



INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

THE SOLUTION OF REINFORCED CONCRETE SLAB USING NONLOCAL MODEL

L. Brdečko¹ R. Zídek²

Summary: *The modelling of reinforced concrete slabs is a topic of this paper. The main attention is paid to the cracks propagation, the increase and localization of the damage and evaluation of the load-carrying capacity of these structures. A common local model for a solution of RC-slabs and its nonlocal modification which helps to eliminate mesh dependence of results are presented. The paper is supplemented with an example of the local and nonlocal solution of an experimentally investigated slab.*

1. Úvod

Jedním z problémů modelování rozvoje trhlin v betonu pomocí modelu fiktivní trhliny je závislost řešení na hustotě sítě konečných prvků. Účinným nástrojem k řešení těchto nedostatků je nelokální modelování. Aplikace tohoto postupu na model železobetonové desky je předmětem tohoto článku. Kromě charakteristiky konečného prvku a materiálového modelu programu INCA (Inelastic Nonlocal Continuum Analysis), vyvíjeného pro řešení ŽB desek, jsou zde diskutovány některé aspekty implementace nelokálního modelu do tohoto programu.

2. Prvek pro řešení ŽB desek

Pro analýzu ŽB desek byl zvolen model z deskostěnových prvků, který neklade takové kapacitní a časové nároky na fyzikálně nelineární výpočet, jako je tomu u modelů z prostorových prvků. V odvození deskostěnového prvku je uvažováno membránové a ohybové působení a také smyk z roviny prvku. Bázové funkce pro aproximaci přemístění jsou lineární a k integraci matice tuhosti prvku jsou využity čtyři integrační body pro membránové působení a ohyb a jeden bod pro smyk.

Byl zachován předpoklad o rovinnosti průřezu, ale bylo třeba postihnout nelineární průběh napětí po výšce průřezu. K tomu posloužil vrstvičkový postup s vyhodnocováním napětí v těžišti vrstev prvku a následnou sumací tuhostí a vnitřních sil pro jednotlivé integrační body. Tento postup byl použit jak pro vrstvy betonu, tak pro jednotlivé skupiny výztužných vložek.

¹Ing. Luděk Brdečko, Ph.D.: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky; Veveří 95, 662 37 Brno; tel.: +420.541 147 368; e-mail: brdecko.l@fce.vutbr.cz

²Ing. Rostislav Zídek, Ph.D.: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky; Veveří 95, 662 37 Brno; tel.: +420.541 147 368; e-mail: zidek.r@fce.vutbr.cz

Pro výztuž je zaveden jednorozměrný model s bilineárním pracovním diagramem bez zpevnění a s omezením maximální deformace.

Při tvorbě 2D modelu pro beton byla snaha vytvořit poměrně jednoduchý model, který by postihoval nejdůležitější aspekty chování betonu při tlakovém a tahovém namáhání a porušování. Jedná se především o nelineární pracovní diagram betonu v tlaku, vliv dvojosé napjatosti na okamžik porušení materiálu, ortotropní chování po vzniku trhlin a reziduální napětí v trhlinách.

Podmínka porušení pro beton

Pro zavedení materiálových parametrů získaných z jednoduchých testů do 2D materiálového modelu jsou použity ekvivalentní jednoosé pracovní diagramy. Ekvivalentní deformace se získá z napětí a poddajnosti ve směru vyhodnocování napětí

$$\varepsilon_{eq} = \sigma_i / E_{s,i}. \quad (1)$$

Efektivní mez pevnosti v ekvivalentních pracovních diagramech jsou pak určeny z 2D podmínky porušení v závislosti na poměru hlavních napětí

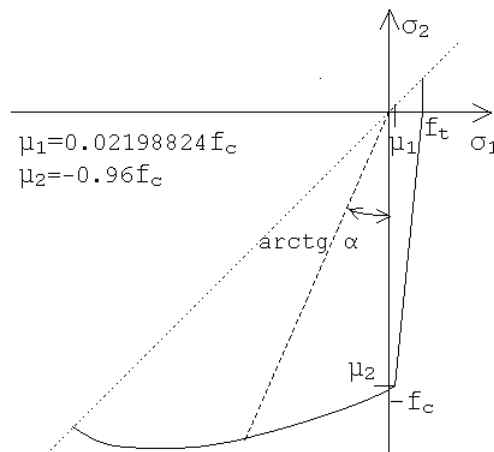
$$\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (2)$$

za předpokladu $\sigma_1 \geq \sigma_2$.

