



## EXPERIMENTAL-NUMERICAL EVALUATION OF THE SURFACE PLASTIC STRAIN EVOLUTION

Vavřík Daniel<sup>1</sup>; Jakůbek Jan<sup>2</sup>

**Summary:** The subject of this work is implementation of the incremental Prager-Ziegler plasticity theory for experimental results acquired by the “Method of Interpolated Ellipses” (MIE). The MIE is a technique based on an optical monitoring of deformations during loading processes of hexagonal grids of dots deposited on the surface of the monitored specimen. Loading deforms a circle on the specimen surface into an ellipse. Knowledge of the ellipse parameters directly yields the magnitude and the direction of principal strains. The principal strain evolution yields knowledge of evolution of the plastic strain field by numerical post processing. The commonly used power law plasticity theory has strong condition of proportional loading for its use. This condition isn't usually fulfilled for high ductile body with a stress concentrator. Therefore the incremental Prager-Ziegler plasticity theory was implemented. Evaluated increments of plastic strain field show surprising results for aluminium specimens used. Besides non-proportional plastic strain evolution, plastic work rate exhibited substantial discontinuous character.

### 1. Úvod

Metoda interpolovaných elips (MIE, dříve autorem uváděna pod názvem Metoda deformovaných kružnic) poskytuje informace o povrchových deformacích zatěžovaného tělesa (Vavřík, 1989). Z hlediska hodnocení použitelnosti různých lomově mechanických teorií je zásadní otázkou rozsah a tvar plastické deformace před čelem trhliny. Obecně se plastické deformace získávají numericky z experimentálně zjištěných celkových deformací.

S ohledem na jednoduchost zpracování a malý rozsah potřebných dat se obvykle používá deformační teorie plasticity. Její výhodou je především skutečnost, že není nutné znát celou historii zatěžování a můžeme vycházet z jediného známého stavu přetvoření. Velmi silným předpokladem deformační teorie plasticity je požadavek proporcionálního zatěžování: složky deformace  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  zůstávají v konstantním poměru, tj. nedochází k rotaci tenzoru deformace. Taková podmínka je jednoznačně splněna například u jednoosého tahového zatěžování před zaškrvcováním tyče. Podmínce proporcionálního zatěžování je velmi vzdálený případ tvárného tělesa s trhlinou, kde během zatěžování může v některých místech docházet k rotaci tenzoru deformace až o desítky stupňů. Použití deformační teorie nedává sice nutně zcela mylné

---

<sup>1</sup>ITAM CAS, Prosecka 76, 190 00, Prague 9, Czech Republic, vavrik@itam.cas.cz

<sup>2</sup>IEAP CTU, Horská 3a/22, 128 00 Prague 2, Czech Republic, jan.jakubek@utef.cvut.cz

výsledky, přesto je v takovém případě adekvátnější použít některou z přírůstkových teorií plastické deformace.

Přírůstkové teorie předpokládají dostatečný počet měření, popisujících historii zatěžování. Jistým problémem se může u některých metod stát jednoznačné přiřazení bodů tělese v následných krocích zatěžování. U použité metody MIE je toto přiřazování poměrně jednoduché, vlastní měření přitom probíhá v reálném čase zatěžování. Ze známých modelů byla vybrána Prager-Zieglerova teorie, která se běžně používá pro kovové materiály.

## 2. Princip MIE

Vymežeme na povrchu zatěžovaného tělesa kružnici o poloměru  $r$ . Za předpokladu, že je deformace uvnitř této kružnice přibližně homogenní, změní se po zatížení tělesa v elipsu. Každá elipsa je interpolována šesti body hexagonální mřížky, která byla nanášena na povrch zkoumaného vzorku. Znalost parametrů elipsy přímo určuje velikost a směr hlavních prodloužení na povrchu vzorku:

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{a}{r}, \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{b}{r}, \quad (1)$$

kde  $a, b$  představují velikost hlavní a vedlejší poloosy. Vzhledem k velkým přetvořením je použita formulace logaritmické deformace a nikoliv inženýrské.

