



INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

SIMULATION OF NONLINEAR DYNAMIC PHENOMINON IN ADVANCED SPUR GEAR MESH

Z. Doležal, V. Široká*

Summary: *A new method and a computer program have been developed for simulation and computation of operational load of gears. The gear mesh stiffness and transmission errors are in this method assumed to be non-linear functions of gear tooth kinematics imperfection under transmitted load that take into account relative unloaded tooth errors, load deflections and tooth profile modification. The performed analysis proved that the mesh load influences the contact ratio and internal excitation and that is why these non-linear properties are taken into account. Consequently the computation must be performed by iteration procedure.*

1. Úvod

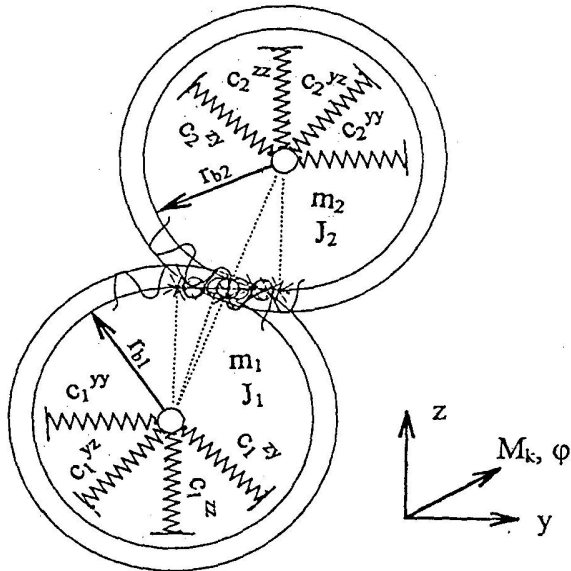
Modelování dynamických jevů v mechanických soustavách s ozubenými koly je věnována značná pozornost již více než padesát let. Přesto teoretické znalosti v této vědní oblasti stále značně zaostávají za potřebami náročnější technické praxe. A to především proto, že vlastnosti dosud používaných výpočtových modelů jsou stále příliš odlišné od vlastností reálných, zvláště pak vysokootáčkových převodových soustav.

Nejsložitějším a stále nedostatečně zvládnutým problémem všech dosud používaných výpočtových modelů zůstává samotné ozubení. Ozubení s velmi složitou problematikou svého vnitřního buzení a tlumení generovaného přímo v záběrech spoluzabírajících párů zubů, způsobenou významnými interaktivními vlivy výrobních úchylek, poddajných deformací provozně zatíženého ozubení a výškovými modifikacemi spoluzabírajících boků zubů. Tyto složité vlivy jsou však dosud ve všech známých či publikovaných pracích, zaměřených na modelování dynamických jevů a zvláště silových poměrů v záběrech soukolí, zpravidla zanedbávány. Ve většině známých prací bývá prokazatelně nejvýznamnější zdroj vnitřního buzení, způsobený poddajnými deformacemi provozně zatíženého ozubení, zanedbáván. Zanedbává se i velmi významná výšková modifikace pracovních boků zubů, navrhovaná právě na potlačování tohoto nejvýznamnější zdroj vnitřního buzení. Vnitřní zdroje buzení jsou pak zjednodušovány na prosté funkce času, což neodpovídá vlastnostem reálného ozubení.

Některé složitosti modelování dynamických jevů a silových poměrů, zaměřeného na odstraňování uvedených zjednodušení, byly již částečně naznačeny v loňském příspěvku. V letošním příspěvku si naznačíme další zpřesnění a rozšíření řešeného nového modelování.

2. Modelování dynamických jevů v záběru ozubení

Výchozí matematický model pro simulaci obecně nelineárních dynamických jevů, které se vyskytují v reálné dynamické soustavě tvořené jedním párem ozubených kol s moderním čelním ozubením, obecně uložených na neisotropně poddajných a tlumených podporách, představuje soustavu šesti simultánních nelineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s velmi složitě proměnnými parametry či funkcemi.



Pro sestavení těchto šesti výchozích pohybových rovnic dynamické soustavy, naznačené (včetně kartézské souřadnicové soustavy) na obr.1, lze použít Lagrangeových rovnic druhého druhu. Za předpokladu konstantní rychlosti záběru ozubení na záběrové přímce a po zavedení provozní nerovnoměrnosti převodu (či relativní výchylky ozubených kol) q společně s redukovanou hmotností ozubených kol m_{red} , pro něž platí

$$q = y_1 + \varphi_1 r_{b1} - y_2 + \varphi_2 r_{b2} \quad (1)$$

$$m_{red} = J_1 J_2 / (J_1 r_{b2}^2 + J_2 r_{b1}^2), \quad (2)$$

Obr.1 Modelovaná dynamická soustava

můžeme výchozí soustavu šesti pohybových rovnic zredukovat na soustavu pěti pohybových rovnic a tuto pak zapsat

