

## ENVELOPE OF MODULATED HARMONIC COMPONENTS EXTRACTION FROM NOISE AND VIBRATION SIGNALS

J. Tůma\*

**Summary:** *The paper deals with a non-causal order-tracking filter that is known as a Vold-Kalman filter. The V-K filter is intended to analyse tonal noise and vibration signals that are obvious in diagnostics of machine running in cyclic fashion and equipped by geared transmission units. The basic idea of V-K filtration consists of the system of data and structural equations. The data equations express a simple fact, that a measured signal is a sum of harmonic component and an additive error signal while the structural equations govern the harmonic component generation as an output of a linear dynamic system affected by a random error,. The minimum of a weighted sum of both the random error variances results in evaluation of the harmonic component envelope.*

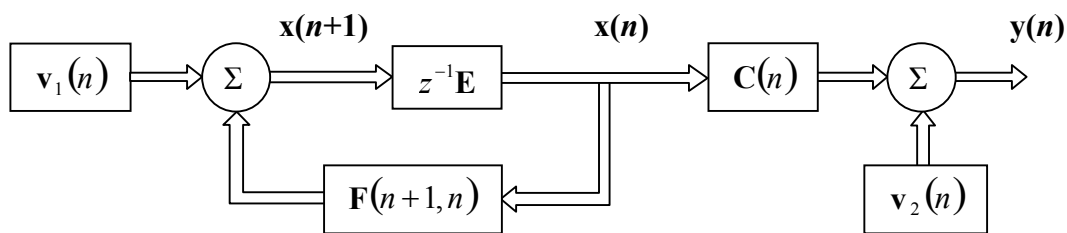
### 1. Úvod

Výstupem Kalmanova filtru je odhad časového vývoje stavu lineárního systému, který je dostupný jen prostřednictvím nepřímého pozorování časového vývoje jistého vektoru dat. Algoritmus odhadování je rekurzivní, tedy zvláště vhodný pro číslicové zpracování naměřených dat v reálném čase, a odhad je ve smyslu statistickém optimální, což znamená, že střední hodnota druhé mocniny chyby je minimální. Bez bližšího popisu podstaty rekurzivních výpočtů bude v úvodu popsáno jen zadání úlohy filtrace jako referenční metody k Vold-Kalmanově filtraci. Označení veličin bude převzato z knihy [Haykin 1996].

Základem filtru jsou dvě rovnice. První rovnice (process equation) popisuje vývoj stavu procesu popsaného v časovém okamžiku  $n$  vektorem stavových proměnných  $\mathbf{x}(n)$  tak, že je definována souvislost mezi stavovým vektorem v okamžiku  $n$  a v následujícím okamžiku  $n+1$ . Stav procesu v okamžiku  $n+1$  je ovlivněn náhodným vektorem  $\mathbf{v}_1(n)$ . Složky tohoto náhodného vektoru jsou členy bílé posloupnosti, tj. lze je označit za nekorelovaný šum. Druhá rovnice (measurement equation) modeluje měření stavu. Zatímco první rovnice byla v principu dynamická – diferenční, představuje druhá rovnice prostou transformaci hodnot vektoru stavu prostřednictvím transformační matice na hodnoty přístupné měření  $\mathbf{y}(n)$ . Transformovaný stav ovlivněn aditivním šumem  $\mathbf{v}_2(n)$ . Vektor šumu obsahuje také složky představující bílé posloupnosti. Blokové schéma vzájemných vazeb lze znázornit na obrázku 1. Symbol  $z^{-1}$  znázorňuje posunutí o jeden vzorek ( $\mathbf{E}$  je jednotková matice).

---

\* Prof. Ing. Jiří Tůma, CSc.: Fakulta strojní, VŠB-Technická univerzita v Ostravě;  
17. listopadu 15; 708 33 Ostrava-Poruba; tel.: +420 596993482, e-mail: [jiri.tuma@vsb.cz](mailto:jiri.tuma@vsb.cz)



Obrázek 1 Signálový diagram Kalmanova filtru

Výstupem Kalmanova filtru jsou odhady vektoru stavu procesu  $\hat{\mathbf{x}}(n|y(1), \dots, y(n))$  v časovém okamžiku  $n$  na základě měřených hodnot  $y(1), \dots, y(n)$  a odhadu počátečního stavu  $\hat{\mathbf{x}}(1|y(1))$  a korelačního vektoru chyby tohoto počátečního odhadu.

