

INVESTIGATION OF INFLUENCE OF ASSYMETRY IN THE CASE OF VIBRATION OF RESILIENTLY SUPPORTED AND COUPLED THREE RIGID PLATES – APPLICATION ON THE VEHICLE VIBRATIONS I

J. Volek¹, J. Soukup², B. Skočilasová³

Summary: *In relation of previously papers published on conference IM 2001 – 2003, the influence of asymmetry of the vibration of three rigid plates resiliently supported and coupled, forced by kinematical excitation was investigated - (9 DOF Spring-mass-system).*

V příspěvku navazujícím na předcházející [1], v nichž byl řešen vliv nesymetrie při vynuceném kmitání prostorově pružně uložené tuhé desky jako modelu dvounápravového kolejového vozidla s jednoduchým nebo vícenásobným primárním lineárním vypružením šroubovými pružinami, jsou odvozeny pohybové rovnice kinematicky buzené soustavy tří tuhých těles prostorově pružně uložených a vázaných jako modelu podvozkového kolejového vozidla s primárním a sekundárním lineárním vypružením s uvažováním vlivu nesymetrie.

Nejjednodušší výpočtový model podvozkového vozidla, viz. obr. č. 1 – dvounápravové podvozky s jednoduchým primárním vypružením a jednoduché odpružení skříně vozidla. U modelů podvozků – tuhé desky o hmotě m_1 a m_2 je uvažována symetrie rozložení hmoty, tj. poloha těžiště je totožná s geometrickým centrem, hlavní centrální osy setrvačnosti jsou totožné s osami geometrické symetrie. Je uvažována nesymetrie parametrů tuhosti pružin a jejich geometrického uložení.

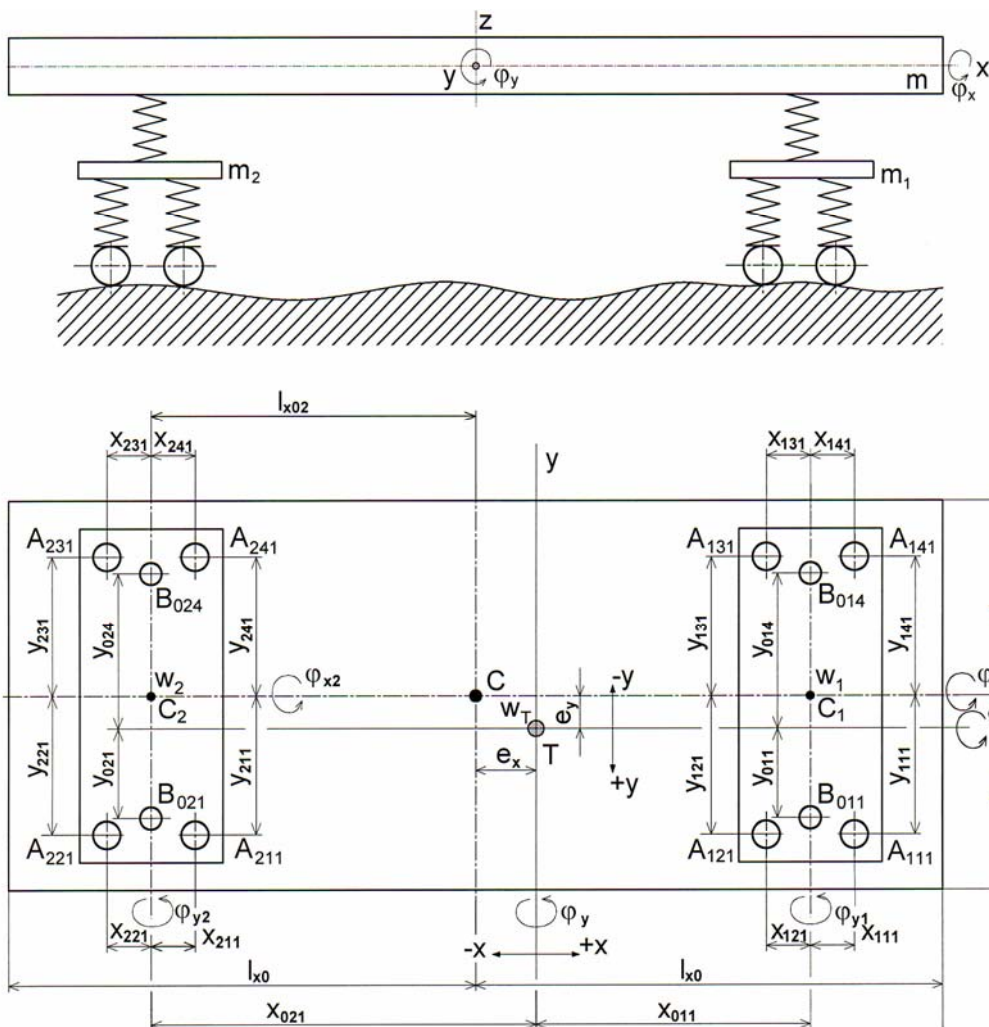
U modelu skříně vozidla a tuhé desky o hmotě m , je uvažováno nesymetrické rozložení hmoty, tj. poloha těžiště je vychýlena o e_x a e_y z geometrického centra, hlavní centrální osy setrvačnosti jsou natočeny vzhledem k osám geometrické souměrnosti. Je uvažována rozdílnost parametrů tuhosti a geometrie uložení sekundárního vypružení.

