

REDUCTION OF VIBRATION IN NC FEED DRIVES

A. Bubák, P. Souček*

Summary: *In the paper, the relationship for the energy of undamped dynamic system forced by general force impulse and its steady response are described. The acquired relations needs only the values of the force impulse's amplitude spectra corresponding to the natural frequencies of the dynamic system.*

1. Buzení systému 2. řádu konečným silovým impulzem

1.1. Laplaceův obraz budícího impulsu

Časově omezený budící silový impulz o době trvání T_0 je popsán obecnou rovnicí

$$f(t) = g(t) - g(t) \cdot h(t - T_0), \quad t \in \langle 0, T_0 \rangle \quad (1)$$

kde $g(t)$ je funkce definovaná na intervalu $t \in \langle 0, \infty \rangle$, její Laplaceův obraz je $L\{g(t)\} = G(s)$, $h(t - T_0)$ je Heavisideova funkce posunutá o čas T_0 vpravo.

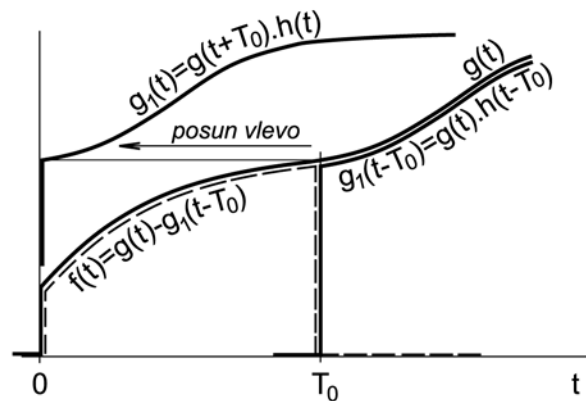
Funkce $f(t)$ je na intervalu $t \in (T_0, \infty)$ identicky nulová a pro zjištění jejího Lap. obrazu

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{T_0} g(t) e^{-st} dt$$

není vztah (1) pohodlný. Vytvoříme proto pomocnou funkci

$$g_1(t) = g(t + T_0) \cdot h(t)$$

která vznikne posunutím $g(t)$ vlevo o čas T_0 a je nulová pro $t < 0$ (viz **obr.1**). Její Laplaceův obraz $L\{g_1(t)\} = G_1(s)$. Posunutím $g_1(t)$ zpět vpravo získáme funkci $g_1(t - T_0) = g(t) \cdot h(t - T_0)$, jejíž Laplaceův obraz je $G_1(s) \cdot e^{-sT_0}$.



Obr. 1 Vytvoření impulzní funkce z rozdílu posunutých funkcí

* Doc. Ing. Pavel Souček, DrSc., Ing. Antonín Bubák: Výzkumné centrum pro strojírenskou výrobní techniku a technologii, fakulta strojní, ČVUT v Praze; Horská 3; 128 03 Praha 2; tel.: +420 221 990 900, fax: +420 221 990 999; e-mail: p.soucek@rcmt.cvut.cz, a.bubak@volny.cz

Budicí impuls $f(t)$ popíšeme lépe než podle (1) rozdílem

$$f(t) = g(t) - g_1(t - T_0) \quad (2)$$

takže jeho Laplaceův obraz je

$$F(s) = G(s) - G_1(s) \cdot e^{-sT_0} \quad (3)$$

1.2. Pohyb netlumeného systému

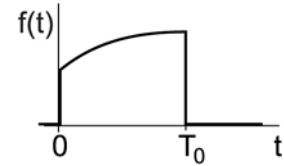
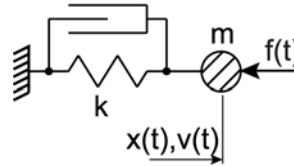
Pohybová rovnice silově buzeného jednohmotového systému podle **obr. 2** je

$$\ddot{x} + 2\zeta \Omega \dot{x} + \Omega^2 x = \frac{1}{m} f(t),$$

kde $\Omega = \sqrt{k/m}$. Počáteční podmínky jsou

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Po zanedbání tlumení ($\zeta \rightarrow 0$) a Laplaceově transformaci je



Obr. 2 Jednohmotový systém buzený konečným silovým impulzem

$$X(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{F(s)}{s^2 + \Omega^2} \quad (4)$$

Časový průběh pohybu vybuzeného systému zjistíme zpětnou transformací

$$x(t) = \frac{1}{m} \cdot L^{-1} \left(\frac{G(s) - G_1(s) \cdot e^{-sT_0}}{s^2 + \Omega^2} \right) \quad (4a)$$

Bez exaktního vyjádření funkce $g(t)$ nejsou známy Laplaceovy obrazy $G(s)$, $G_1(s)$, takže není možno vyšetřovat účinek budících funkcí $g(t)$ a $g_1(t - T_0)$ postupně superpozicí, jinými slovy časový průběh odezvy $x(t)$ v intervalu $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ nelze určit. Při zpětné transformaci (4a) je nutno čitatel uvažovat jako celek, tj. pracovat jen s obecným symbolem $F(s)$. Dále ukážeme, že pokračování odezvy v intervalu $t \in (T_0, \infty)$ určit lze, a to i s neúplnými znalostmi o funkci $f(t)$, resp. o jejím frekvenčním spektru $F(j\omega)$.