Zadání úlohy Kalmanovy filtrace lze aplikovat na problém extrakce harmonické složky z měřeného signálu. Stav procesu lze v této úloze považovat za hledanou harmonickou složku, která v součtu se zbývajícími složkami signálu představuje měřený signál. Popis vývoje stavu procesu představující tuto harmonickou složku s případně měnící se frekvencí bude předvedeno v další části referátu. Modelování měření představuje sumaci harmonické složky se zbytkem složek obsažených v signálu. Jistý problém však představují budící signály  $v_1(n)$  a  $v_2(n)$  signálového diagramu z obrázku 1. Jejich rozptyly nejsou předem známy a navíc signál  $v_2(n)$  nemusí být dominující bílý šum, ale další harmonická složka o jiné frekvenci.

Publikované práce Volda a Leuridana počínaje rokem 1993 se přesné aplikaci metodiky Kalmanova filtrace vyhýbají a těží jen z postupu výpočtu, jehož detaily nejsou publikovány. V úvahách Volda se respektuje neznalost rozptylů obou zmíněných budících posloupností a ve výpočtu se ovládá jen jejich vzájemný poměr, který ovlivňuje frekvenční vlastnosti filtru. I když lze pochybovat o významu dílčího označení tohoto způsobu filtrace jménem Kalman, v principu je myšlenka filtrace navržena Voldem a Leuridanem inspirující a otvírá nové možnosti řádové analýzy signálů se známou frekvencí, která je odvozena z měření otáček.

Vold-Kalmanova filtrace se vyvíjela ve dvou generacích. První generace filtru měla za cíl extrahovat harmonickou složku o zadané frekvenci a následující druhá generace se omezila jen na obálku této složky. Popularizace této metody filtrace druhé generace byla zajištěna její implementací do signálového analyzátoru PULSE firmy Brüel & Kjær nebo programového systému IDEAS.

## 2. Vold-Kalmanův filtr druhé generace

Rovnice modelující vývoj stavu systému se u Vold-Kalmanova filtru nazývá strukturální rovnice a rovnice modelující měření stavu je u této filtrace nazývána datová rovnice.

### Datová rovnice

Vzorky měřeného signálu jsou značeny  $y(n)$  a vzorky obálky extrahované složky signálu jsou značeny  $x(n)$ , kde  $n = 1, \dots, N$  znamená pořadí vzorků. Harmonická složka signálu je modelována součinem komplexního harmonického signálu a komplexní obálky. Datová rovnice vyjadřuje prostý fakt, že měřený signál je složen z extrahované harmonické složky a

zbytku signálu se vzorky označenými  $\eta(n)$ , kde  $n = 1, \dots, N$ . Její tvar pro vzorky s pořadím  $n$  je následující

$$y(n) = x(n)\exp(j\Theta(n)) + \eta(n). \quad (1)$$

Průběžná fáze signálu je obecně rovna časovému integrálu úhlové frekvence. V případě vzorkovaných signálů se vypočte podle vzorce

$$\Theta(n) = \sum_{i=0}^n \omega(i)\Delta t, \quad (2)$$

kde  $\omega(n)$  je okamžitá úhlová frekvence a  $\Delta t = 1/f_s$  je interval vzorkování.

Soustava datových rovnic pro všechny naměřené vzorky má vektorový tvar

$$\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}, \quad (3)$$

kde  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$  je diagonální komplexní matice tvaru

$$\mathbf{C} = \text{diag}\{\exp(j\Theta(1)), \exp(j\Theta(2)), \dots, \exp(j\Theta(N))\}. \quad (4)$$

Tato matice stejně jako vektory  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}$  jsou komplexní. Charakteristika velikosti zbytkového signálu  $\boldsymbol{\eta}$  se určí jako součin transponovaného komplexně sdruženého vektoru  $\boldsymbol{\eta}^H$  a původního vektoru  $\boldsymbol{\eta}$ . Tento součin je reálný a představuje druhou mocninu euklidovské normy vektoru. Operace transponování matice a obrácení znaménka imaginární části jejich prvků se označuje horním indexem  $H$ . Reálné vektory budou však označeny jen znaménkem transponování. Pro druhou mocninu euklidovské normy vektoru zbytkového signálu platí

$$\boldsymbol{\eta}^H \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{y}^T - \mathbf{x}^H \mathbf{C}^H)(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}). \quad (5)$$

### Strukturální rovnice pro obálku harmonického signálu

Strukturální rovnice filtruje posloupnost hodnot komplexní amplitudy. Omezení rychlosti jejich změn se zadává nejvyšším stupněm polynomu  $k$ , který lze skupinou vzorků obálky o počtu  $k + 1$  proložit. Polynom prvního stupně je řešením diferenční rovnice druhého řádu

$$\nabla^2 x(n) = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) = 0. \quad (6)$$

Charakteristická rovnice této diferenční rovnice má dvojný kořen roven jednotce, což vede na zmíněný výsledek řešení.