Během experimentu jsou vhodným záznamovým zařízením sledovány deformace hexagonální mřížky. Při zpracování záznamu experimentu se postupuje následujícím způsobem (Vavřík, 1999):

1. Výběr snímků určených ke zpracování. V případě analogového záznamu jejich digitalizace.
2. Zvýšení kontrastu a odstranění nežádoucího pozadí obrázku vůči mřížce.
3. Nalezení středů „bodů“ mřížky.
4. Interpolace elips šesticemi body mřížky. Každý bod mřížky slouží pro šest sousedících elips.
5. Výpočet hlavních prodloužení (1).
6. Vyhodnocení intenzity plastických deformací a rychlosti plastické práce (, viz. níže.

## 3. Implementace přírůstkové Prager-Zieglerovy teorie plasticity do metody MIE

Vzhledem k tomu, že metodou MIE zjišťujeme přímo hlavní prodloužení, jsou odpovídající vztahy po příslušných úpravách relativně jednoduché a snadno aplikovatelné. V práci Vavřík et. al. 2004 byl přijat zjednodušující předpoklad, že se zatížení mezi jednotlivými zatěžovacími stavy odehrává proporcionalně (to je ekvivalentní náhradě křivky lomenou čarou). Tentýž předpoklad byl přijat při hledání počáteční plochy plasticity .

Předpokládejme pro povrch plochého vzorku rovinnou napjatost, pak:  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ . Je třeba zdůraznit, že vyhodnocujeme plasticitu pouze v povrchové vrstvě. Dále předpokládejme platnost přírůstkové Prager-Ziegler teorie plasticity s izotropním zpevněním (pro monotónní tahové zatížení je tento typ zpevněování použitelný i pro Al

slitiny). K první plastické deformaci dojde, když funkce plasticity  $f$  dosáhne von Misesova napětí  $\sigma_y$ :

$$f = \sigma_y = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 + \nu \cdot \varepsilon_1)^2 - (\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \nu \cdot \varepsilon_1) \right]^{1/2}, \quad (2)$$

kde  $\sigma_1, \sigma_2$  jsou hlavní napětí,  $E$  je elastický modul,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  jsou hlavní prodloužení a  $\nu$  je Poissonovo číslo. Hlavní prodloužení  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  přitom známe z experimentálních výsledků MIE. Vztah (2) je znám jako von Misesovo kritérium. Vztah *napětí-elasto plastická deformace* pro rovinnou napjatosti v přírůstkové formě je pak možné zapsat jako:

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= \frac{E(1 + \alpha E \cdot s_{22}^2)}{(1 + \alpha E \cdot s_{11}^2)(1 + \alpha E \cdot s_{22}^2) - (\nu - \alpha E \cdot s_{11}s_{22})^2} \left[ d\varepsilon_1 + \left( \frac{\nu - \alpha E \cdot s_{11}s_{22}}{1 + \alpha E \cdot s_{22}^2} \right) d\varepsilon_2 \right] \\ d\sigma_2 &= \frac{E(1 + \alpha E \cdot s_{11}^2)}{(1 + \alpha E \cdot s_{22}^2)(1 + \alpha E \cdot s_{11}^2) - (\nu - \alpha E \cdot s_{11}s_{22})^2} \left[ d\varepsilon_2 + \left( \frac{\nu - \alpha E \cdot s_{11}s_{22}}{1 + \alpha E \cdot s_{11}^2} \right) d\varepsilon_1 \right], \end{aligned} \quad (3)$$

kde  $d\sigma_i$  jsou přírůstky hlavních napětí,  $s_{ii}$  je tenzor deviátoru napětí a  $\alpha$  je funkce zpevnování. V elastické lineární oblasti zatěžování platí tvar:

$$\sigma_i = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_i + \nu \cdot \varepsilon_j] \quad (4)$$