Protože je $L\{\sin \Omega t\} = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$, lze pro zpětnou Lap. transformaci (4) použít konvoluci

$$X(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{F(s)}{s^2 + \Omega^2} = \frac{1}{m\Omega} \cdot L\{\sin \Omega t * f(t)\}$$

$$x(t) = \frac{1}{m\Omega} \int_0^t f(\tau) \cdot \sin \Omega(t - \tau) d\tau$$

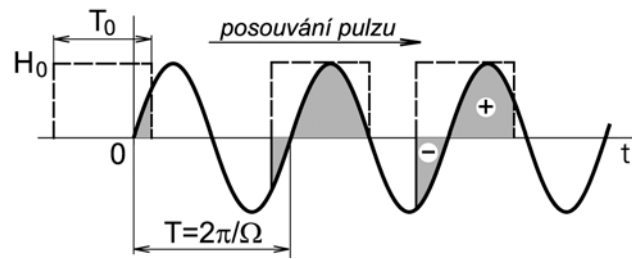
resp. po integraci per-partes a při $f(0) = 0$

$$x(t) = \frac{f(t)}{k} - \frac{1}{k} \int_0^t \dot{f}(\tau) \cdot \cos \Omega(t - \tau) d\tau = x_{STAT} + x_{DYN} \quad (5)$$

nebo s využitím komutativnosti konvoluce

$$x(t) = \frac{1}{m\Omega} \int_0^t \sin \Omega \tau \cdot f(t - \tau) d\tau \quad (5a)$$

Grafická interpretace konvoluce pro funkci $\sin \Omega t$ a speciální případ průběhu síly $f(t)$ ve tvaru osamoceného obdélníkového pulzu o výšce $H_0 = 1$ a délce T_0 je na **obr. 3**. Okamžitá hodnota konvolučního integrálu (5a) je zde rovna vyšrafované ploše, která se mění s posouváním pulzu. Je tedy zřejmé, že i pro obecný tvar pulzu je jeho velikost vždy omezená a počínaje časem T_0 periodická s periodou $T = 2\pi/\Omega$.



Obr. 3 Konvoluce obdélníkového pulzu a harmonické funkce

Poznámka: Vztahu (5) využil Krylov k odhadu maximální výchylky hmoty za předpokladu, že $T_0 \gg T$ a pulz má charakteristický tvar exploze (např. v hlavní palné zbraně) s jediným maximem derivace (monotónně roste z nuly a po dosažení maxima monotónně klesá). První sčítanec představuje statickou výchylku a pro druhý sčítanec je odvozen horní odhad ve tvaru

$$x_{DYN} \leq [df(t)/dt]_{MAX} \cdot \frac{T}{2k}$$

přičemž maximální výchylka nastane ještě během doby trvání pulzu (viz **lit.[2]**).

1.3. Stanovení odezvy z reziduí

Časový průběh výchylky $x(t)$ lze kromě (5), (5a) určit i z reziduové věty, aplikované na definiční integrál pro zpětnou L. transformaci

$$x(t) = \frac{1}{2j\pi} \oint_c X(s) e^{st} ds = \frac{1}{2j\pi m} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{F(s)}{s^2 + \Omega^2} e^{st} ds = \frac{1}{m} \sum \text{res} \left[\frac{F(s)}{s^2 + \Omega^2} e^{st} \right] \quad (6)$$

C...hranice oblasti, obsahující všechna komplexní čísla, pro něž platí $\text{Re}(s) \leq \sigma$ (exponent růstu). V obecném případě blíže neurčeného průběhu silového pulzu $f(t)$ jsou známa pouze dvě rezidua funkce $\frac{F(s)}{s^2 + \Omega^2} e^{st}$, příslušející dvěma známým pólům $\pm j\Omega$. Lze snadno dokázat (**lit.[3]**), že Laplaceův obraz konečného pulzu $F(s)$ je analytickou funkcí pro všechna komplexní čísla s a i když má singulární body, jsou to vždy tzv. odstranitelné singularity.

Poznámka: Častým případem je pól v počátku. Např. obdélníkový pulz z obr.3 má obraz

$$F(s) = H_0 \frac{1 - e^{-sT_0}}{s}$$

s odstranitelnou singularitou v počátku, kde je $F(0) = H_0 T_0$ (jak lze dokázat l'Hospitalovým pravidlem nebo přímo z definičního integrálu L.transformace). Obecně totiž platí

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(s) = F(0) = \int_0^{T_0} f(t) dt = \text{časový impulz budící síly.}$$

Předpokládejme, že funkce $F(s)$ má jednonásobný komplexní pól obecné (i nenulové) velikosti a , takže tentýž pól (a dva další póly $\pm j\Omega$) má i funkce $\frac{F(s)}{s^2 + \Omega^2} e^{st}$. Pro výpočet jejího rezidua v pólu a platí

$$res[a] = \lim_{s \rightarrow a} \frac{(s-a)F(s)}{s^2 + \Omega^2} e^{st} \quad (7)$$