Polynom obecného stupně  $k$  splňuje podmínku nulové difference řádu  $k + 1$ , tj.  $\nabla^{k+1} x(n) = 0$ . Protože se obálka signálu postupně mění, je třeba strukturální rovnici budít budící funkcí  $\varepsilon(n)$ . Konečný obecný tvar strukturální rovnice je

$$\nabla^{k+1} x(n) = \varepsilon(n), \quad (7)$$

kde  $k$  představuje řád polynomu, který se spojuje s řádem filtru změn komplexní amplitudy.

Vold-Kalmanova filtrace druhé generace užívá filtr prvního nebo druhého, popř. až třetího řádu. Strukturální rovnice pro tyto filtry mají tvar.

$$\text{První řád:} \quad x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) = \varepsilon(n) \quad (8)$$

$$\text{Druhý řád} \quad x(n) - 3x(n-1) + 3x(n-2) - x(n-3) = \varepsilon(n) \quad (9)$$

Soustava strukturálních rovnic pro všechny naměřené vzorky má vektorový tvar

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (10)$$

kde  $\mathbf{A}$  je pásová obdélníková matice s  $N$  sloupci a  $N-2$  řádky. Pro filtr prvního řádu je třídiagonální a pro filtr druhého řádu čtyřdiagonální.

Euklidovská norma charakterizující velikost vektoru budící funkce se však změní s ohledem na skutečnost, že vektor obálky obsahuje komplexní čísla. K transpozici je třeba přidat také změnu znaménka imaginární části, aby výsledek násobení vektorů bylo reálné číslo, tj. druhá mocnina euklidovské normy má tvar

$$\boldsymbol{\varepsilon}^H \boldsymbol{\varepsilon} = r^2 \mathbf{x}^H \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (11)$$

Matice  $\mathbf{A}$  obsahuje jen konstantní prvky v závislosti na řádu filtru. Její rozměr pro filtr prvního řádu je  $N \times N-2$  a pro filtr druhého řádu  $N \times N-3$ . Například pro filtr prvního řádu se jedná o třídiagonální obdélníkovou matici následujícího tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Násobením matice  $\mathbf{A}^T$  (horní index  $T$  označuje transpozici) maticí  $\mathbf{A}$  vznikne čtvercová symetrická matice o rozměru  $N \times N$ . Druhá mocnina euklidovské normy vektoru obsahujícího budící funkce má tvar kvadratická formy  $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  v proměnné  $\mathbf{x}$ , o které lze podle základních vět teorie matic uvést, že je nezáporná, tj.  $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ , pro libovolný nenulový vektor budících funkcí  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Tato vlastnost se nazývá pozitivní semidefinitnost čtvercové symetrické matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ . Semidefinitnost matice lze zdůvodnit tím, že tato kvadratická forma může teoreticky nabýt také nulové hodnoty pro nenulový vektor  $\mathbf{x}$ .

Počet nenulových diagonál u matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  se zvýší na 5, přičemž nenulové prvky jsou na dvou diagonálách pod a nad hlavní diagonálou této čtvercové pásové matice.

### Globální řešení datových a strukturálních rovnic pro obálku harmonického signálu

Výsledkem filtrace má být nalezení neznámého vektoru  $\mathbf{x}$ , který musí vyhovovat soustavě datových a strukturálních rovnic. Počet prvků vektoru  $\mathbf{x}$  je  $N$  a počet rovnic  $N + (N - 2) = 2N - 2$ . Mezi neznámé patří také vektory  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ( $N-2$  prvků) a  $\boldsymbol{\eta}$  ( $N$  prvků), pak počet neznámých  $3N - 2$  je vyšší než počet rovnic, tj. soustava rovnic je vzhledem ke zmíněným třem neznámým vektorům nedourčena. K soustavě rovnic mohou být připojeny podmínky, podle kterých je požadováno, aby vektory  $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}$  měly minimální euklidovskou normu, a aby tyto normy byly v žádoucím vztahu, tj. aby bylo minimalizováno kritérium ve tvaru

$$J = \mathbf{x}^H \mathbf{D} \mathbf{x} + (\mathbf{y}^T - \mathbf{x}^H \mathbf{C}^H) (\mathbf{y} - \mathbf{C} \mathbf{x}). \quad (13)$$

kde  $\mathbf{D} = r^2 \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  je pomocná čtvercová matice zjednodušující zápis vzorců. V definici této čtvercové matice je obsažen váhový koeficient  $r$ , který určuje předepsaný vzájemný vztah mezi euklidovskými normami zbytkového signálu a budící funkce. Jak bude dále ukázáno, podmínka minimální velikosti váženého součtu a zvolený váhový koeficient dávají vypočtenému vektoru výhodné vlastnosti, protože realizují filtr s výhodným průběhem frekvenční charakteristiky představující pásmovou propust. Hodnoty váhového koeficientu blízké nule zmenšují vlivnost strukturální rovnice a filtr ztrácí účinnost.