Řešení je provedeno na základě obecných předpokladů : tuhost těles, malé posuvy a pootočení, lineární charakteristiky pružin a dále za předpokladu, že je uvažován jen vertikální posuv libovolného bodu jednotlivých těles, tj. vertikální změna polohy libovolného bodu tělesa je určena posuvem těžiště tělesa – w , w_1 , w_2 a posuvem bodu vzniklým pootočením φ_x a φ_y , φ_{x1} a φ_{y1} , φ_{x2} a φ_{y2} kolem centrálních os setrvačnosti jednotlivých hmot m , m_1 , m_2 a jeho vzdálenosti od těchto os. Jedná se tedy o soustavu těles o devíti stupních volnosti.

¹ PhDr. Ing. Jan Volek, Staňkovice 7, 412 01 Litoměřice

² Ing. Josef Soukup, CSc., Ústav techniky a řízení výroby UJEP, Na Okraji 1001, 400 96 Ústí n. L., e-mail: soukupi@utrv.ujep.cz

³ Ing. Blanka Skočilasová, Rabasova 421, 400 11 Ústí n. L., e-mail: t.ec@volny.cz



Obr. 1 Schéma vyšetřovaného modelu

Pohybové rovnice jsou odvozeny pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu. Proto je třeba určit kinetickou E_k a potenciální E_p energii kmitající soustavy.

Kinetická energie soustavy

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{w}^2 + \frac{1}{2} (J_x \dot{\phi}_x^2 + J_y \dot{\phi}_y^2 - 2D_{xy} \dot{\phi}_x \dot{\phi}_y) + \frac{1}{2} m_1 \dot{w}_1^2 + \frac{1}{2} J_{x1} \dot{\phi}_{x1}^2 + \frac{1}{2} J_{y1} \dot{\phi}_{y1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{w}_2^2 + \frac{1}{2} J_{x2} \dot{\phi}_{x2}^2 + \frac{1}{2} J_{y2} \dot{\phi}_{y2}^2 \quad (1)$$

kde J_x, J_y jsou momenty setrvačnosti a D_{xy} deviační moment k centrálním osám setrvačnosti skříně o hmotnosti m , J_{x1} a J_{y1} , resp. J_{x2} a J_{y2} momenty setrvačnosti k hlavním centrálním osám setrvačnosti podvozků o hmotnosti m_1 , resp. m_2 .

Pro určení potenciální energie soustavy E_p je třeba určit posuvy jednotlivých hmot v místech jejich pružného uložení, resp. v místech jejich pružné vazby.