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_1^{yy} \dot{y}_1 + k_1^{yz} \dot{z}_1 + k\dot{q} + c_1^{yy} y_1 + c_1^{yz} z_1 + bc(q - v) &= 0 \\ m_1 \ddot{z}_1 + k_1^{zy} \dot{y}_1 + k_1^{zz} \dot{z}_1 + c_1^{zy} y_1 + c_1^{zz} z_1 - F_T &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_2^{yy} \dot{y}_2 + k_2^{yz} \dot{z}_2 - k\dot{q} + c_2^{yy} y_2 + c_2^{yz} z_2 - bc(q - v) &= 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_2^{zy} \dot{y}_2 + k_2^{zz} \dot{z}_2 + c_2^{zy} y_2 + c_2^{zz} z_2 - F_T &= 0 \\ (\ddot{q} - \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) m_{red} + k\dot{q} + bc(q - v) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

kde jsou:

- b ... šířka ozubení
- c ... periodicky proměnná celková měrná tuhost ozubení
- $c_{1,2}^{rs}$... tuhosti podpor ozubených kol 1 a 2, kde $r, s = y, z$
- F_T ... periodicky proměnná výslednice třecích sil v záběru ozubení
- $J_{1,2}$... hmotné momenty setrvačnosti ozubených kol 1 a 2
- k ... součinitel ekvivalentního viskózního tlumení v záběru ozubení
- $k_{1,2}^{rs}$... tlumení podpor ozubených kol 1 a 2, kde $r, s = y, z$
- $m_{1,2}$... hmotnosti ozubených kol 1 a 2
- $r_{b1,2}$... poloměry základních kružnic ozubených kol 1 a 2
- v ... periodicky proměnná nerovnoměrnost převodu pod zatížením
- $y_{1,2}, z_{1,2}$ a $\varphi_{1,2}$... výchylky ozubených kol 1 a 2, patrné z obr. 2.1.

(4)

Je ovšem zřejmé, že přesnost provozní nerovnoměrnosti převodu q , získaná řešením soustavy pohybových rovnic (3), závisí především na přesnosti parametrů c a v , případně i F_T , představujících velmi složité zdroje vnitřního vysokofrekvenčního buzení generovaného přímo v záběrech zubů. (Jelikož vnitřní buzení silami F_T bylo podrobně řešeno již v lit. [12] a závisí mimo jiné i na provozním zatížení zubů, nebudeme je zde ještě uvažovat).

Za zmínku jistě stojí, že téměř ve všech dosud publikovaných pracích, ať již zahraničních či tuzemských, parametry c a v jsou uvažovány pouze jako funkce času, tj. ve tvaru $c(t)$ a $v(t)$. Součinitel záběru profilu čelního ozubení ε_α je pak uvažován konstantní, získaný jen geometrickým výpočtem. Ovšem jak již bylo uvedeno v lit. [10], či loňském příspěvku na této konferenci, taková značná zjednodušení vedou k nesprávným výpočtovým výsledkům a pro technickou praxi často nebezpečným a zavádějícím závěrům.

V současném stadiu modelování jsou již parametry c a v uvažovány jako vysoce složité nelineární funkce polohy záběru x a provozní síly F_Z zatěžující ozubení, tj. ve tvaru $c(x, F_Z)$ a $v[x, c(x, F_Z), F_N]$, kde ovšem provozní síla F_Z je již sama vysoce složitou funkcí nejen $c(x, F_Z)$ a $v[x, c(x, F_Z), F_N]$, ale i provozních otáček či rychlosti záběru. Takové výpočty je již ovšem nezbytné provádět iteračním postupem, jehož součástí musí být výpočty dynamických jevů včetně silových poměrů, blíže popsanych již v loňském příspěvku a odvozených v lit. [6].

3. Modelování silových poměrů v záběru ozubení

Matematický model pro simulaci silových poměrů v záběru čelního ozubení s přímými zuby byl již popsán v loňském příspěvku. Z toho je patrné, že použijeme-li pro obecně k -tý iterační výpočet (kde $k = 0, 1, 2, \dots$) celkové měrné tuhosti a relativní nepřesnosti ozubení pod zatížením symbolické vztahy

$$c^{(k)} = \sum_S c_S^{(k)} \lambda_S^{(k)} \quad (5)$$

$$v^{(k)} = \frac{F_N - b \sum_S c_S^{(k)} (f_S - \varepsilon_S - \delta_{SZ} - \delta_{SK}) \lambda_S^{(k)}}{bc^{(k)}}, \quad (6)$$

pak pro $k+1$ výpočet celkové síly působící v záběru ozubení a dílčí síly zatěžující s -tý pár spoluzabírajících zubů (kde obecně $s = -2, -1, 0, +1, +2$) je výhodné použít symbolické vztahy

$$F_Z^{(k+1)} = F_Z^{(k)} + bc^{(k)} (q^{(k)} - v^{(k)}) \quad (7)$$

$$F_S^{(k+1)} = F_S^{(k)} + bc_S^{(k)} (q^{(k)} - v^{(k)}) \quad (8)$$

kde jsou (bez značení iterací):