Minimum kritéria (13) lze vypočítat například derivací podle reálné a imaginární složky vektoru  $\mathbf{x} = \mathbf{u} - j\mathbf{v}$ . Výsledkem výpočtu je vektor minimalizující kritérium (13):

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}^H\mathbf{y}, \quad (14)$$

kde  $\mathbf{B} = \mathbf{D} + \mathbf{E} = r^2\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{E}$ . Podle monografie o speciálních maticích [Fiedler 1981] lze dokázat, že jestliže je  $k$  hlavní diagonále pozitivně semidefinitní matice přičteno libovolně malé číslo, pak je výsledná matice pozitivně definitní, tj. pro libovolný nenulový vektor budících funkcí  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  platí ostrá nerovnost  $\mathbf{x}^T(r^2\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} > 0$ . Protože je symetrická čtvercová matice  $(r^2\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{E})$  pozitivně definitní, je také regulární a tedy existuje její inverzní matice.

Násobením vektoru měřených dat  $\mathbf{y}$  zleva diagonální maticí  $\mathbf{C}^H$  se posouvá frekvence sledované harmonické složky signálu do nulové frekvence, tj. takto korigovaný signál se stane stejnosměrnou složkou signálu. Platí

$$\mathbf{C}^H\mathbf{y} = \mathbf{C}^H(\mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{C}^H\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{C}^H\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x} + \mathbf{C}^H\boldsymbol{\eta}. \quad (15)$$

Násobením obou diagonálních matic  $\mathbf{C}^H$  a  $\mathbf{C}$  se kompenzuje velikost průběžné fáze na nulu. a výsledkem násobení je jednotková matice. Vektor  $\mathbf{C}^H\mathbf{y}$  je složen z vektoru komplexní obálky signálu  $\mathbf{x}$  a transformovaného zbytkového signálu. Filtr plní funkci dolnoproústné filtrace časového průběhu obálky. Jeho frekvenční charakteristika závisí na matici  $\mathbf{B}$ . Účinek filtrace lze ovládat volbou velikosti váhového koeficientu.

### 3. Vold-Kalmanův filtr pro extrahování obecného počtu složek signálů

Obecný tvar datové rovnice pro vzorky s pořadím  $n$  a s počtem  $P$  sledovaných harmonických složek s obálkou  $x_i(n)$  je

$$y(n) = \sum_{i=1}^P x_i(n) \exp(j\Theta_i(n)) + \eta(n). \quad (16)$$

Tento vztah platí pro každý naměřený a extrahovaný vzorek signálu.

#### Soustava rovnic k řešení

Pro obecný počet  $P$  extrahovaných složek má kritérium pro volbu velikostí všech neznámých vektorů obecný tvar

$$J = \sum_{k=1}^P \boldsymbol{\varepsilon}_{Kk}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{Kk} + \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} = \sum_{k=1}^P r^2 \mathbf{x}_k^H \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \left( \mathbf{y}^T - \sum_{k=1}^P \mathbf{x}_k^H \mathbf{C}_k^H \right) \left( \mathbf{y} - \sum_{k=1}^P \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k \right). \quad (17)$$

Podmínka minima kritéria vyplývá z nulové derivace kritéria (17) podle každého vektoru ze skupiny  $\mathbf{x}_i^H, i = 1, \dots, P$ . Toto derivování se nazývá konjugované. Pravidla konjugovaného derivování podle vektorů lze nalézt např. v příloze monografie [Haykin 1996]. Po substituci  $\mathbf{B}_k = r^2\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{E}$  platí

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_i^H} = \mathbf{B}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{C}_i^H \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^P \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{C}_i^H \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, P. \quad (18)$$

Při úpravě posledního výrazu bylo využito vlastností prvků vektoru  $C_i$ , které jsou rovny  $\exp(j\Theta_i(n))$ . Je zřejmé, že pak platí  $C_i^H C_i = \mathbf{E}$ .