V případě modelů podvozků systém označení bodů A_{jki} , jejich souřadnic x_{jki} , y_{jki} , vertikálních posuvů w_{jki} a konstant tuhosti pružin k_{jki} odpovídá hmotám $j = 1,2$, kvadrantům $k = 1,2,3,4$ a pořadí pružin $i = 1, \dots$ - pro případ vícenásobného uložení.

Podobně je označena vertikální změna h_{jki} v místě uložení pružiny v tuhém základu, k němuž se poloha tělesa vztahuje – kinematické buzení, přejezd přes překážku.

Posuvy jednotlivých bodů podvozků

Bod	vertikální posuv	konstanta tuhosti
Těleso m_1	$j = 1$	
A_{111}	$w_{111} = w_1 - y_{111}\varphi_{x1} + x_{111}\varphi_{y1} - h_{111}$	k_{111}
A_{121}	$w_{121} = w_1 - y_{121}\varphi_{x1} - x_{121}\varphi_{y1} - h_{121}$	k_{121}
A_{131}	$w_{131} = w_1 + y_{131}\varphi_{x1} - x_{131}\varphi_{y1} - h_{131}$	k_{131}
A_{141}	$w_{141} = w_1 + y_{141}\varphi_{x1} + x_{141}\varphi_{y1} - h_{141}$	k_{141}

(2a)

Těleso m_2	$j = 2$	
A_{211}	$w_{211} = w_2 - y_{211}\varphi_{x2} + x_{211}\varphi_{y2} - h_{211}$	k_{211}
A_{221}	$w_{221} = w_2 - y_{221}\varphi_{x2} - x_{221}\varphi_{y2} - h_{221}$	k_{221}
A_{231}	$w_{231} = w_2 + y_{231}\varphi_{x2} - x_{231}\varphi_{y2} - h_{231}$	k_{231}
A_{241}	$w_{241} = w_2 + y_{241}\varphi_{x2} + x_{241}\varphi_{y2} - h_{241}$	k_{241}

(2b)

V případě modelu skříně s jednoduchým odpružením jedinou pružinou v ose příslušného podvozků nelze k označení jednotlivých bodů působit pružin použít rozdělení na kvadranty: Označení bodů, souřadnic a konstant tuhosti : B_{jki} , x_{jki} , y_{jki} , k_{jki} , $j = 0$ skříně, hmota m , $k = 1,2$ označení příslušného podvozků 1, resp. 2, $i = 1,4$ příslušnost k polovině bodu A_{111} , resp. A_{141}

Posuvy jednotlivých bodů skříně

Bod	vertikální posuv	konstanta tuhosti
B_{011}	$w_{011} = w - y_{011}\varphi_x + x_{011}\varphi_y - w_1 + (y_{011} + e_y)\varphi_{x1}$	k_{011}
B_{014}	$w_{014} = w + y_{014}\varphi_x + x_{014}\varphi_y - w_1 - (y_{014} - e_y)\varphi_{x1}$	k_{014}
B_{021}	$w_{021} = w - y_{021}\varphi_x - x_{021}\varphi_y - w_2 + (y_{021} + e_y)\varphi_{x2}$	k_{021}
B_{024}	$w_{024} = w + y_{024}\varphi_x - x_{024}\varphi_y - w_2 - (y_{024} - e_y)\varphi_{x2}$	k_{024}

(3)

Potenciální energie modelů podvozků m_1 a m_2 a modelu skříně m

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^{k_j} k_{jki} w_{jki}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0} \sum_{k=1,2} \sum_{i=1,4} k_{jki} w_{jki}^2 \quad (4)$$

Po dosazení kinetické energie E_k (1) a potenciální energie E_p (4) do Lagrangeových rovnic druhého druhu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = Q_j \quad (5)$$

kde zobecněné souřadnice q_j pro $j = 1$ až 9

$$q_j = w, w_1, w_2, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{x2}, \varphi_{y2} \quad (5a)$$

a Q_j jsou zobecněné síly, včetně kinematického buzení.