Přírůstky plastické deformace jsou definovány ve tvaru:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{1p} &= \alpha (s_{11}^2 \cdot d\sigma_{11} + s_{11}s_{22} \cdot d\sigma_2) \\ d\varepsilon_{2p} &= \alpha (s_{22}^2 \cdot d\sigma_{22} + s_{11}s_{22} \cdot d\sigma_1). \\ d\varepsilon_{3p} &= -(d\varepsilon_{1p} + d\varepsilon_{2p}) \end{aligned} \quad (5)$$

Přírůstek intenzity plastické deformace je dán v době známém tvaru:

$$d\varepsilon_{ip} = \sqrt{2/3} \cdot \sqrt{d\varepsilon_{1p}^2 + d\varepsilon_{2p}^2 + d\varepsilon_{3p}^2}. \quad (6)$$

Celková plastická deformace je počítána jako suma všech přírůstků plastické deformace dosažených během historie zatěžování:

$$\varepsilon_{ip} = \sum_{n=1}^m d\varepsilon_{ip}. \quad (7)$$

Na dané zatěžovací hladině není téměř nikdy von Misesovo napětí  $\sigma_y$  (2) dosaženo přesně. Na první zatěžovací hladině proto musí být testováno, v kterých buňkách funkce plasticity překročila von Misesovo napětí  $\sigma_y$ . Předpokládejme, že při dosahování první zatěžovací hladiny je první hlavní prodloužení  $\varepsilon_1$  v konstantním poměru vůči druhému hlavnímu prodloužení  $\varepsilon_2$ . Pak můžeme psát:

$$\varepsilon_2 = k \cdot \varepsilon_1. \quad (8)$$

Poměr  $k$  v dané buňce je určován z experimentálně zjištěných hlavních prodloužení v dané buňce. Tento poměr je konstantní pouze mezi jednotlivými zatěžovacími hladinami a během

zatěžování se mění (tj. se jedná o náhradu funkce lomenou čarou). Rovnici (2) můžeme tedy přepsat do tvaru::

$$\sigma_y = \frac{E \cdot \bar{\varepsilon}_1}{1 - \nu^2} \left[ (1 + \nu \cdot k)^2 + (k + \nu)^2 - (1 + \nu \cdot k)(k + \nu) \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Nyní si vyjádříme hlavní prodloužení  $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2$  tak, aby bylo dosaženo přesně von Misesova napětí  $\sigma_y$ :

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{(1 - \nu^2) \cdot \sigma_y}{E} \left[ (1 + \nu \cdot k)^2 + (k + \nu)^2 - (1 + \nu \cdot k)(k + \nu) \right]^{1/2}. \quad (10)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = k \cdot \bar{\varepsilon}_1$$

Odpovídající hlavní napětí  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$  jsou definována jako:

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{E \bar{\varepsilon}_1}{1 - \nu^2} (1 + k \cdot \nu) \quad (11)$$

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{E \bar{\varepsilon}_1}{1 - \nu^2} (k + \nu)$$

Nyní se můžeme výpočtem vrátit na experimentálně naměřené hodnoty hlavních prodloužení  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , a s přírůstky hlavních prodloužení ve tvaru:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1 \\ d\varepsilon_2 &= k \cdot d\varepsilon_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Jelikož je funkce zpevnování  $\alpha$  v blízkosti meze kluzu silně nelineární, jsou přírůstky hlavních prodloužení (12) formálně rozděleny na 100 dílů. Výsledné složky hlavních napětí  $\sigma_1, \sigma_2$  jsou pak složeny z  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$  (11) a ze sumy přírůstků definovaných rovnicí (3). Podobný postup je použit i v následujících zatěžovacích hladinách, kdy je von Misesova podmínka testována pouze v buňkách, které se v předchozích hladinách deformovaly elasticky. V buňkách, ve kterých došlo k plastizaci i v předchozích krocích je testována podmínka plastické deformace:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = s_{11} \cdot d\sigma_1 + s_{22} \cdot d\sigma_2 > 0. \quad (13)$$