V tlakové zóně je podmínka porušení uvažována podle CEB-FIP Model Code 90 a příslušná efektivní pevnost (záporná)

$$f_{c,ef} = -\frac{1 + 3.65\alpha}{(1 + \alpha)^2} f_c \quad (3)$$

se použije k vyhodnocení druhého hlavního napětí. Na rozmezí mezi zónou tlak–tlak a tah–tlak dosahuje tato pevnost $\mu_2 = -0.96f_c$ (viz obrázek 1) a α má hodnotu $\alpha_{ct} = -0.0228321$.



Obrázek 1: Podmínka porušení pro beton

V zóně tah–tlak se předpokládá primární porušení tahovým namáháním a efektivní pevnost v tlaku se ponechává konstantní pro celou zónu

$$f_{c,ef} = -0.96f_c. \quad (4)$$

Efektivní pevnost v tahu je odvozena z podmínky porušení, která má v této zóně lineární průběh

$$f_{t,ef} = \frac{f_t \alpha \mu_2}{\alpha \mu_2 - \mu_1 + f_t}. \quad (5)$$

Rozhraní mezi zónou tah–tlak a tah–tah je určeno změnou znaménka druhého hlavního napětí. V zóně tah–tah se předpokládá konstantní hodnota efektivní pevnosti v tahu

$$f_{t,ef} = f_t. \quad (6)$$

Poškození v tlakové zóně

V tlakové zóně se redukuje matice tuhosti pomocí parametru poškození ω_c

$$[D_d] = (1 - \omega_c)[D_e]. \quad (7)$$

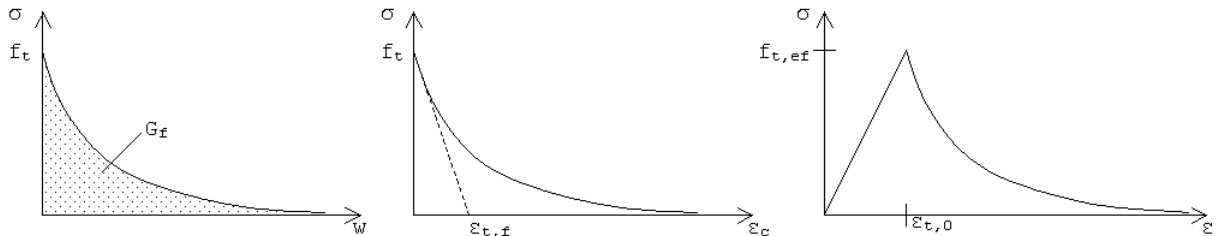
Parametr poškození ω_c se získá z ekvivalentního pracovního diagramu pro namáhání v tlaku uvažovaného pro druhé hlavní napětí

$$\omega_c = \frac{E_o - E_{2,eq}}{E_o}. \quad (8)$$

V pracovním diagramu pro tlak je uvažována nelineární vzestupná větev podle ČSN P ENV 1992-1-1 a lineární sestupná větev s mezní deformací v tlaku $\varepsilon_{c,f}$.

Porušení v tahové zóně

Pro vystižení ortotropie způsobené vznikem trhlin byl zvolen model fiktivních trhlin, které po svém vzniku již nemění svůj směr ("fixed crack model"). V každém bodě může vzniknout jedna nebo dvě na sebe kolmé trhliny, které se mohou otevírat a zavírat v závislosti na znaménku normálové deformace ve směru kolmém na trhlínu. Směry trhlin jsou dány směry hlavních napětí v okamžiku vzniku první trhliny a tyto směry zůstávají platné pro vyhodnocování napětí i ve všech dalších krocích postupného výpočtu.