Po dosazení vztahů (2) a (3) do rovnice (5) upravené vztahy (1) a (4) a po provedení příslušných derivací podle jednotlivých souřadnic se získají pohybové rovnice v maticovém tvaru (6):

$$\begin{pmatrix} J_x & -D_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_{xy} & J_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{x1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{y1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{y2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{w} \\ \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{\varphi}_{x1} \\ \ddot{\varphi}_{y1} \\ \ddot{\varphi}_{x2} \\ \ddot{\varphi}_{y2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} & \kappa_{14} & \kappa_{15} & \kappa_{16} & 0 & \kappa_{18} & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} & \kappa_{24} & \kappa_{25} & \kappa_{26} & 0 & \kappa_{28} & 0 \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} & \kappa_{34} & \kappa_{35} & \kappa_{36} & 0 & \kappa_{38} & 0 \\ \kappa_{41} & \kappa_{42} & \kappa_{43} & \kappa_{44} & 0 & \kappa_{46} & \kappa_{47} & 0 & 0 \\ \kappa_{51} & \kappa_{52} & \kappa_{53} & 0 & \kappa_{55} & 0 & 0 & \kappa_{58} & \kappa_{59} \\ \kappa_{61} & \kappa_{62} & \kappa_{63} & \kappa_{64} & 0 & \kappa_{66} & \kappa_{67} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_{74} & 0 & \kappa_{76} & \kappa_{77} & 0 & 0 \\ \kappa_{81} & \kappa_{82} & \kappa_{83} & 0 & \kappa_{85} & 0 & 0 & \kappa_{88} & \kappa_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_{95} & 0 & 0 & \kappa_{98} & \kappa_{99} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ w \\ w_1 \\ w_2 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{pmatrix} \quad (6)$$

kde jednotlivé prvky matice tuhosti κ_{ij} jsou funkcemi konstant tuhosti k_{jki} a rozměrů geometrie uložení x_{jki} , y_{jki} a excentricity e_x a e_y – viz. obr. 1. Funkce Q_i na pravé straně soustavy (6) jsou funkcemi konstant tuhosti pružin podvozků k_{jki} a funkcemi převýšení v čase (t) a v místě uložení pružin kol [2].

Funkce pravé strany rovnice (6), kinematického buzení jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0 & Q_2 &= 0 & Q_3 &= 0 \\ Q_4 &= k_{111}h_{111} + k_{121}h_{121} + k_{131}h_{131} + k_{141}h_{141} \\ Q_5 &= k_{211}h_{211} + k_{221}h_{221} + k_{231}h_{231} + k_{241}h_{241} \\ Q_6 &= -k_{111}h_{111}y_{111} - k_{121}h_{121}y_{121} + k_{131}h_{131}y_{131} + k_{141}h_{141}y_{141} \\ Q_7 &= k_{111}h_{111}x_{111} - k_{121}h_{121}x_{121} - k_{131}h_{131}x_{131} + k_{141}h_{141}x_{141} \\ Q_8 &= -k_{211}h_{211}y_{211} + k_{221}h_{221}y_{221} - k_{231}h_{231}y_{231} + k_{241}h_{241}y_{241} \\ Q_9 &= k_{211}h_{211}x_{211} - k_{221}h_{221}x_{221} - k_{231}h_{231}x_{231} + k_{241}h_{241}x_{241} \end{aligned}$$

Kde funkce $h_{jki} = h_{jki}(t)$ určují tvar časové funkce kinematického buzení v jednotlivých místech náprav a jejich následnost.

Pro další řešení, formulaci jeho postupu, vytvoření vhodného algoritmu pro počítačové zpracování z důvodu zobecnění řešení soustavy (6) je třeba ji upravit do tvaru

$$(\mathbf{E} + \mathbf{S})\ddot{y}_i + \mathbf{K} \cdot y_i = F_i(t) \quad (7)$$

kde prvky s_{ij} matice hmotnosti \mathbf{S} jsou dány vztahy $s_{11}=s_{22}=0$, $s_{ij}=0$ pro $i = 3, \dots, 9; j = 3, \dots, 9$
 $s_{12} = -D_{xy}/J_x$, $s_{21} = -D_{xy}/J_y$ určují vliv nesymetrického rozložení hmoty, tj. natočení hlavních centrálních os setrvačnosti vzhledem k centrálním osám rovnoběžným s osami geometrické symetrie tělesa – desky, vozidla. Podobně se určí prvky a_{ij} matice \mathbf{K} dělením i -tého řádku matice tuhosti i -tým prvkem na diagonále matice setrvačnosti. Obdobně jsou určeny budící funkce času $F_i(t)$ z funkcí $Q_i(t)$.