Pokud není podmínka splněna, přejde rovnice (3) do tvaru:

$$d\sigma_i = \frac{E}{1 - \nu^2} [d\varepsilon_i + \nu \cdot d\varepsilon_j]. \quad (14)$$

Přírůstek hustoty plastické deformační energie v dané buňce je definován jako (Lee at. all. 1996):

$$d\phi = \alpha (\sigma_1 s_{11}^2 d\sigma_1 + \sigma_2 s_{22}^2 d\sigma_2 + \sigma_1 s_{11} s_{22} d\sigma_2 + \sigma_2 s_{11} s_{22} d\sigma_1). \quad (15)$$

Celková hustota plastické deformační energie v dané buňce je počítána jako suma přírůstků získaných během zatěžování:

$$\phi = \sum_{n=1}^m d\phi. \quad (16)$$

Lokální rychlost uvolňování plastické energie (local plastic work rate) pro danou buňku je určena ze známých experimentálních časů jednotlivých zatěžovacích hladin L:

$$\dot{\phi} = \frac{\phi_L - \phi_{L-1}}{t_L - t_{L-1}}. \quad (17)$$

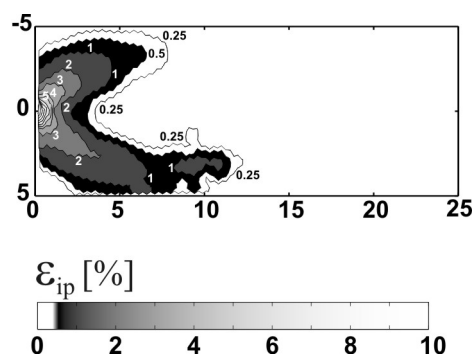
Specifická rychlost uvolňování plastické energie (specific plastic work rate) je definována jako suma lokální rychlosti (17) přes všechny buňky, dělená počtem buněk.

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{k \cdot l} \cdot \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^l \dot{\phi}_{rs}. \quad (18)$$

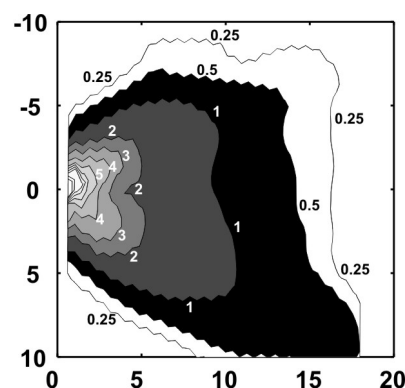
#### 4. Experimentální výsledky

Na výrobu vzorků byla použita slitina hliníku (dural) ČSN 42 42 03.6. Experimenty byly uskutečněny na dvou typech plochých vzorků s vyjiskřenou trhlinou (koncentrátorem) o šířce 0.2 mm: vzorek s centrální trhlinou, nadále označený jako CC a vzorek s okrajovou trhlinou, nadále označený jako SE. Tyto dva typy vzorků mají významně rozdílné hodnoty stísnění, které můžeme charakterizovat  $T$  napětím. Vzorek CC má záporné stísnění  $T/\sigma_y = -1$  a vzorek SE má stísnění blízké nule  $T/\sigma_y \cong 0$ . Můžeme proto očekávat rozdílné velikosti plastické zóny před čelem trhliny. Vzorky byly zatěžovány konstantním posuvem 0.01 mm/s (Zemánková at. al. 1999).

V rámci řešení byl vyhodnocován rozvoj plastické deformace. Příklady uvádí obr. 1 a 2, kde jsou zobrazeny plastické zóny pro oba rozdílné vzorky těsně před lomem. Je velmi dobře vidět, že rozsah a tvar plastické zóny jsou pro oba vzorky zásadně odlišné, v souladu s předpokladem o vlivu stísnění na rozvoj plastické deformace.