Obrázek 2: Pracovní diagramy pro beton v tahu

Při tvorbě ekvivalentního pracovního digramu (viz obr. 2) se vychází ze závislosti normálového napětí v trhlíně na jejím rozevření. Tuto závislost je možno také vyjádřit pomocí lomové energie G_f . Druhý diagram na obr. 2, definující závislost napětí v trhlíně na neelastické části normálové deformace, je možné získat z prvního převodem $\varepsilon_c = w/d$, kde d je

velikost porušené zóny. Tento diagram je definován tvarem (v daném případě exponenciální závislostí) a parametrem $\varepsilon_{c,f}$. Tento parametr je odvozen pro jednoosý tah a zůstává stejný i pro proměnlivou efektivní pevnost.

Třetí diagram na obr. 2 je ekvivalentní pracovní diagram, udávající závislost normálového napětí v trhlině na celkové deformaci. Vztah mezi tuhostí E_c z druhého diagramu a tuhostí E z třetího diagramu je dán rovnicí

$$E = \frac{E_0 E_c}{E_0 + E_c}. \quad (9)$$

Pro nalezení neelastické deformace pro ekvivalentní celkovou deformaci je ovšem třeba použít numerického řešení.

Odvození matice tuhosti materiálu vychází z dekompozice části matice poddajnosti odpovídající normálovým směrům na elastickou a neelastickou část

$$[C'_d] = [C'_e] + [C'_c]. \quad (10)$$

Neelastická část $[C'_c]$ je diagonální s poddajnostmi $1/E_{c1}$ a $1/E_{c2}$. Provede se inverze matice poddajnosti $[C'_d]$, přidá se k ní tuhost pro smyk a získá se matice tuhosti materiálu pro vrstvičku betonu

$$[D_d] = \begin{bmatrix} c_1 E_1 & c_1 \nu_{12} E_1 & 0 \\ c_1 \nu_{21} E_2 & c_1 E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G_0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Koeficient c_1 je dán

$$c_1 = \frac{1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (12)$$

a Poissonovy součinitele $\nu_{21} = \nu \frac{E_1}{E_0}$, $\nu_{12} = \nu \frac{E_2}{E_0}$ postupně klesají s rozvojem trhlin. Koeficient β udává redukci původní elastické smykové tuhosti, která je způsobena rozevřením trhlin. Při uzavření obou trhlin je roven jedné.

3. Nelokální model

Při práci s modelem fiktivní trhliny s reziduální tuhostí v trhlině v MKP je možno se setkat s problémy se závislostí výsledků na velikosti konečných prvků v oblasti poruchy. Tato závislost bývá způsobena tím, že se porucha lokalizuje do pásu prvků, jehož šířka je úzce spjata s velikostí prvků. Tím je ovlivněna energie spotřebovaná na vytvoření poruchy a následně je ovlivněna i zatěžovací dráha (diagram síla–přemístění). Nelokální model použitý v programu má za cíl rozšířit vzniklé poškození do reálné zóny porušení. Tohoto cíle je dosahováno uvažováním některé veličiny jako nelokální, tzn. její hodnoty jsou vztaženy k hodnotám v bodech v okolí vyšetřovaného bodu.

Jako nelokální proměnné je v daném případě využito celkové deformace ε . Vzhledem k předpokladu zachování rovinnosti průřezu je možno, konkrétně pro tuto veličinu, průměrovat průřezové hodnoty deformace a z nich dopočítávat hodnoty ve vrstvičkách. Zvětšováním počtu vrstviček tedy nestoupá náročnost průměrování. Pro každou vrstvičku se počítá lokální i nelokální hodnota. Nelokální hodnota se využije při tvorbě nové matice tuhosti, lokální hodnota pro výpočet přenesených napětí

$$\{\sigma\} = [D_d(\bar{\varepsilon})] \{\varepsilon\}. \quad (13)$$

U výztuže se pracuje pouze s lokálními hodnotami deformací.

Vliv vzdálenosti r blízkého bodu ξ od vyšetřovaného bodu η je vyjádřen váhovou funkcí

$$\alpha_0(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 & r < R \\ 0 & r \geq R \end{cases}, \quad (14)$$

ve které R je interakční poloměr definující velikost oblasti poruchy.