Podobně jsou nově označeny hledané veličiny $\varphi_x(t) \rightarrow y_1(t)$, $\varphi_y(t) \rightarrow y_2(t)$, $w(t) \rightarrow y_3(t)$,
 $w_1(t) \rightarrow y_4(t)$, $w_2(t) \rightarrow y_4(t)$, $\varphi_{x1}(t) \rightarrow y_5(t)$, $\varphi_{y1}(t) \rightarrow y_6(t)$, $\varphi_{x2}(t) \rightarrow y_7(t)$,
 $\varphi_{y2}(t) \rightarrow y_9(t)$. Prvky a_{ij} matice \mathbf{K} a vektor budících sil jsou z důvodů obecnosti voleny $a_{ij} \neq 0$
a $F_i(t) \neq 0$

Řešení soustavy nehomogenních diferenciálních rovnic (7) je možno získat některou z numerických metod, analytické řešení je možno provést aplikací maticového počtu nebo Lagrangeovou metodou variace konstant či aplikací Laplaceovy transformace. Touto metodou se po transformaci získá pro nulové počáteční podmínky soustava lineárních algebraických rovnic [2].

$$[(\mathbf{E} + \mathbf{S})p^2 + \mathbf{K}]\bar{y}_i(p) = F_i(p) \quad (8)$$

kde $\bar{y}_i(p)$ a $\bar{F}_i(p)$ jsou obrazy funkcí $y_i(t)$ a $F_i(t)$ pro $i = 1$ až 9. Řešení soustavy lineárních algebraických rovnic (8) je vhodné provést Cramerovým pravidlem

$$\bar{y}_j(p) = \frac{D_j(p)}{D(p)} = \sum_{i=1}^{n=9} (-1)^{j-i} \bar{F}_i(p) \cdot \frac{D_{ji}(p)}{D(p)} \quad (9)$$

kde $D(p)$ - determinant matice soustavy rovnic (8) se rovná

$$D(p) = C_A \sum_{i=0}^n A_{2(n-i)} \cdot p^{2(n-i)} \quad \text{pro } n = 9$$

kde $C_A = 1 - s_{12} \cdot s_{21}$. Pro reálné koeficienty $A_{2(n-i)}$ byly odvozeny vztahy [2], které platí obecně pro $n \geq 2$ a $0 \leq i < n$

$$A_{2(n-i)} = 1 \quad A_{2(n-1)} = C_A^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ii} - s_{12} a_{21} - s_{21} a_{12} - s_{12} s_{21} \cdot \sum_{i=3}^n a_{ii} \right\}$$

$$A_{2(n-2)} = C_A^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} - \sum_{i=3}^n \left(s_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{2i} \\ a_{i1} & a_{ii} \end{vmatrix} + s_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{ii} \\ a_{i2} & a_{ii} \end{vmatrix} \right) - s_{12} \cdot s_{21} \sum_{i=3}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \right\}$$

$$A_{2(n-3)} = C_A^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{l=j+1}^n \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{il} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jl} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{ll} \end{vmatrix} - s_{12} \sum_{i=3}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \begin{vmatrix} a_{21} & a_{2i} & a_{2j} \\ a_{i1} & a_{ii} & a_{ij} \\ a_{j1} & a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} - s_{21} \sum_{i=3}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1i} & a_{1j} \\ a_{i2} & a_{ii} & a_{ij} \\ a_{j2} & a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} - s_{12}s_{21} \sum_{i=3}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{l=j+1}^n \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{il} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jl} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{ll} \end{vmatrix} \right\} \quad (10)$$