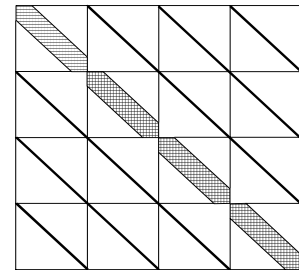
Matice soustavy rovnic (18) včetně vektoru neznámých veličin a vektoru pravé strany má následující strukturu.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^H \mathbf{C}_2 & \dots & \mathbf{C}_1^H \mathbf{C}_P \\ \mathbf{C}_2^H \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{C}_2^H \mathbf{C}_P \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C}_P^H \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_P^H \mathbf{C}_2 & \dots & \mathbf{B}_P \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_P \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1^H \mathbf{y} \\ \mathbf{C}_2^H \mathbf{y} \\ \dots \\ \mathbf{C}_P^H \mathbf{y} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Pásové matice  $\mathbf{B}_i$  s reálnými prvky jsou symetrické a pozitivně definitní a protože pro komplexní diagonální matice  $\mathbf{C}_i^H \mathbf{C}_j$  platí  $\mathbf{C}_i^H \mathbf{C}_j = (\mathbf{C}_j^H \mathbf{C}_i)^H$ , je matice  $\mathbf{B}$  soustavy rovnic (19) hermitovská. Struktura nenulových prvků matice pro  $P = 4$  je znázorněna na obrázku 2. Jednotlivé bloky jsou čtvercové matice o počtu řádků dosahujících desítek tisíc. Blokové matice na hlavní diagonále jsou pásové matice s několika nenulovými diagonálami (mezní počet několik desítek). Mimo hlavní diagonálu jsou blokové matice diagonální.

### Iterační řešení soustavy rovnic

Podle názoru expertů v oblasti lineární algebry (prof. Dostál z VŠB – TU Ostrava) je nepraktické hledat explicitní vzorce pro výpočet soustavy rovnic se strukturou naznačenou na obrázku 2, ale je výhodnější řešit tuto soustavu rovnic iteračním postupem, který bude těžit z vlastností matice soustavy. Tento postup pro Vold-Kalmanův filtr dříve navrhli také Feldbauer, Ch. & Holdrich, R. (viz seznam literatury). Iteračních metod pro řešení soustav lineárních rovnic je velmi mnoho. Monografie popisující iterační řešení soustav lineárních rovnic (Saad: Iterative Methods for Sparse Linear Systems) nebo dokumentace k Matlabu označují jako zvláště vhodnou a navíc oblíbenou metodu pro řídké pozitivně definitní symetrické matice (symmetric positive definite – SPD) matice tzv. Preconditioned Conjugate Gradient (PCG) Algorithm.



Obrázek 2 Struktura matice soustavy rovnic

Metoda PCG je kombinací metody CG (Conjugate Gradient) a techniky použití předpodmínkové matice (Preconditioner matrix). Metoda CG byla poprvé popsána autory Hestenes, M.R. & Stiefel E. v roce 1952.

V MATLABu je obsažena metoda PCG, která má různé varianty volání. Pro verzi, kdy je zadána předpodmínková matice  $\mathbf{M}$  nebo její rozklad  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$  jsou varianta volání této funkce následující

$$\mathbf{x} = \text{pcg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \text{TOL}, \text{MAXIT}, \mathbf{M}) \text{ nebo } \mathbf{x} = \text{pcg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \text{TOL}, \text{MAXIT}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$$

resp. s počátečním odhadem  $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x} = \text{pcg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \text{TOL}, \text{MAXIT}, \mathbf{M}, \mathbf{x}_0) \text{ nebo } \mathbf{x} = \text{pcg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \text{TOL}, \text{MAXIT}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{x}_0),$$

kde TOL je tolerance řešení a MAXIT je maximální počet iterací. Kromě výpočtu neznámého vektoru  $\mathbf{x}$  lze vypočítat také další parametry

$$[\mathbf{x}, \text{FLAG}, \text{RELRES}, \text{ITER}, \text{RESVEC}] = \text{pcg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \text{TOL}, \text{MAXIT}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{x}_0)$$

kde RELRES je relativní residuum  $\text{NORM}(\mathbf{b}-\mathbf{A}*\mathbf{x})/\text{NORM}(\mathbf{b})$ , přičemž  $\text{FLAG} = 0$ , jestliže RELRES je menší nebo rovno než TOL, dále je vrácena hodnota skutečného počtu iterací ITER ( $\text{ITER} \leq \text{MAXIT}$ ) a vektor residuálních norem RESVEC včetně  $\text{NORM}(\mathbf{b}-\mathbf{A}*\mathbf{x}_0)$ .