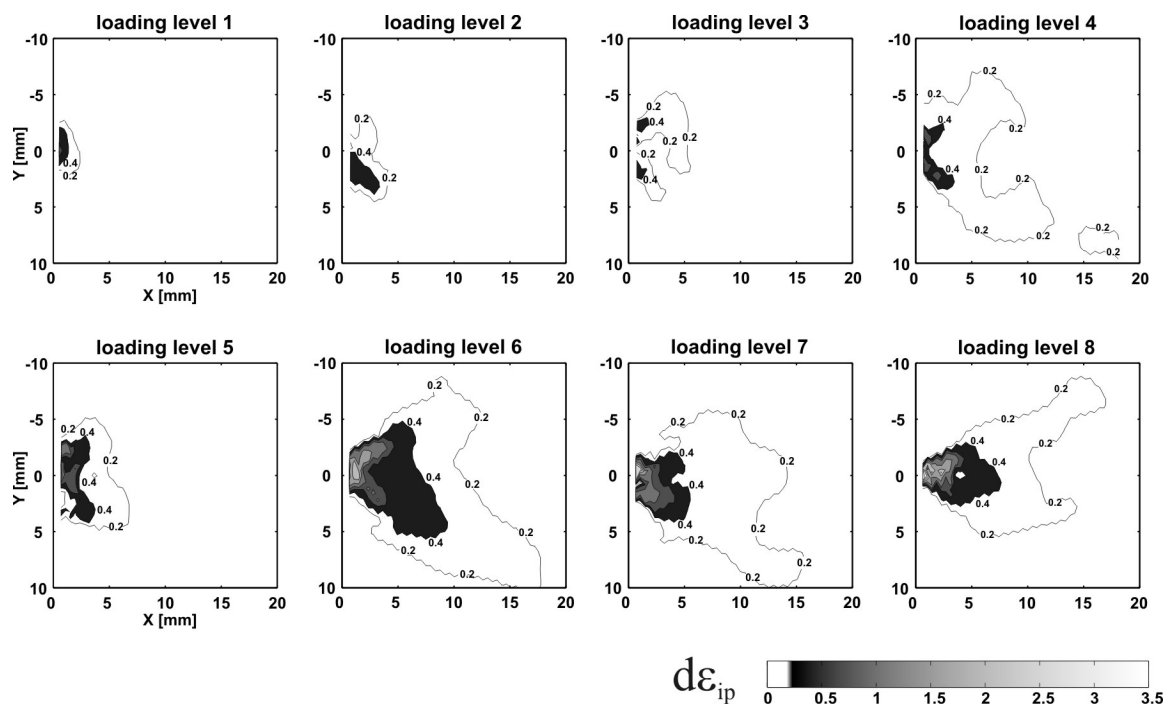


**Obr. 1.:** Plastická zóna u vzorku SE se v okamžiku nestability trhliny rozvinula zhruba do poloviny ligamentu. Osy mají mm měřítko, souřadnice [0,0] odpovídá čelu trhliny. Kontury představují úroveň plastické deformace v %.



**Obr. 2:** Plastická zóna u vzorku CC se v okamžiku nestability trhliny rozvinula téměř až k okraji ligamentu.

Přírůstky plastické deformace pro vzorek CC jsou zobrazeny na obr. 3. Přírůstky plastické deformace, odpovídající jednotlivým konstantním přírůstkům zatížení posuvem, se ukázaly