Vyšetřujeme dále funkci $f(t) \cdot e^{-at}$, která je rovněž schopna Laplaceovy transformace (pouze s jiným exponentem růstu) a která je stejně jako původní funkce $f(t)$ identicky nulová v intervalu $t \in (T_0, \infty)$. Její obraz je $F(s+a)$ a platí pro ni z teoremu o konečné hodnotě, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \cdot e^{-at} = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s+a) = 0$$

Substituce $z = s + a$ dává $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)F(z) = res[F(a)] = 0$ (8)

Návratem k původnímu označení komplexní proměnné ze z na s a dosazením (8) do čitatele (7) vychází

$$res[a] = \frac{0}{a^2 + \Omega^2} e^{at} = 0 \quad (9)$$

Póly Laplaceova obrazu $F(s)$ budícího silového pulzu tedy nepřispívají do celkového součtu reziduí a stačí se pouze zaměřit na zbývající dva póly $\pm j\Omega$:

$$1) \quad res[+j\Omega] = \lim_{s \rightarrow +j\Omega} (s - j\Omega) \frac{F(s)}{s^2 + \Omega^2} \cdot e^{st} = \frac{F(j\Omega)}{2j\Omega} \cdot e^{j\Omega t}$$

$$2) \quad res[-j\Omega] = \lim_{s \rightarrow -j\Omega} (s + j\Omega) \frac{F(s)}{s^2 + \Omega^2} = \frac{F(-j\Omega)}{-2j\Omega} \cdot e^{-j\Omega t}$$

Časový průběh výchylky polohy v intervalu $t \in (T_0, \infty)$ je součtem obou reziduí

$$x(t) = \frac{F(j\Omega) \cdot e^{j\Omega t} - F(-j\Omega) \cdot e^{-j\Omega t}}{2jm\Omega} \quad (10)$$

kde $F(j\Omega) = Re F(j\Omega) + j Im F(j\Omega)$ (11)

je hodnota frekvenčního spektra $F(j\omega)$ (Fourierova obrazu) budícího silového pulzu na kmitočtu Ω . Obecně ale vždy platí, že reálná část frekvenčního spektra je sudou funkcí kmitočtu a imaginární část funkcí lichou, takže

$$F(-j\Omega) = Re F(j\Omega) - j Im F(j\Omega) \quad (12)$$

Využitím vztahů $e^{\pm j\Omega t} = \cos \Omega t \pm j \sin \Omega t$ a dosazením (11), (12) do (10) vychází

$$x(t) = \frac{Im F(j\Omega) \cdot \cos \Omega t + Re F(j\Omega) \cdot \sin \Omega t}{m\Omega} \quad (13)$$

Dále platí $Im F(j\Omega) = |F(j\Omega)| \cdot \sin \alpha$

$$Re F(j\Omega) = |F(j\Omega)| \cdot \cos \alpha$$

kde α je hodnota fázového spektra budicího pulzu na kmitočtu Ω .

Netlumené kmitání po odeznění silového pulzu je tedy popsáno rovnicí

$$x(t) = \frac{|F(j\Omega)|}{m\Omega} (\sin \alpha \cdot \cos \Omega t + \cos \alpha \cdot \sin \Omega t) = \frac{|F(j\Omega)|}{m\Omega} \sin(\Omega t + \alpha), \quad t \in (T_0, \infty) \quad (14)$$

Amplituda monotónních kmitů je dána jedinou hodnotou amplitudového spektra budicího silového pulzu na kmitočtu Ω :

$$X_{MAX} = \frac{|F(j\Omega)|}{m\Omega} \quad (15)$$

Systém nebude kmitat v případě, že frekvenční spektrum $F(j\omega)$ (Fourierův obraz funkce $f(t)$) má na kmitočtu Ω právě nulovou velikost.

1.4. Stanovení amplitudy kmitů z přivedené energie (jiný možný postup)

Práce budicí síly je obecně $E = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f(t)v(t)dt$, postačující interval integrace je $t \in \langle 0, T_0 \rangle$.

Fourierův obraz rychlosti pro tlumený systém vznikne z Laplaceova obrazu (srovnej s (4)) dosazením $s = j\omega$

$$V(j\omega) = \frac{1}{m} \cdot \frac{j\omega F(j\omega)}{-\omega^2 + 2\zeta\Omega j\omega + \Omega^2} \quad (16)$$

Využitím vztahu pro zpětnou Fourierovu transformaci $v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} V(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$ vychází

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f(t) \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} V(j\omega)e^{j\omega t} d\omega dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} f(t) V(j\omega)e^{j\omega t} d\omega dt$$

a záměnou pořadí integrace

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} V(j\omega) \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f(t)e^{j\omega t} dt d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} V(j\omega)F(-j\omega)d\omega$$

Dosazením (16) vychází pro práci budicí síly u netlumeného systému ($\zeta \rightarrow 0$)

$$E = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{2m\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \frac{j\omega F(j\omega)F(-j\omega)}{-\omega^2 + 2\zeta\Omega j\omega + \Omega^2} d\omega = \frac{-j}{2m\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \frac{\omega |F(\omega)|^2}{\omega^2 - \Omega^2} d\omega \quad (17)$$