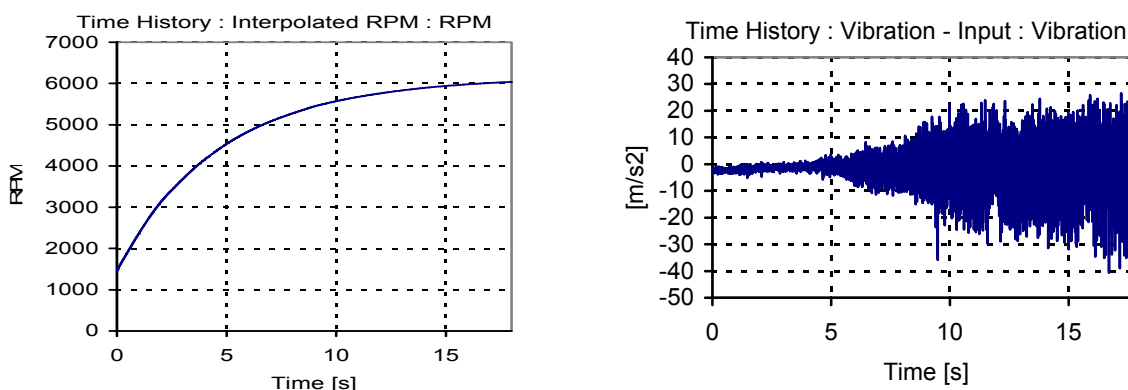
Za předpokládkou matice soustavy lze zvolit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_p \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Vzhledem k tomu, že matice  $\mathbf{B}$  je pásová a pětidiagonální, bude řešení předpokládkové soustavy  $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{b}$  snadné metodou Choleskyho rozkladu na horní a dolní trojúhelníkovou matici. Výsledek výpočtu neznámého vektoru  $\mathbf{u}$  předpokládkové soustavy rovnic je použit při hledání aproximace řešení metodou CG.

#### 4. Příklad 1

Demonstrační projekt R-UMotor.pls, který je součástí software PULSE, obsahuje měření vibrací a otáček během rozběhu motoru s průběhem znázorněným na obrázku 3.

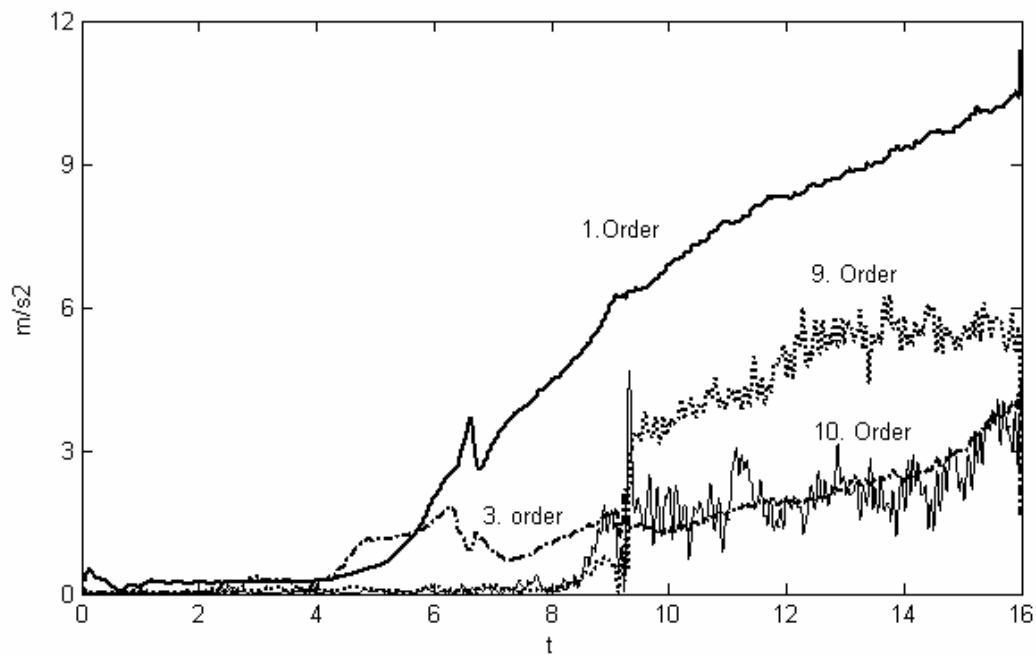


Obrázek 3 Časový průběh otáček a vibrací při rozběhu motoru

Cílem řádové analýzy bylo určit amplitudu harmonických složek, které jsou zvoleným násobkem (1, 3, 9, 10) frekvence otáček motoru.

Při řádové filtraci musí být kolem sledované frekvence ještě určité propustné pásmo, aby byl zachycen fázový a amplitudový modulační signál, který je obsažen v postranních pásmech složky. V daném příkladě byla šířka propustného pásma kolem základní harmonické složky (jednonásobek otáček) zvolena 10%. Pro vyšší násobky pak úměrně menší šířka. Data byla 100krát decimována (vykresluje se jen každý stý vzorek).

Řízení šířky propustného pásma Vold-Kalmanova filtru nebylo v tomto krátkém příspěvku popisováno, i když je již v Matlabu vypracován příslušný program. Na obrázku 4 je výsledek výpočtu Vold-Kalmanovy filtrace v prostředí Matlab.