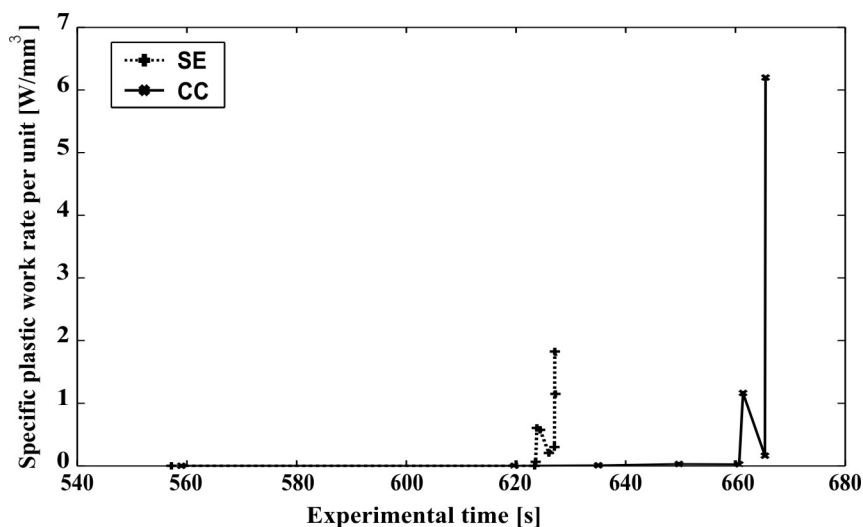


**Obr. 3:** Přírůstky plastické deformace v jednotlivých zatěžovacích hladinách pro vzorek CC.

jako překvapivě nestejněměrné a to jak v intenzitě tak ve tvaru plastické zóny. Tato skutečnost není v případě rozvoje celkové plastické deformace na obrázcích příliš zřetelná.

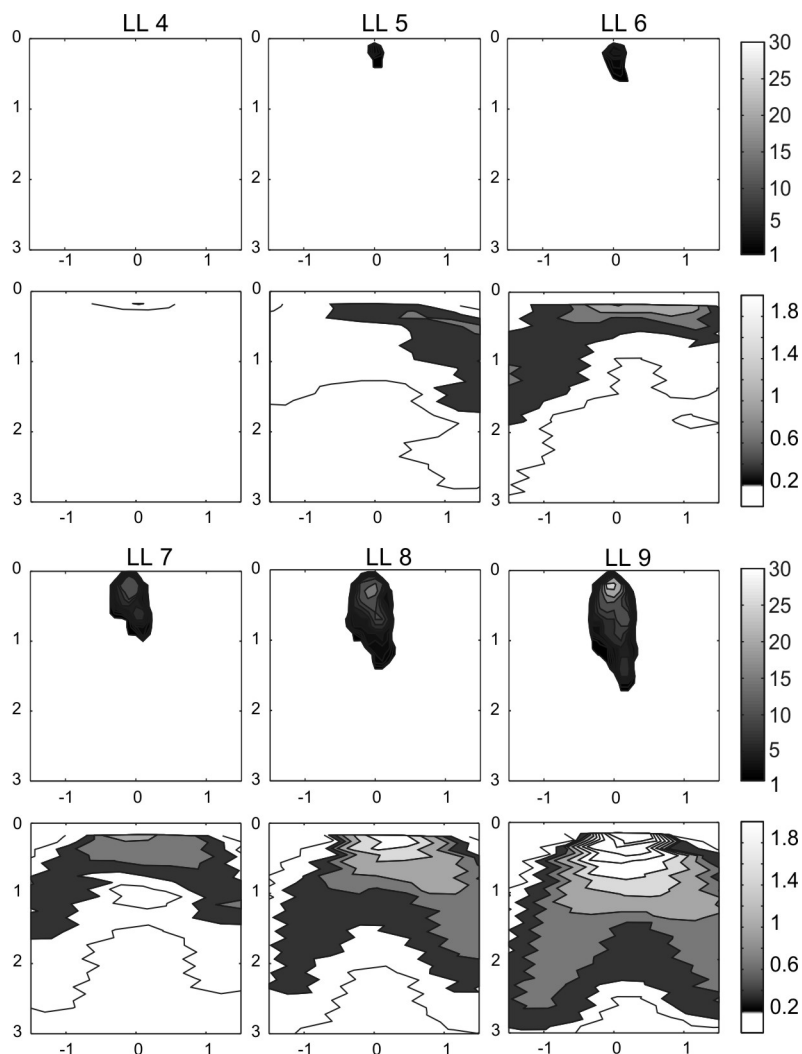
V závěrečné fázi zatěžování se těsně před růstem trhliny ukázalo, že se nejvýraznější přírůstky plastické deformace odehrávají před čelem trhliny, v její rovině. Známý „motýlek“ přitom zmenšuje svůj úhel. Tento jev naznačuje existenci zóny poškození před čelem trhliny, uvnitř vzorku.