Během výpočtu jsou primárně známy hodnoty průměrovaných veličin v integračních bodech matice tuhosti prvku. Tyto hodnoty jsou tedy využity k výpočtu nelokální hodnoty dané veličiny. Uvažuje se konstantní váha pro celou plochu A_ξ patřící k danému blízkému bodu ξ .

Hodnota váhové funkce je normalizována pro každou dvojici bodů $\eta - \xi$. Normalizací se zajistí jednotkový integrál z váhových funkcí pro libovolné interakční poloměry a dále se tím ošetří nepřesnosti s ohraničením oblasti průměrování, které jsou způsobeny tvarem konečných prvků, hranicí konstrukce, popř. osou symetrie. Do hodnoty normalizované váhové funkce je již zahrnuta integrace po ploše

$$\alpha(\eta, \xi) = \frac{\alpha_0(\eta, \xi)A_\xi}{\sum_{i=1}^p \alpha_0(\eta, \xi_i)A_{\xi_i}}. \quad (15)$$

Při samotném výpočtu nelokální proměnné se pak pracuje jen s lokální hodnotou proměnné v bodě ξ a normalizovanou váhovou funkcí pro tento bod

$$\bar{\varepsilon}(\eta) = \sum_{i=1}^p \alpha(\eta, \xi_i)\varepsilon(\xi_i). \quad (16)$$

Nelokální průměrování je náročnou součástí výpočtu, a to z hlediska časových i kapacitních požadavků. Výpočet váhových funkcí a samotné průměrování vyžaduje mnohonásobné procházení databází integračních bodů a skladování velkého množství dat. Aby bylo možno provádět rozsáhlejší výpočty, je třeba zabývat se snížením těchto nároků na minimum. Zde jsou některé použité úpravy výpočtu snižující časovou a paměťovou náročnost:

Využití omezeného definičního oboru váhové funkce. Vzhledem k poměru interakčního poloměru (velikost několika zrn kameniva) a velikosti konstrukce nabývá váhová funkce pro většinu dvojic integračních bodů nulové hodnoty a stačí tedy zálohovat údaje pouze pro související body s nenulovou hodnotou váhové funkce.

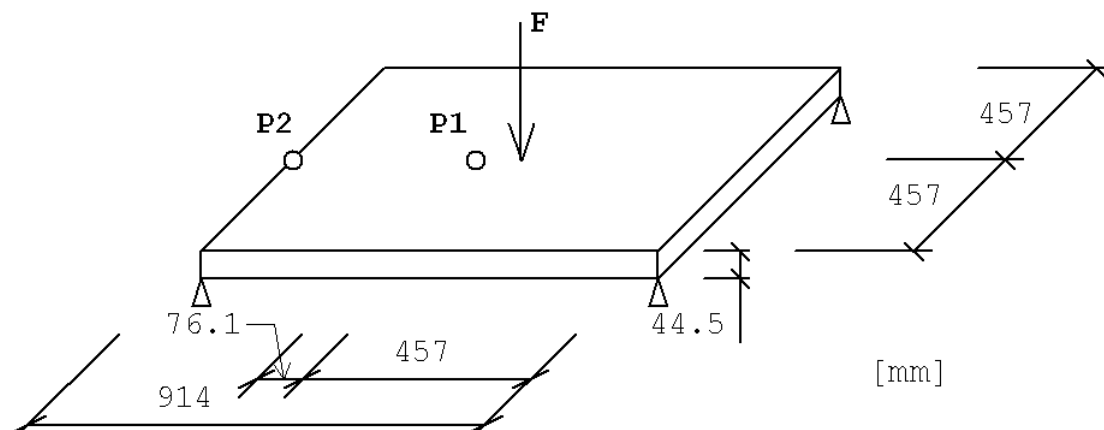
Jednorázový výpočet váhových funkcí. Hodnota váhových funkcí se během výpočtu nemění, je možno je napočítat jednorázově předem.

Uspořádání databáze. Každá dvojice souvisejících bodů se ukládá dvakrát, pokaždé je vyšetřovaným bodem jiný z nich. Umožňuje to: ukládat normalizované hodnoty váhových funkcí; ukládat pro každý vyšetřovaný bod pouze index blízkého bodu a hodnotu normalizované váhové funkce; přistupovat do databáze sekvenčně bez prohledávání.