Výpočet nevlastního integrálu (17) reálné funkce reálné proměnné ω lze provést opět pomocí residuové věty. Integrace pomocné funkce

$$f_{ce}(z) = \frac{z |F(z)|^2}{z^2 - \Omega^2} = \frac{z |F(z)|^2}{(z - \Omega)(z + \Omega)} \quad (18)$$

bude probíhat po křivce obkličující horní Gaussovu polorovinu, sestávající z vodorovné osy kmitočtů a půlkružnice s poloměrem $R \rightarrow \infty$. Na půlkružnici je ale integrál podle Jordanova lemmatu nulový a na vodorovné ose platí obecně (**lit. [3]**)

$$\int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} fce(\omega) d\omega = 2j\pi \sum res_1[fce(z)] + j\pi \sum res_2[fce(z)] \quad (19)$$

kde rezidua typu res_1 přísluší pólům funkce $fce(z)$ ležícím uvnitř integrační dráhy a rezidua typu res_2 pólům na její hranici (tj. vodorovné ose kmitočtů ω). Bylo již výše ukázáno, že rezidua prvního typu jsou nulová, takže pro energii silového pulzu platí

$$E = \frac{1}{2m} \sum res_2[fce(z)]$$

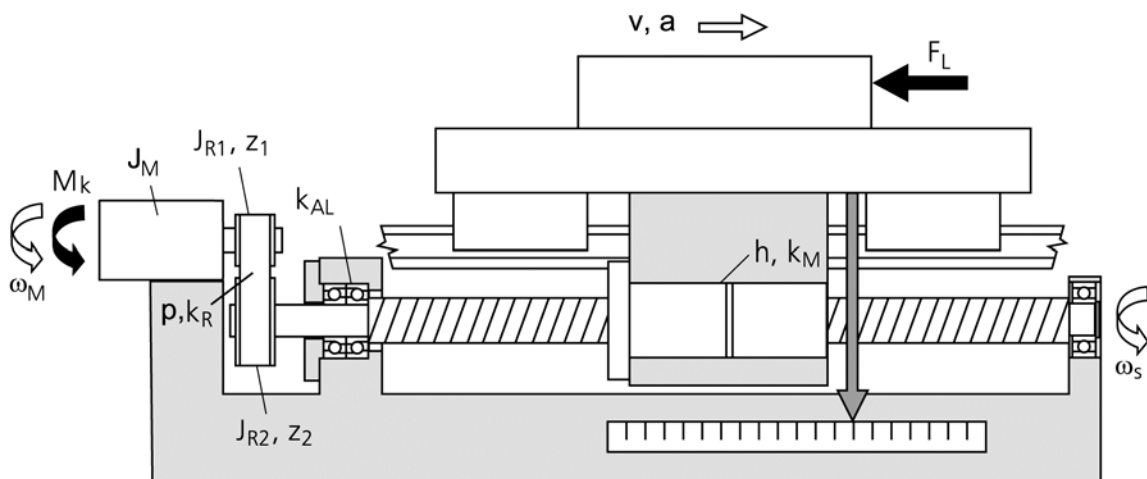
přičemž relevantní jsou pouze reálné póly $\pm \Omega$. Konečný vztah pro energii, která je do systému přivedena silovým pulzem, vychází ve tvaru

$$E = \frac{1}{2m} \left[\lim_{z \rightarrow \Omega} (z - \Omega) fce(z) + \lim_{z \rightarrow -\Omega} (z + \Omega) fce(z) \right] = \frac{|F(\Omega)|^2}{2m} \quad (20)$$

Po odeznění pulzu bude systém kmitat monotónními kmity s amplitudou X_{MAX} a v úvratí bude celá vložená energie E převedena do energie napjatosti pružiny, neboli

$$\frac{1}{2} k X_{MAX}^2 = \frac{|F(\Omega)|^2}{2m}$$

Tím je vztah (15) opět potvrzen.



Obr.4 Pohon posuvu obráběcího stroje s vloženým převodem a kuličkovým šroubem (celkový převod $\omega_M/v = p/h$)

2. Vícehmotový systém

Vztah (15) platí obecně pro jakýkoliv průběh silového pulzu $f(t)$ o konečné délce a je velmi prospěšný při řízení pohybových os NC obráběcích strojů (ať již rotačních, translačních nebo kombinovaných), které mívají velmi malé tlumení (viz např. vícehmotový systém s vloženým převodem a kuličkovým šroubem na **obr. 4**). Povelový signál (zadávaný motoru řídicím systémem stroje) je tvořen přírůstkou souřadnic v časové řadě, která nemusí být vždy vyjádřena analyticky, nýbrž je generována pro uživatele stroje často neprůhledným způsobem. Je lépe se zaměřit na její frekvenční spektrum, jehož rozbor pomocí FFT nečiní potíže.