$$A_{2(n-4)} = C_A^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=i+1}^{n-2} \sum_{l=j+1}^{n-1} \sum_{k=l+1}^n \det A_{ijkl} - \sum_{i=3}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{l=j+1}^n [s_{12} \cdot \det A_{21} + s_{21} \cdot \det A_{12}] - s_{12} \cdot s_{21} \sum_{i=3}^{n-3} \sum_{j=i+1}^{n-2} \sum_{l=j+1}^{n-1} \sum_{k=l+1}^n \det A_{ijkl} \right\}$$

kde

$$\det A_{ijkl} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{il} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jl} & a_{jk} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{ll} & a_{lk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kl} & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad \det A_{21} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{2i} & a_{2j} & a_{2l} \\ a_{i1} & a_{ii} & a_{ij} & a_{il} \\ a_{j1} & a_{ji} & a_{jj} & a_{jl} \\ a_{l1} & a_{li} & a_{lj} & a_{ll} \end{vmatrix}, \quad \det A_{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1i} & a_{1j} & a_{1l} \\ a_{i2} & a_{ii} & a_{ij} & a_{il} \\ a_{j2} & a_{ji} & a_{jj} & a_{jl} \\ a_{l2} & a_{li} & a_{lj} & a_{ll} \end{vmatrix}$$

$$A_0 = C_A^{-1} \det K$$

Vzorke pro výpočet koeficientů $A_{2(n-i)}$ pro $4 < i < n$ jsou velmi složité a nepřehledné. Pro výpočet hodnot těchto koeficientů je možno využít programového systému MAPLE, event. MATLAB.

Determinant $D_j(p)$ ve vztahu (9) vznikne nahrazením j -tého sloupce determinantu $D(p)$ vektorem $F_i(p)$ pro $i = 1$ až 9

Determinant $D_{ji}(p)$ je algebraický doplněk determinantu $D_j(p)$ podle i -tého prvku j -tého sloupce – vektoru $F_i(p)$.

Pro určení hledaných funkcí $y_i(t)$ zpětnou transformací obrazů $\bar{y}_i(p)$ je vhodné poměr determinantů $D_{ji}(p)$ a $D(p)$ upravit tak, aby součin úpravou získaného výrazu a obrazu $\bar{F}_i(p)$ umožňoval aplikovat větu o obrazu konvoluce.

Polynom ve vztahu (9) s reálnými koeficienty (10) je možno nahradit součinem kvadratických dvoučlenů

$$\sum_{i=0}^n A_{2(n-i)} \cdot p^{2(n-i)} = \prod_{i=1}^n (p^2 + \omega_i^2) \quad (11)$$

Po provedení součinu na pravé straně se získá polynom

$$\sum_{i=0}^n A_{2(n-i)} \cdot p^{2(n-i)} = \sum_{i=0}^n B_{2(n-i)} \cdot p^{2(n-i)} \quad (12)$$

kde reálné koeficienty $B_{2(n-i)}$ jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} B_{2n} &= 1 & B_{2(n-1)} &= \sum_{i=1}^n \omega_i^2 & B_{2(n-2)} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \omega_i^2 \cdot \omega_j^2 \\ B_{2(n-3)} &= \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{l=j+1}^n \omega_i^2 \cdot \omega_j^2 \cdot \omega_l^2 & B_{2(n-4)} &= \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=l+1}^{n-2} \sum_{l=j+1}^{n-1} \sum_{k=l+1}^n \omega_i^2 \cdot \omega_j^2 \cdot \omega_l^2 \cdot \omega_k^2 \end{aligned} \quad (12a)$$

$$B_0 = \prod_{i=1}^n \omega_i^2$$

Porovnáním koeficientů polynomů u stejných mocnin parametru $p^{2(n-i)}$ na obou stranách rovnic (12) $A_{2(n-i)} = B_{2(n-i)}$ se získá systém rovnic pro určení $\omega_i^2, \omega_j^2, \omega_l^2, \dots, \omega_n^2$.

