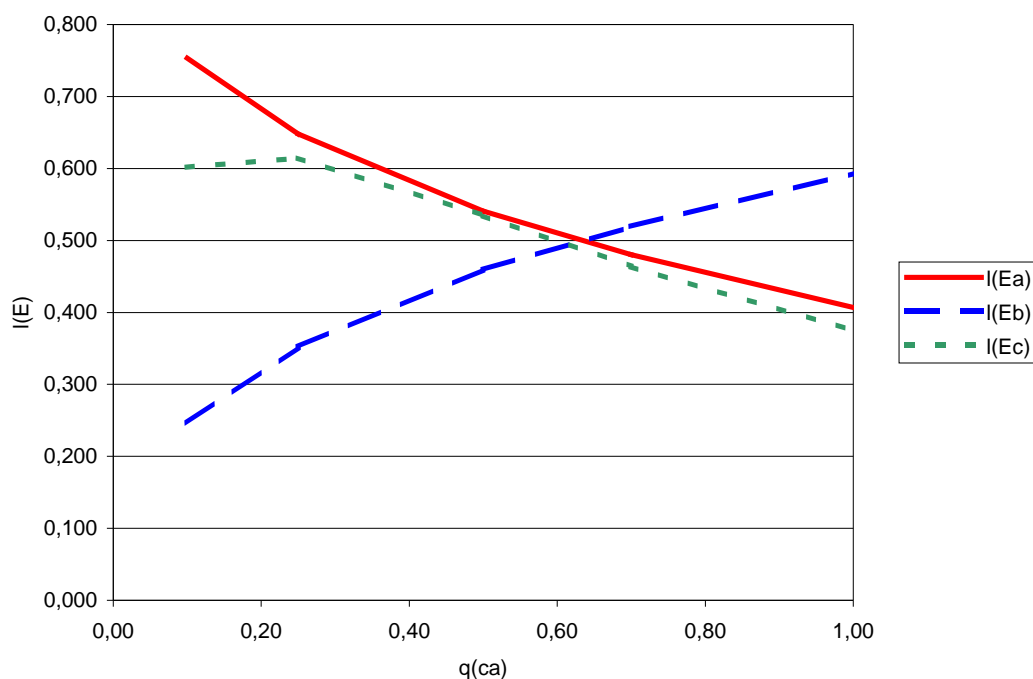
$$L_{(Eb)} = L_{(b)} + \frac{d_{(a)} \left( 1 - \frac{x_{(p)1}}{d_{(a)}} \right)}{\left( 1 + q_{(ba)} \right)} \left( q_{(ba)} + q_{(ca)} \frac{22}{35} \right) = L_{(b)} + d_{(a)} \mathbf{l}_{(Eb)} \quad (6.13)$$

$$L_{(Ec)} = L_{(c)} + d_{(a)} \left( 1 - \frac{x_{(k)2}}{d_{(a)}} \frac{22}{35} \right) = L_{(c)} + d_{(a)} \mathbf{l}_{(Ec)} \quad (6.14)$$

Ve vztazích jsou hodnoty  $L_{(a)}$ ,  $L_{(b)}$ ,  $L_{(c)}$  konstanty a záleží na velikosti oblasti rozvětvení. Veličiny  $\mathbf{l}_{(Ha)}$ ,  $\mathbf{l}_{(Hb)}$ ,  $\mathbf{l}_{(Hc)}$ ,  $\mathbf{l}_{(Ea)}$ ,  $\mathbf{l}_{(Eb)}$  a  $\mathbf{l}_{(Ec)}$  jsou bezrozměrné a jsou funkcí poměru průtoků  $q_{(ca)}$ . Jejich průběhy jsou vyneseny na obr. 05 a obr. 06.



obr 05. Závislost  $\mathbf{l}_{(Ha)}$ ,  $\mathbf{l}_{(Hb)}$  a  $\mathbf{l}_{(Hc)}$  na poměru průtoků  $q_{(ca)}$



obr 06. Závislost  $l_{(Ea)}$ ,  $l_{(Eb)}$  a  $l_{(Ec)}$  na poměru průtoků  $q_{(ca)}$

## 7. Závěr

V tomto článku bylo pojednáno o dílčím problému při vytváření matematického modelu nestacionárního proudění kapaliny rozvětvením. Při nestacionárním proudění je třeba určovat ekvivalentní délky jednotlivých větví potrubí, které v matematickém modelu vystupují. Z předchozího pojednání je patrné, že tyto ekvivalentní délky nejsou konstantní a mění se poměrem průtoků  $q_{(ca)}$ . To znamená, že jsou závislé na čase a je proto potřeba znát jejich derivaci podle času. Cílem této práce je sestavit matematický model proudění rozvětvením tak, aby jej bylo možné využít při řešení nestacionárního proudění v potrubních sítích.

## 8. Poděkování

Tato problematika je řešena v rámci Výzkumného záměru MSM 262100004 s názvem Ekologicky a ekonomicky přijatelné moderní energetické technologie a v rámci projektu MPO č. FF-P/051 s názvem Progresivní technologie hydraulické dopravy zrnitých materiálů

## 9. Literatura

- [1.] ŠTIGLER, Jaroslav - POCHYLÝ František. Některé aspekty výpočtu místních ztrát větvených potrubí. In *Vykurovanie 2003. Sborník 11. medzinárodnej konferencie na tému: Legislatívne, normalizačné a technické aspekty zásobovania teplom pred vstupom SR do EÚ*. Slovenská spoločnosť pre techniku prostredia ZSVTS Bratislava. 1. vydání. Bratislava 2003, s.313-318, ISBN 80-967479-6-7, EAN 9788096747962.
- [2.] ŠTIGLER, Jaroslav - NOVÁKOVÁ, Michaela. Fluid Flow in Bifurcation. In *proceedings of 10<sup>th</sup> International Meeting of the Work Group on THE FEHAVIOUR OF HYDRAULIC MACHINERY UNDER STEADY OSCILLATORY CONDITIONS*,



June 26.-28.2001. NTNU Norwegian University of Science and Technology. Trondheim (Norway): NTNU, 2001, s.D3

- [3.] ŠTIGLER, Jaroslav - POCHYLÝ, František. Three-Dimensional Laminar Fluid Flow in T-Part. In *Hydraulic Machinery and Systems : proceedings of the XXI<sup>st</sup> IAHR Symposium 9-12 September 2002 Lausanne*. Laboratoire de machines hydrauliques, Faculté des sciences et techniques de l'Ingénieur, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Lausanne: Grafisches Unternehmen AG, 2002, s. 325-330. ISBN 3-85545-865-0.