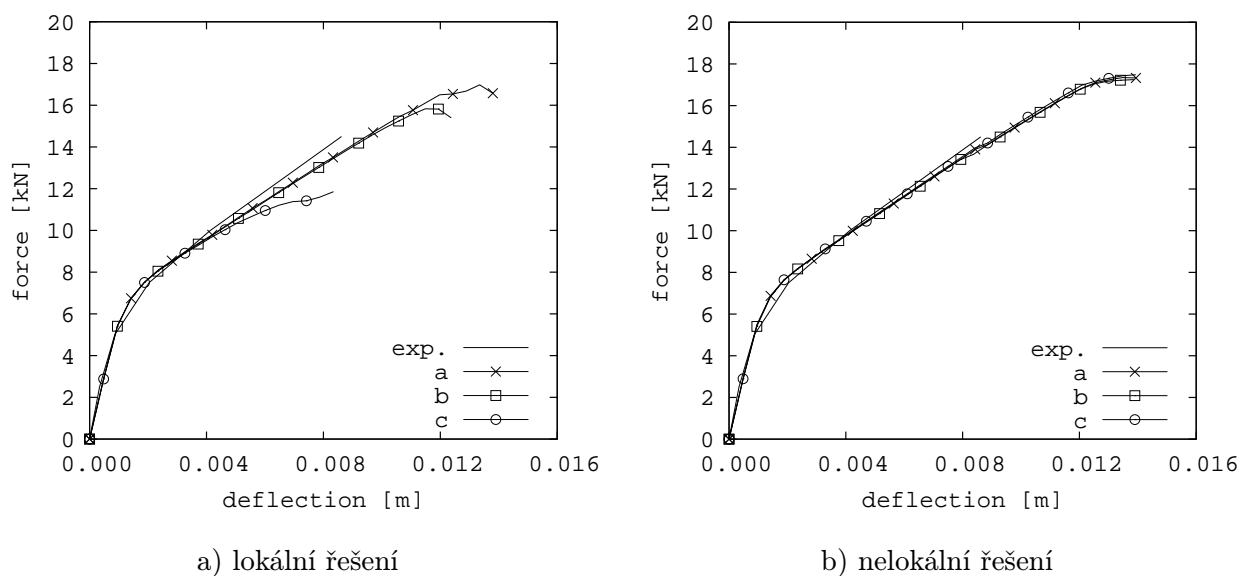
Hrubý výběr souvisejících prvků. Pro výběr souvisejících bodů je možno provést nejdříve hrubý výběr souvisejících prvků (využívají se integrační body pro smyk) a pak se zabývat dvojicemi integračních bodů pouze pro tyto prvky. U výběru prvků je ovšem třeba použít náhradní zvětšený interakční poloměr.

4. Řešená deska

Pro verifikaci programu byly využity výsledky z experimentálního zkoumání ŽB desky Jofrietem a McNiecem (1971). Jde o čtvercovou desku bodově podepřenou v rozích, zatíženou narůstající silou uprostřed (viz obrázek 3).



Obrázek 3: Geometrie, body měření a zatížení desky

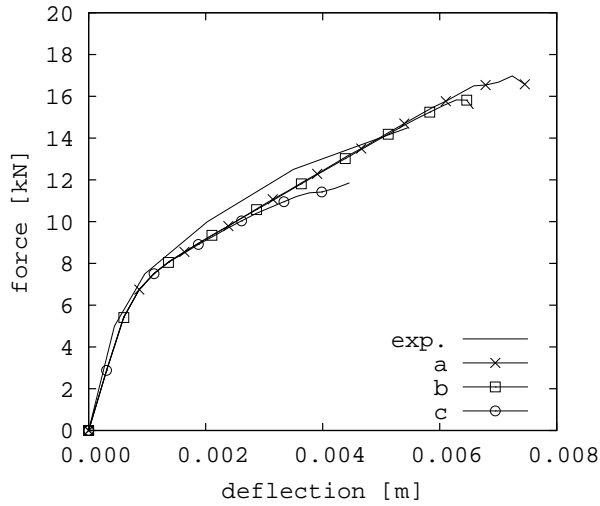


Obrázek 4: Závislost síla – průhyb (bod měření P1)