Porovnáním vztahů (12a) se vztahy určujícími vazbu koeficientů algebraické rovnice n -tého stupně a jejich kořenových činitelů, tj. elementárních symetrických funkcí proměnných $\omega_i^2, \omega_j^2, \omega_l^2, \dots, \omega_n^2$ se získá algebraická rovnice n -tého stupně proměnné ω^2

$$f(\omega^2) = \omega^{2n} - A_{2(n-1)} \cdot \omega^{2(n-1)} + A_{2(n-2)} \cdot \omega^{2(n-2)} - \dots + (-1)^{n-1} A_2 \cdot \omega^2 + (-1)^n A_0 = 0 \quad (13)$$

Numerickým řešením se určí n kořenů rovnice (13), ω^2 – kruhových frekvencí funkcí $y_j(t)$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ určujících řešení soustavy rovnic (8). Tím je určen polynom na pravé straně rovnice (12). Protože polynom determinantu $D_{ji}(p)$ má v řešeném případě netlumeného kmitání nenulové koeficienty jen u sudých mocnin parametru p a protože poměr determinantů (9) je ryze racionální lomená funkce je možno poměr determinantů (9) rozložit do součtu parciálních zlomků

$$\frac{D_{ji}(p)}{D(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{L_{ji,k}}{p^2 + \omega_k^2} \quad (14)$$

Pro určení těchto neurčitých koeficientů $L_{ji,k}$ pro k -tý prvek v součtu (14) je třeba determinant $D_{ji}(p)$ vyjádřit ve tvaru polynomu

$$D_{ji}(p) = \sum_{s=1}^n C_{ji,2(n-s)} p^{2(n-s)} \quad (15)$$

Součet parciálních zlomků na pravé straně rovnice (14) je možno přepsat do tvaru

$$\sum_{k=1}^n \frac{L_{ji,k}}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (p^2 + \omega_i^2)} \left[L_{ji,1} \prod_{s=2}^n (p^2 + \omega_s^2) + L_{ji,2} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq 2}}^n (p^2 + \omega_s^2) + \dots + L_{ji,r} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n (p^2 + \omega_s^2) + \dots + L_{ji,n} \prod_{s=1}^{n-1} (p^2 + \omega_s^2) \right] \quad (16)$$

Jednotlivé součiny na pravé straně je možno vyjádřit ve tvaru polynomů

$$\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n (p^2 + \omega_s^2) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n E_{i,2(n-s)} p^{2(n-s)} \quad (17)$$

kde koeficienty polynomů na pravé straně rovnice (17)

$$\begin{aligned} E_{k,2(n-1)} &= 1 & E_{k,2(n-2)} &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \omega_p^2 & E_{k,2(n-3)} &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \sum_{q=p+1}^n \omega_p^2 \\ E_{k,2(n-4)} &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \sum_{q=p+1}^n \sum_{r=q+1}^n \omega_p^2 \omega_q^2 \omega_r^2 & E_{k,2(n-n)} &= \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \omega_p^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Po dosazení vztahu (15) a (17) do rovnice (14) s ohledem na vztahy (18) se získají rovnice

$$\sum_{s=1}^n C_{ji,2(n-s)} p^{2(n-s)} = \sum_{k=1}^n L_{ji,k} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n E_{k,2(n-s)} p^{2(n-s)}$$

porovnáním koeficientů u stejných mocnin parametru p u obou polynomů se získá soustava n -lineárních algebraických rovnic pro výpočet neznámých, neurčitých koeficientů $L_{ij,k}$ pro $s = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{k=1}^n L_{ji,k} E_{k,2(n-s)} = C_{ji,2(n-s)} \quad \text{pro } s = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

kde index j přísluší obrazu hledané veličiny $\bar{y}_j(p)$ (9), respektive hledané veličině $y_j(t)$ rovnic (7).

index i – přísluší i -tému členu součtu (9)

index k – přísluší k -tému parciálnímu zlomku při rozkladu poměru determinantů (14)