Bude vyšetřován rozjezd suportu v **obr.4** na požadovanou rychlost v_p , která je řídicím systémem zadána ve formě konečného impulzu proudu do motoru (tedy momentu $M_K(t)$). Řeznou sílu F a tření zanedbáme. Netlumený obecně N – hmotový systém má rovnici

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (21)$$

kde vektor souřadnic \mathbf{x} obsahuje posuvy i natočení ve vybraných místech systému a do vektoru silového buzení \mathbf{f} je zahrnut jen moment motoru $M_K(t)$. Zobrazená soustava má jako celek jeden stupeň volnosti, takže první vlastní číslo matice systému $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ je nulové a přísluší mu urychlování tuhého systému na konečnou rychlost suportu

$$v_p = \int_0^{T_o} \frac{h M_K(t)}{p J_C} dt$$

J_C ...celkový setrvačný moment pohyblivých hmot redukovaný na hřídel motoru,
 $p = \omega_M / \omega_S$...vložený převod, h [m/rad]...stoupání šroubu, p/h ...celkový převod.

Při modálním rozkladu na soustavu nezávislých rovnic v souřadnicích $\mathbf{q} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$ přejde rovnice (21) na tvar

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{q} = \mathbf{V}^T \mathbf{f} \quad (22)$$

kde normovaná matice vlastních (sloupcových) vektorů, příslušných matici systému je

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_N]$$

Dále platí

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{E} \dots \text{jednotková matice}$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \text{diag}(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_N^2) \dots \text{spektrální matice (v řešeném případě je } \Omega_1 = 0 \text{ !!).}$$

Pravá strana v (22) bude mít tvar sloupcového vektoru

$$\mathbf{V}^T \mathbf{f} = [v_{11} M_K \quad v_{21} M_K \quad \dots \quad v_{N1} M_K]^T$$

kde v_{11}, v_{21}, \dots jsou první složky všech N vlastních vektorů systému (silové buzení působí pouze na první hmotě - kotvě motoru). Úloha se rozpadá na řešení N nezávislých rovnic pro modální souřadnice

$$\ddot{q}_i + \Omega_i^2 q_i = v_{i1} M_K(t), \quad i = 1 \dots N, \quad \Omega_1 = 0$$

Analogicky ke vztahu (4) je

$$L\{q_i(t)\} = v_{i1} \frac{M_K(s)}{s^2 + \Omega_i^2}$$

Návratem k původním souřadnicím podle vztahu

$$[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N]^T = \mathbf{V} [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_N]^T$$

vychází

$$X_n(s) = \sum_{i=1}^N v_{in} v_{i1} \frac{M_K(s)}{s^2 + \Omega_i^2}, \quad \Omega_1 = 0 \quad (23)$$

kde $v_{in}v_{i1}$ je součin první a n -té složky i -tého vlastního vektoru. Pro $i=1$ platí

$$v_{1n}v_{11} = 1/p_n J_c$$

p_n ...převod mezi n -tým a 1.členem. Pro 1.složku pohybu n -té souřadnice tedy platí

$$\ddot{x}_{1n}(t) = \frac{M_K(t)}{p_n J_c} \text{ (rovnice urychlování tuhého systému na konečnou rychlost suportu } v_p \text{).}$$

Ostatní složky ($i=2...N$) v (23) představují nežádoucí vibrace n -té souřadnice, jejichž tvar (po odeznění budicího momentu!!) vyjde pomocí residuové věty

$$x_n(t) = \sum_{i=2}^N v_{in}v_{i1} \frac{|M_K(j\Omega_i)|}{\Omega_i} \sin(\Omega_i t + \alpha_i), \quad i=2...N, \quad t \in (T_0, \infty) \quad (24)$$

kde $|M_K(j\Omega_i)|$, α_i jsou hodnoty amplitudy a fáze frekvenčního spektra $M_K(j\omega)$ budicího momentu na příslušných vlastních kmitočtech systému. Vibrace n -té souřadnice mohou nabýt maxima

$$X_{n \text{ MAX}} = \sum_{i=2}^N \left| v_{in}v_{i1} \frac{|M_K(j\Omega_i)|}{\Omega_i} \right| \quad (25)$$

*Poznámka: Pro zpětnovazební řízení polohy by bylo vhodné, aby se hodnota $X_{n \text{ MAX}}$ „schovala“ pod rozlišovací úroveň snímače polohy, čímž by se zamezilo případnému vzniku samobuzených kmitů regulace. Z tohoto hlediska lze spekulovat s umístěním odměřování polohy na „nejklidnější“ místo, kde je příslušný součet (25) minimální. Z několika dalších důvodů se ale odměřovací systém většinou instaluje na samotný konec kinematického řetězce (v **obr.4** je jím suport).*

Vzhledem k tomu, že průběhy amplitudových spekter pulzních signálů mají charakteristický s kmitočtem převážně klesající průběh, jeví se s ohledem na zlomek v (25) jako nejškodlivější první (nejnižší) nenulový vlastní kmitočet systému (čitatel s klesajícím Ω roste a jmenovatel klesá!!). Pro přibližné seřízení regulace je tedy možné pracovat pouze s dvojhmotovou náhradou, vzniklou kondenzací původního vícehmotového modelu – viz. **lit. [1]**.