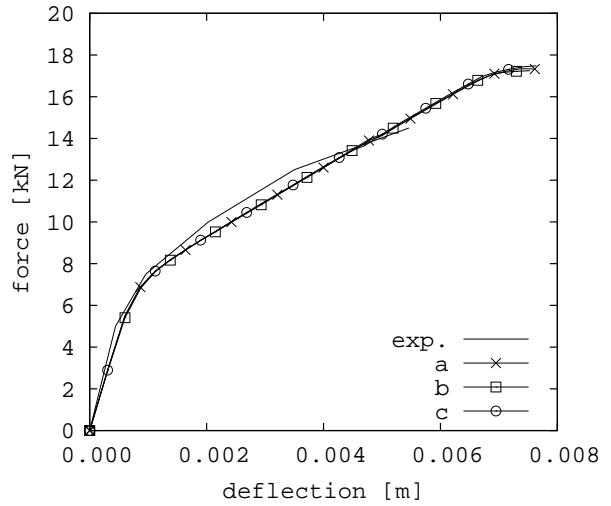
Délka desky je 0.914 m a tloušťka je 0.0445 m . Deska je vyztužena obousměrně při dolním povrchu se stupněm vyztužení 0.85% . Charakteristiky známé z experimentu byly pro ocel $E = 200\text{ GPa}$, $f_y = 345\text{ MPa}$ a pro beton $E = 29.1\text{ GPa}$, $f_c = 37.9\text{ MPa}$ a $\varepsilon_{c,f} = 0.0035$. Ostatní parametry byly určeny na základě doporučení uvedených v CEB – FIP Model Code 90, v ČSN P ENV 1992-1-1 a v práci Červenka, Jendele & Červenka (2003). Pevnost betonu v jednoosém tahu byla takto stanovena $f_c = 2.7\text{ MPa}$. Vzhledem k malé tloušťce desky se předpokládalo použití kameniva s maximální frakcí $d = 8\text{ mm}$. Z toho vycházelo určení lomové energie $G_f = 50.1\text{ J.m}^{-2}$ a odhad interakčního poloměru $R = 0.024\text{ m}$.

Výpočet byl proveden pro standardní model s pevně daným pracovním diagramem (lokální model) a pro model s nelokálním průměrováním (nelokální model). Byla uvažována síť konečných prvků s následujícím zahuštěním v oblasti poruchy:

- (a) rovnoměrné s velikostí prvku 5 mm,
- (b) rovnoměrné s velikostí prvku 1 mm,
- (c) nerovnoměrné s minimální velikostí prvku 0.25 mm.