Pro výpočet n^3 neznámých koeficientů $L_{ij,k}$ je opět možno aplikovat Cramerovo pravidlo pro každé j a i při řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{pmatrix} E_{1,2(n-1)} & E_{2,2(n-1)} & \dots & E_{k,2(n-1)} & \dots & E_{n,2(n-1)} \\ E_{1,2(n-2)} & E_{2,2(n-2)} & \dots & E_{k,2(n-2)} & \dots & E_{n,2(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{1,2(n-k)} & E_{2,2(n-k)} & \dots & E_{k,2(n-k)} & \dots & E_{n,2(n-k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{1,0} & E_{2,0} & \dots & E_{k,0} & \dots & E_{n,0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_{ji,1} \\ L_{ji,2} \\ \dots \\ L_{ji,k} \\ \dots \\ L_{ji,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{ji,2(n-1)} \\ C_{ji,2(n-2)} \\ \dots \\ C_{ji,2(n-k)} \\ \dots \\ C_{ji,0} \end{pmatrix} \quad (19a)$$

kde prvky $E_{k,2(n-k)}$ matice soustavy (19a) jsou dány vztahy (18). Určení konstant $L_{ij,k}$ umožňuje po dosazení do (14) a do (9) získat vztah pro výpočet obrazu $\bar{y}_j(p)$ pro $j = 1, 2, \dots, n$

$$\bar{y}_j(p) = \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} \bar{F}_i(p) \sum_{k=1}^n \frac{L_{ji,k}}{p^2 + \omega_k^2} \quad (20)$$

Po zpětné transformaci konvoluce obrazů (20) se získá řešení soustavy rovnic pro nulové rovnice počáteční podmínky (7) ve tvaru součtu konvolutorních integrálů budících funkcí $F_i(t)$

$$y_j(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} \sum_{k=1}^n \frac{L_{ji,k}}{\omega_k} \int_0^t F_i(\tau) \cdot \sin \omega_k(t - \tau) \cdot d\tau \quad (21)$$

kde frekvence ω_k je řešením rovnice (13). Ze známých funkcí $y_j(t)$ se určí hledané veličiny (5a) soustavy rovnic (6). To umožňuje určit vertikální posuvy libovolných bodů podvozků nebo skříně, např. posuvy bodů popsaných rovnicemi (2a), (2b) a (3). Navržené řešení umožňuje vytvoření programu pro výpočet vertikálních posuvů v libovolných bodech modelu jak podvozkových kolejových, tak i silničních vozidel s velkým rozsahem variant konkrétního konstrukčního uspořádání. Obdobným postupem bylo vyšetřováno kmitání modelu dvounápravového vozidla s uvažováním lineárního tlumení [4].

Literatura:

- [1] Volek, J., Soukup, J., Kout, J.: *Investigation of influence of asymmetry in case of the vibration of a resiliently supported plate – application on the vibration of vehicle IV* In.: Sborník abstraktů a příspěvků na CD-R Engineering Mechanics 2003, Svratka, ČR
- [2] Volek, J., Soukup, J.: *Řešení soustavy $n > 3$ simultánních nehomogenních diferenciálních rovnic kmitání kinematicky buzeném soustavě tří těles prostorově pružně uložených a vázaných – modelu podvozkového vozidla s uvažováním vlivu obecné nesymetrie*. Bulletin vědeckých výzkumných a pedagogických prací ÚTŘV za r. 2003, ÚTŘV UJEP Ústí n. L.: 2004 (v tisku)
- [3] Volek, J., Soukup, J., Skočilasová, B.: *Vyšetřování kinematicky buzené soustavy tří těles prostorově pružně uložených a vázaných – modelu podvozkového kolejového vozidla s uvažováním vlivu nesymetrie*. In.: Sborník z I. konference Dynamika tuhých a deformovatelných těles, ÚTŘV UJEP Ústí n. L., 11/2003 (v tisku)
- [4] Volek, J., Soukup, J., Skočilasová, B.: *Vyšetřování kmitání prostorově pružně uložené tuhé desky s uvažováním vlivu nesymetrie, lineárního tlumení a obecné funkce buzení*. In.: Sborník z I. konference Dynamika tuhých a deformovatelných těles, ÚTŘV UJEP Ústí n. L., 11/2003 (v tisku)