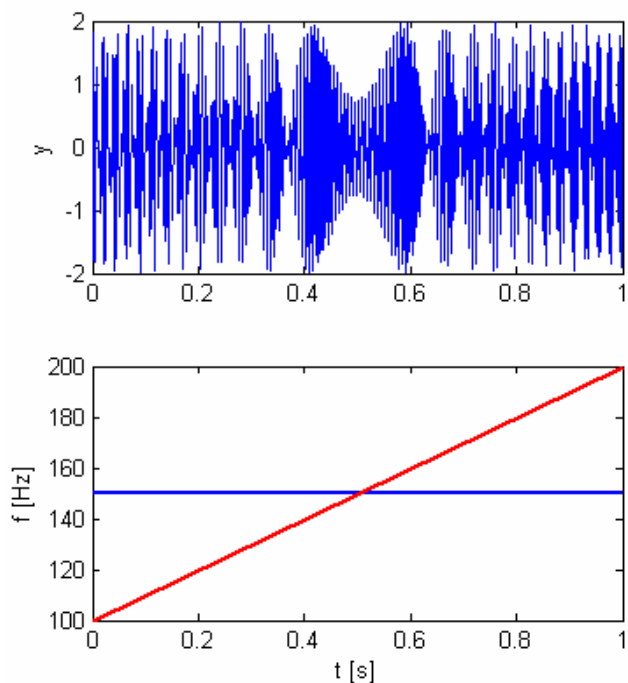


Obrázek 4 Výsledek výpočtu Vold-Kalmanovy filtrace v Matlabu

## 5. Příklad 2

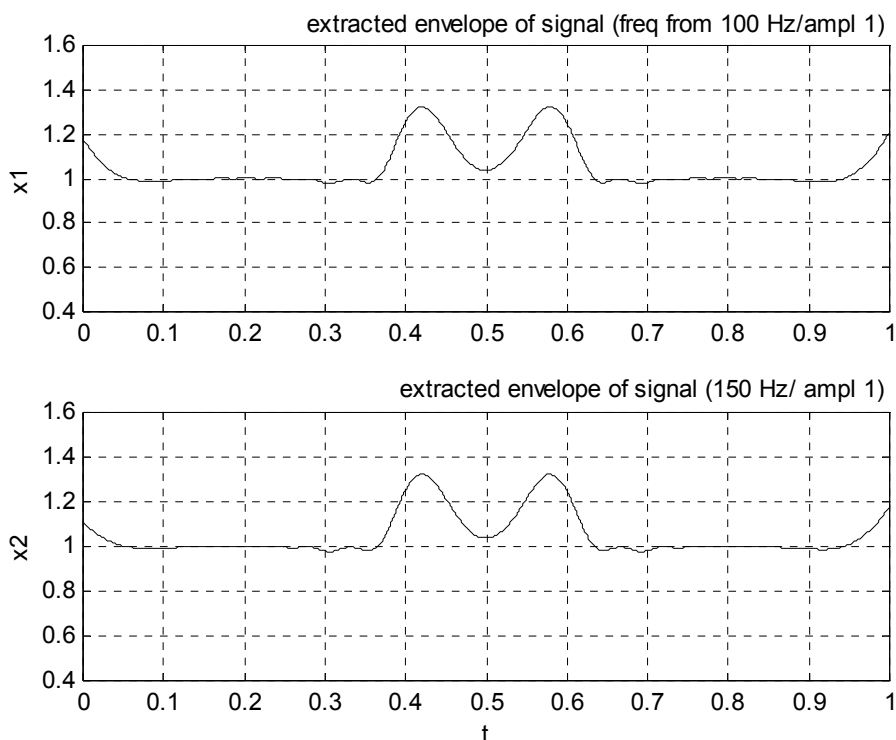
Druhý příklad je uměle vytvořen. Jedná se o součet dvou signálů  $x_1$  a  $x_2$ . První signál je harmonický s konstantní frekvencí 150 Hz. Frekvence druhého signálu se zvětšuje lineárně s časem z hodnoty 100 Hz na hodnotu 200 Hz. Amplituda obou dílčích složek signálu je jednotková a doba trvání je 1 s. Výsledný součet obou dílčích signálů obsahuje 100 vzorků. Časový průběh signálu je v horní části obrázku 5. V dolní části tohoto obrázku je časový průběh frekvencí obou dílčích složek signálu. Uprostřed záznamu se obě dílčí frekvence shodují. Tento jev se nazývá křížení řádů (order crossing). Obálka obou dílčích složek signálu je rovna jednotce.

Postupné extrahování složek signálu opakovaným výpočtem podle vzorce (14). Výsledek výpočtu je znázorněn na obrázku 6. V okolí křížování řádů, tj. času 0,5 s je obálka obou dílčích signálů zkruslena zákmitem.