2.1. Dvojhmotový systém

Za dvojhmotové systémy lze považovat pohony vřeten obráběcích strojů s vloženým pružným řemenem, nebo i zjednodušeně pohon posuvu z **obr.4**, je-li dominantní poddajností ozubený řemen mezi motorem a šroubem. Jediným relevantním kmitočtem v (24) pro určení vibrací zátěže J_L při rozběhu pulzem momentu na kotvě motoru J_M je

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{J_L} + \frac{k}{p^2 J_M}}$$

J_M , J_L ...momenty setrvačnosti motoru a zátěže, $J_C = J_M + J_L/p^2$

$p = \omega_M/\omega_L$...vložený převod, k ...torzní tuhost převodu redukována na hřídel zátěže.

Výše uvedeným postupem vyjde Laplaceův obraz pohybu zátěže ve tvaru

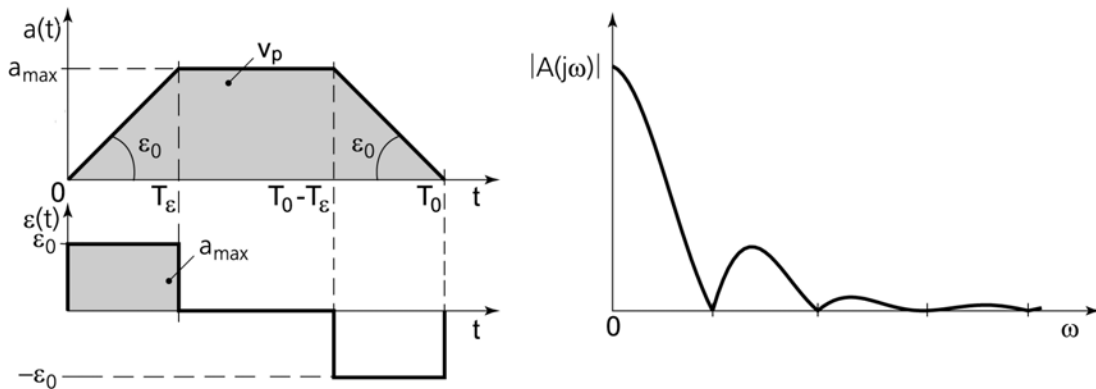
$$\varphi_L(s) = \frac{M_K(s)}{s^2 pJ_c} + \frac{M_K(s)}{pJ_c(s^2 + \Omega^2)} \quad (26)$$

kde první sčítanec vyjadřuje její pohyb při dokonale tuhém řemenu.

Poznámka: Podíl $M_K(t)/pJ_c$ lze chápat jako požadované zrychlení zátěže $a(t)$ při urychlování na konečnou rychlost $\int_0^{T_0} a(t) dt$. Stačí tedy místo frekvenčního spektra $M_K(j\omega)$ zkoumat spektrum zadávaného zrychlení zátěže $A(j\omega)$, takže amplituda kmitů bude (srovnej s (15))

$$\Delta\varphi_{LMAX} = \frac{|A(j\Omega)|}{\Omega} \quad (27)$$

Příklad: Souměrný lichoběžníkový průběh zrychlení $a(t)$ s maximální úrovní a_{MAX} a délkou T_0 – viz **obr. 5** nahoře. Jedná se o velmi častý případ rozbíhání pohonu s konstantní hodnotou ryvu $\varepsilon = da/dt$ akcelerací z klidu na požadovanou rychlost, která je dána plochou lichoběžníka $v_P = a_{MAX}(T_0 - T_\varepsilon)$. Zadávaný ryv je $|\varepsilon_0| = a_{MAX}/T_\varepsilon$.



Obr.5 Akcelerace s konstantním ryvem, amplitudové spektrum zrychlení

Frekvenční spektrum pulzu zrychlení:

Průběh ryvu je obdélníkový – viz **obr. 5** dole, takže jeho Laplaceův obraz je dán součtem posunutých Heavisideových funkcí:

$$L\{\varepsilon(t)\} = \frac{\varepsilon_0}{s} (1 - e^{-T_\varepsilon s} - e^{-(T_0 - T_\varepsilon)s} + e^{-T_0 s})$$

$$A(s) = L\{a(t)\} = L\left\{\int \varepsilon(t) dt\right\} = \frac{\varepsilon_0}{s^2} (1 - e^{-T_\varepsilon s} - e^{-(T_0 - T_\varepsilon)s} + e^{-T_0 s}) \quad (28)$$

Dosazením $s = j\omega$, rozepsáním exponenciálních funkcí a s využitím vzorců pro součty goniometrických funkcí obdržíme Fourierův obraz (frekvenční spektrum) funkce $a(t)$ ve tvaru

$$A(j\omega) = \frac{4\varepsilon_0}{\omega^2} \sin \frac{\omega T_\varepsilon}{2} \cdot \sin \frac{\omega(T_0 - T_\varepsilon)}{2} \cdot e^{-j\omega T_0/2} \quad (29)$$

Poznámka: Poslední součinitel v (29) vyjadřuje pouze časové posunutí lichoběžníku o $T_0/2$ od počátku doprava a neovlivní velikost absolutní hodnoty $|A(j\omega)|$.