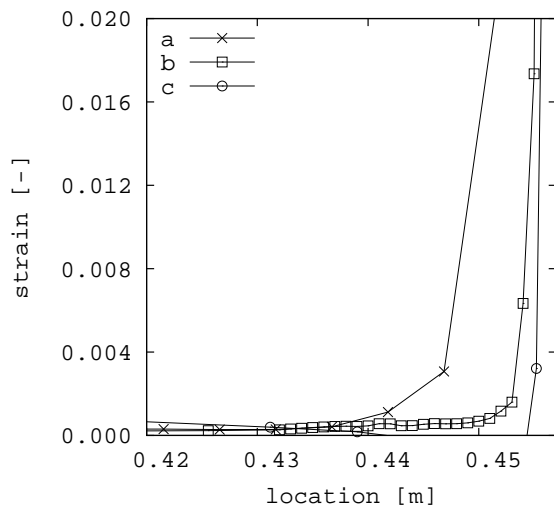


a) lokální řešení

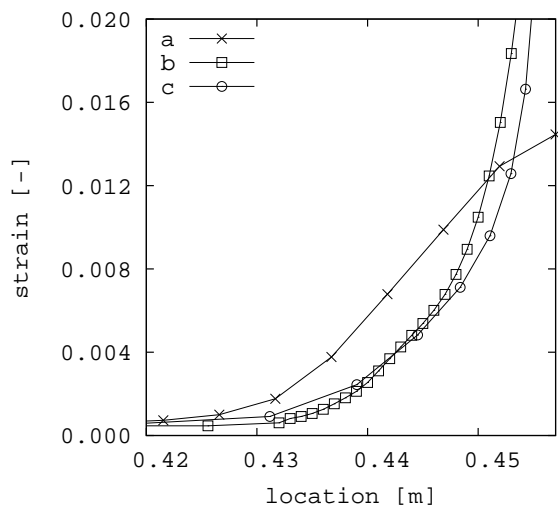


b) nelokální řešení

Obrázek 5: Závislost síla – průhyb (bod měření P2)



a) lokální řešení



b) nelokální řešení

Obrázek 6: Detail průběhu deformace v porušené oblasti

Obrázky 4 a 5 ukazují závislost rostoucí zatěžovací síly ve středu desky na průhybu v bodě měření P1 resp. P2. Výpočty poměrně dobře vystihují zatěžovací dráhu, méně dobře

už hodnotu mezního zatížení. Pokud ovšem budeme sledovat závislost těchto diagramů na dělení výpočtového modelu na konečné prvky, můžeme vidět podstatné rozdíly v dosaženém mezním zatížení u lokálního modelu, zatímco u nelokálního jsou křivky (a), (b) a (c) téměř totožné.

Na obrázku 6 je zobrazen detail průběhu deformace ε_x v dolní vrstvě betonu v řezu vedeném středem desky ve směru x . Výsledky jsou uvedeny pro průhyb pod silou $w = 0.0075\text{ m}$. V prvním grafu ukazujícím výsledky pro lokální řešení prutu je možné si všimnout, že velikost poloviny porušené zóny odpovídá oblasti přibližně tří až pěti prvků. Výsledná oblast poruchy je tedy silně závislá na velikostech prvků, a to co do velikosti této oblasti, tak i z hlediska velikosti deformací, které dosahují nerálních hodnot. Ve druhém grafu jsou zobrazeny výsledky pro nelokální řešení. Velikosti polovin porušených oblastí pro všechna tři dělení na prvky odpovídají zhruba interakčnímu poloměru a jsou výrazně méně závislé na velikostech prvků. Profil deformace pro tyto tři případy je poněkud odlišný. To způsobuje i jisté rozdíly v maximální dosažené deformaci, které nejsou tak velké jako u lokálního modelu a hodnoty deformací zůstávají v reálných mezích.

5. Závěr

V příspěvku byl nastíněn teoretický základ programu INCA určeného k analýze železobetonových desek. Dále byly uvedeny některé aspekty implementace nelokálního modelu do tohoto programu. Uvedený příklad dokumentoval jednak kvalitu modelu na vypočtených zatěžovacích drahách srovnávaných s experimenty a dále vliv nelokální úpravy modelu na získané výsledky.

Lze konstatovat, že problémy s lokalizací poškození se u lokálního modelu projeví výrazně v dosažené únosnosti konstrukce, méně v tvaru zatěžovací dráhy. Nelokální model dopadl v obou těchto ohledech dobře.

Profil deformace v porušené oblasti ukázal u lokálního modelu významnou závislost na velikosti konečných prvků. V případě nelokálního modelu se i přes odlišný profil deformace poškození rozšířilo do přibližně stejné oblasti.

6. Poděkování

Příspěvek vznikl za podpory projektu Grantové agentury ČR (grant č. 103/03/P055).

7. Literatura

Bažant, Z. P., Jirásek, M. (2002) *Inelastic Analysis of Structures*, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester.

(1990) *CEB – FIP Model Code 90*, Comite Euro – International du Beton, Paris.

Červenka, V., Jendele, L., Červenka, J. (2003) *ATENA Program Documentation – Part1: Theory*, Praha.

(1992) *ČSN P ENV 1992-1-1 Navrhování betonových konstrukcí, Díl 1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*, Praha.

Jofriet, C. J., McNiece, M. G. (1971) *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs*, Journal of Structural Division.