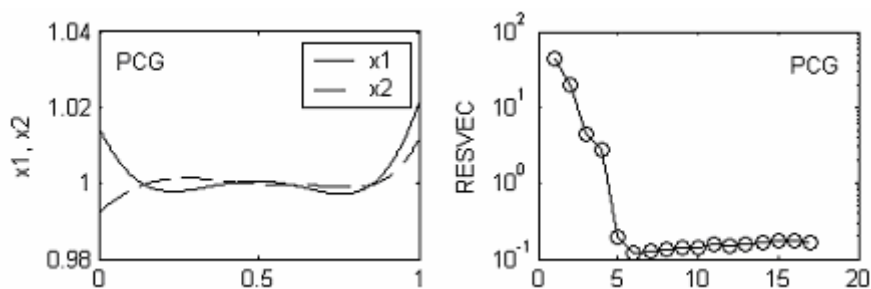
Obrázek 5 Vstupní signál pro výpočet





**Obrázek 6** Výsledek postupného výpočtu obálek dílčích složek signálu z obrázku 5

Extrahování obou složek signálu souběžně znamená řešit soustavu 2000 rovnic s maticí soustavy, která již oproti postupné extrakci dílčích složek signálu není pásová. Použitím postupu výpočtu metodou PCG lze získat výsledky znázorněné na obrázku 7. Vlevo na tomto obrázku jsou obálky obou dílčích složek signálů a vpravo je znázorněno postupné klesání reziduální chyby výpočtu v závislosti na pořadí iterace. Podle obálky je zřejmé, že chyba rozkladu je menší než 2 % na okrajích záznamu, zatímco uprostřed je chyba daleko menší.



**Obrázek 7** Výsledek souběžného výpočtu obálek dílčích složek signálu z obrázku 5

## 6. Závěr

Vold-Kalmanova filtrace je nový nástroj pro řádovou filtraci signálů z točivých strojů, u kterých je součástí záznamu také signál otáček. Úloha filtrace vede na řešení rozsáhlých soustav rovnic obsahujících až statisíce neznámých. Matlab s možností paměťově šetrného ukládání řídkých (sparse) matic je velmi vhodným prostředkem pro zpracování zmíněných signálů nebo ke studiu vlastností popsaného algoritmu.

## 7. Poděkování

Tento výzkum je prováděn na katedře Automatizační techniky a řízení VŠB Technické university v Ostravě jako část grantového projektu číslo 101/04/1530, který je podporován Grantovou agenturou České republiky.

## 8. Literatura

- Leuridan, J. & Van der Auweraer, H. & Vold, H. The analysis of non-stationary signals, LMS International, Application Notes
- Leuridan, J. & Van der Auweraer, H. & Vold, H. The analysis of non-stationary signals, Sound and Vibration, August 1994
- Vold, H. & Leuridan, J. High Resolution Order Tracking at Extreme Slew Rates, Using Kalman Tracking Filter, SAE Paper 931288, 1993
- Blough, J. R. & Brown, D.L. & Vold, H. The Time Variant Discrete Fourier Transform as an Order Tracking Method, SAE Paper 972006, 1997
- Vold, H. & Mains, M. & Brown, D.L. Theoretical Foundations for High Performance Order Tracking with Vold-Kalman Tracking Filter, SAE Paper 972007, 1997
- Vold, H. & Herlufsen, H. & Mains, M. & Corwin-Renner, D. Multi Axle Order Tracking with Vold-Kalman Tracking Filter, Sound & Vibration 1997
- Herlufsen, H. & Gade, S. & Konstantin-Hansen, H. & Vold, H. Characteristics of the Vold/Kalman Order Tracking Filter, Sound & Vibration 1997
- Gade, S. & Herlufsen, H. Konstantin-Hansen, H. & Vold, H. Characteristics of the Vold-Kalman Order Tracking Filter. Brüel & Kjaer Technical Review, No.1 - 1999.
- Haykin S. Adaptive Filter Theory, Third Edition, Prentice-Hall International, INC., New Jersey 1996, ISBN 0-13-397985-7
- Fiedler M. Speciální matice a jejich použití v numerické matematice, TKI SNTL Praha 1981
- Feldbauer, Ch. & Holdrich, R. Realisation of a Vold-Kalman Tracking Filter – A Least Square Problem, Proceedings of the COST G-6 Conference on Digital Audio Effects (DAFX-000, Verona Italy, December 7-9, 2000
- Randall, R.B. Frequency Analysis, Bruel & Kjaer, Denmark, Revision September 1987, ISBN 87-87355-07-8
- Saad, Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Editions with Corrections, January 3rd 2000.
- Hestenes, M.R. & Stiefel E. Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 49, No. 6, December 1952. Research Paper 2379.