Superponovaný kmitavý pohyb $\Delta\varphi_L(t)$:

Použitím (4) a (28) vychází

$$\Delta\varphi_L(s) = \frac{\varepsilon_0}{s^2(s^2 + \Omega^2)} \left(1 - e^{-T_\varepsilon s} - e^{-(T_0 - T_\varepsilon)s} + e^{-T_0 s} \right) \quad (30)$$

Dále provedeme rozklad na částečné zlomky a zpětnou L. transformaci dílčího vztahu

$$L^{-1} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{s^2(s^2 + \Omega^2)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{\Omega^2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + \Omega^2} \right) \right\} = \frac{\varepsilon_0}{\Omega^2} \left(t - \frac{\sin \Omega t}{\Omega} \right) \quad (31)$$

Funkce $\Delta\varphi_L(t)$ vznikne rozšířením funkce (31) přidáním dalších tří funkcí, posunutých o časy T_ε , $T_0 - T_\varepsilon$, T_0 směrem vpravo:

$$\Delta\varphi_L(t) = \frac{\varepsilon_0}{\Omega^2} [t - (t - T_\varepsilon) - (t - T_0 + T_\varepsilon) + t - T_0] - \frac{\varepsilon_0}{\Omega^3} [\sin \Omega t - \sin \Omega(t - T_\varepsilon) - \sin \Omega(t - T_0 + T_\varepsilon) + \sin \Omega(t - T_0)]$$

První sčítanec je nulový a sloučením goniometrických funkcí u druhého sčítance vyjde

$$\Delta\varphi_L(t) = \frac{4\varepsilon_0}{\Omega^3} \sin \frac{\Omega T_\varepsilon}{2} \cdot \sin \frac{\Omega(T_0 - T_\varepsilon)}{2} \cdot \sin \Omega(t - T_0/2), \quad t \in (T_0, \infty) \quad (32)$$

(srovnej s (29) po dosazení za $\omega = \Omega$!). Maximální možná amplituda kmitů nastane při $T_\varepsilon = T_0/2$ a zároveň $T_0 = 2\pi/\Omega$ (resp. $T_0 = T$, kde T je doba kmitu dvojhmotové soustavy)

$$\Delta\varphi_L(t)|_{MAX} = 4\varepsilon_0/\Omega^3 \quad (33)$$

Poznámky: 1) Výraz (33) potvrzuje rozhodující vliv ryvu na kmitání hnané hmoty a zásadní roli kmitočtu Ω při potlačení vibrací (v tomto případě je jeho role zvýrazněna dokonce třetí mocninou!). Dosažitelný ryv na konkrétním stroji je tedy výmluvným nepřímým ukazatelem dynamických kvalit mechanické konstrukce. Tato skutečnost je možnou příčinou účelové a do jisté míry i klamavé reklamy některých výrobců, kteří rádi prezentují dosažitelné rychlosti a zrychlení svých NC strojů, ryv však nikoliv

2) Spolehlivým zásahem proti samobuzenému rozkmitání zpětnovazebního obvodu je taková volba kinematických parametrů při akceleraci i deceleraci, aby ve vztahu (32) vyšla nulová amplituda, tj.

$$a) \quad \Omega T_\varepsilon / 2 = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{a_{MAX}}{2\varepsilon_0} = n\pi, \text{ tj. } a_{MAX} / \varepsilon_0 = n \cdot T, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b) \quad \Omega(T_0 - T_\varepsilon) / 2 = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{v_P}{2a_{MAX}} = n\pi, \text{ tj. } v_P / a_{MAX} = n \cdot T$$

3) a) v případě $T_\varepsilon = T_0/2$ vzniká trojúhelníkový průběh zrychlení, u kterého platí rovnost $v_P / a_{MAX} = a_{MAX} / \varepsilon_0$. Podmínka nulové amplitudy zní

$$T_\varepsilon = v_P / a_{MAX} = a_{MAX} / \varepsilon_0 = n \cdot T$$

b) limitním přechodem pro $T_\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$ vzniká obdélníkový průběh zrychlení, přičemž konečná rychlost je $v_p = a_{MAX} T_0$. Frekvenční spektrum získáme z (29) použitím známé limity

$$\left. \frac{\sin x}{x} \right|_{x \rightarrow 0} = 1, \text{ takže jeho výsledný tvar je}$$

$$A(j\omega) = \frac{2a_{MAX}}{\omega} \sin \frac{\omega v_p}{2a_{MAX}} \cdot e^{-j\omega T_0/2}$$