Nestejněměrnost přírůstků plastické deformace se výrazně projevuje na vyhodnocené specifické rychlosti uvolňování plastické energie, viz. obr. 5. První extrém odpovídá okamžiku dosažení maximální zatěžovací síly, druhý pak okamžiku růstu nové trhliny (Vavřík et al., 2004).



**Obr. 4:** Závislost rychlosti uvolňování plastické energie na čase pro vzorek SE (tečkovaně) i pro vzorek CC (plná čára).

Výše zmíněné příznaky existence zóny poškození byly potvrzeny metodou X-ray Dynamic Defectoscopy (XRDD, Vavrik et. al. 2003). V souvisejícím experimentu byl vzorek zatěžován kvazistaticky ve speciálním zatěžovacím rámu. Na obr. 5 je zobrazen rozvoj přírůstků plastické deformace, spolu s rozvojem zóny poškození pro vzorek SE.



**Obr. 5:** Horní obrázek v každém páru představuje rozvoj zóny poškození, dolní pak přírůstky plastické deformace v jednotlivých zatěžovacích hladinách (LL). Všechny snímky mají mm měřítko.

## 5. Závěry

Implementace přírůstkové Prager-Zieglerovy teorie do MIE přinesla několik nových informací. Především ukázala překvapivou neregulárnost rozvoje přírůstků plastické deformace přes to, že byl vzorek zatěžován konstantním posuvem.

Rozsah a tvar plastické zóny jsou pro oba typy vzorků zásadně odlišné, v souladu s předpokladem vlivu stlačení na rozvoj plastické deformace.

Neregulárnost přírůstků plastické deformace se zřetelně projevila v závislosti rychlosti uvolňování plastické energie na čase. Tato závislost vykazuje dva výrazné extrémny, první

odpovídá okamžiku dosažení maximální zatěžovací síly, druhý pak okamžiku růstu nové trhliny.

Nerovnoměrný rozvoj zóny poškození je doprovázen nerovnoměrným rozvojem přírůstků plastické deformace. Prudký nárůst intenzity poškození (objemového podílu poškození) je doprovázen adekvátním rozvojem intenzity plastické deformace před čelem trhliny (v místě maximální hydrostatické napjatosti).

## **6. Poděkování**

Práce vznikla za podpory grantů 106/04/0567 a 101/03/0731 Grantové agentury České Republiky.

## **7. Literatura**

Vavrik, D.: "Optical Identification of Surface Plastic Zone Shape and Size Near Crack Tip", *Ph.D. Thesis, Czech Technical University, Prague, 1999.*

Vavrik, D., Zemankova, J.: "Identification of the Plastic Zones by the Method of Deformed Circles." *Experimental Mechanics, in Print., 2004*

Zemankova, J., et al.: "Thermodynamical Concept of Fracture Mechanics", Final report of Grant No 106/95/1433 GACR, ITAM CAS Prague, 1998.

Vavrik, D.; Jakubek, J; Pospisil, S.; Visschers, J.: " Non-destructive Observation of Damage Processes in Loaded High Ductile Specimens by X Ray Dynamic Defectoscopy and its Relation to Plastic Strain Increments", *Book of Abstracts, Aphys 2003, 13-18<sup>th</sup> October 2003, Badajoz, Spain. To be published in Materials Science Forum.*

Lee, D. J., Liebowitz, H., Lee, K.Y.: "The Quest of a Universal Fracture Law governing the process of Slow Crack Growth," *Engineering Fracture Mechanics, 55, pp.61-83, 1996.*