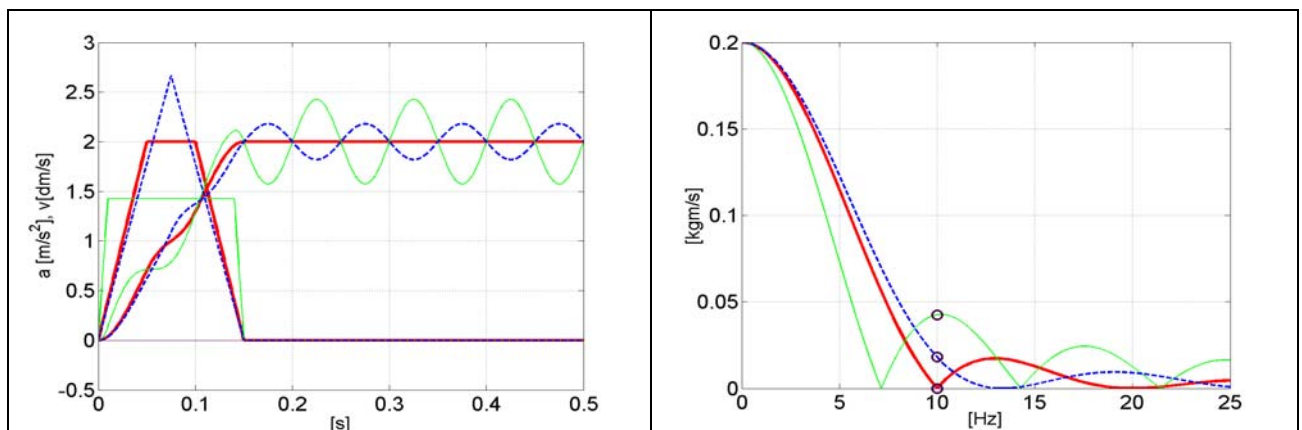
Hnaná hmota nebude kmitat v případě, že $|A(j\Omega)| = 0$, tj. $T_0 = v_p / a_{MAX} = n \cdot T$.

4) Obdélníkový průběh zrychlení nelze reálně získat, neboť skoková změna proudu je kvůli indukčnosti vinutí motoru nerealizovatelná. V praxi je nejčastější průběh blízký se lichoběžníku (někdy bohužel i trojúhelníku, který může nastat v případě, že povolený ryv stroje je nízký a čas, resp. dráha pro rozjezd jsou krátké). V případě malého ryvu se požadované zrychlení nemusí vůbec dosáhnout a instalovaný moment, tedy i proud motoru je zbytečně velký

5) Z obou podmínek v pozn. 2a,b) je pro zásah do řídicího signálu aktuálnější první, neboť rychlost v_p je většinou předepsána použitou technologií a podmínka 2b) může vést na nesplnitelné zrychlení.

Podrobný rozbor tří výše uvedených případů, typických při dráhovém řízení NC strojů, je proveden v lit.[1].

Na obr.6 vlevo je znázorněn rozběh netlumeného dvojhmotového systému s vlastním kmitočtem $\Omega = 2\pi \cdot 10\text{Hz}$ na konečnou rychlost zátěže $v_p = 0,2\text{m/s}$ se zadávaným lichoběžníkovým profilem zrychlení. Pro simulaci byl použit vztah (26). Při stejné době akcelerace $T_0 = 150\text{ms}$ je z hlediska kolísání rychlosti nejvýhodnější ryv $\varepsilon_0 = 40\text{m/s}^3$ (silné čáry). Při ryvu $\varepsilon_0 = 143\text{m/s}^3$ je sice potřebné maximální zrychlení (tedy i maximální proud motoru) o čtvrtinu menší, rychlost ale silně kolísá (slabé čáry). Trojúhelníkový profil je nevýhodný jak z hlediska klidnosti chodu, tak z hlediska potřebné velikosti motoru. Na obrázku vpravo jsou odpovídající amplitudová spektra všech tří průběhů se zvýrazněním jejich velikostí na vlastním kmitočtu systému 10Hz .



Obr.6 Rozběh dvojhmotového systému (vlevo časové průběhy zadávaných zrychlení a skutečných rychlostí, vpravo amplitudová spektra zrychlení)

3. Závěr

Předběžnou spektrální analýzou povelů, zadávaných do pohonu posuvové osy, lze předvídat úroveň jejích vibrací. Úpravou průběhu urychlování stroje na určitou rychlost, tj. vhodným umístěním nulových hodnot spektra zrychlení $A(j\omega)$, se lze dokonce úplně vyhnout kmitání hnané hmoty nebo alespoň stlačit amplitudu kmitů pod rozlišovací úroveň odměřovacího systému.

Cílem dalšího výzkumu by mělo být nalezení vhodného postupu modifikace NC kódu zadávaného obráběcímu stroji s cílem minimalizovat vibrace. Dnešní postupy tvorby NC kódů pro dráhové řízení pomocí lineární, kruhové, resp. splineové interpolace a programů CAD - CAM jsou však univerzální a pro uživatele dosti uzavřené (např. CATIA, SOLIDWORKS, IDEAS, SURFCAM atd.). V praxi tedy bude nutno provést výše zmíněnou analýzu a úpravu spekter ještě před obráběním a podle individuálních vlastností použitého stroje. Tento postup může pomoci v případě, kdy by nebylo možno aplikovat jiné složitější algoritmy časově optimálního řízení v reálném čase.

4. Literatura

- [1] Bubák, A.: Zvyšování dynamiky a přesnosti posuvových os obráběcích strojů, *Disertační práce, ČVUT 10/2004*
- [2] Panovko, J., Gubanov, I.: Stabilita a kmitání pružných systémů, *vyd. Nauka, Moskva 1979*
- [3] Kreyszig, E.: Advanced Engineering Mathematics, *J. Wiley & Sons, New York 1994*
- [4] Souček, P.: Servomechanismy ve výrobních strojích, *vyd. ČVUT, Praha 2004*

Tyto výsledky byly získány za finančního přispění Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy v rámci podpory projektu výzkumu a vývoje LN00B128.