F_Z ... celková síla zatěžující ozubení

F_S ... dílčí síla zatěžující s -tý pár spoluzabírajících zubů v záběru

c_S ... měrná tuhost s -tého páru spoluzabírajících zubů

f_S ... relativní úchylka evolventních profilů s -tého páru spoluzabírajících zubů

ε_S ... relativní modifikace evolventních profilů s -tého páru spoluzabírajících zubů

δ_{SZ} ... vůle mezi profily s -tého páru spoluzabírajících zubů před záběrovou úsečkou

δ_{SK} ... vůle mezi profily s -tého páru spoluzabírajících zubů za záběrovou úsečkou

$\lambda_S = 1$ nebo 0 , v závislosti zda je nebo není s -tý pár zubů v záběru

4. Ukázky simulačních výpočtů

Aby bylo možno posoudit správnost a významnost nových výpočtových algoritmů či naprogramovaných výpočtových postupů pro praktické použití, byla provedena celá řada ověřovacích výpočtů pro reálné ozubení. A to pro ozubení druhého převodového stupně reduktoru leteckého turbovrtulového motoru M 602, blíže popsáno v lit. [2] a [13], uvažovaného s různými úchytkami základních roztečí $\Delta = (p_{b1}-p_{b2})$ [μm], s částečnou či nulovou výškovou modifikací ε [μm] [5], při různých provozních otáčkách hnacího pastorku n_1 (ot/min) a s různým jmenovitým zatížení ozubení F_N [N]. Blíže viz lit. [13].

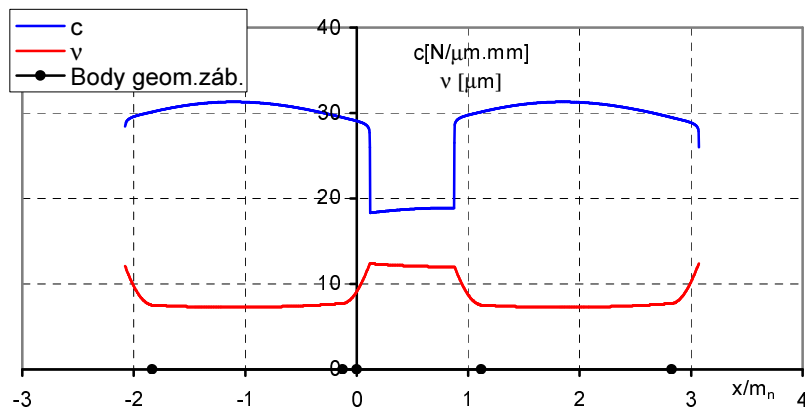
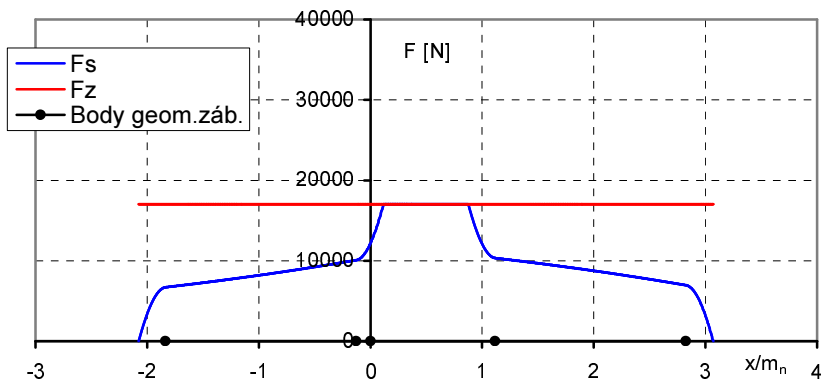
Pozornost byla zaměřena nejen na samotné výpočty, ale s ohledem na možnosti rychlého a dostatečně přesného posuzování docílených výsledků i na jejich grafické zpracování a uspořádání. Na dále uvedených obrázcích jsou postupně uvedeny výsledky výpočtů jen nulté a poslední iterace, poskytující již dostatečně ustálené a vysoce přesné výsledky. Na každém z uvedených obrázků jsou vedle zadání postupně vyneseny i graficky zpracované výsledky, vždy v rámečku, představující odshora dolů:

- a) výchozí zatížení ozubení $F_Z^{(k)}$ [N] a odpovídající zatížení jednoho páru zubů $F_S^{(k)}$ [N], získané pro zadání uvedené v popisu obrázku a pro parametry uvedené v další části pod b)
- b) periodicky proměnnou celkovou měrnou tuhost ozubení $c^{(k)}(x, F_Z^{(k)})$ [N/ $\mu\text{m}\cdot\text{mm}$] a periodicky proměnnou nepřesnost ozubení $v(x, c^{(k)}(x, F_Z^{(k)}), F_N)$ [μm] pod výše a v popisu uvedeným zatížením, získanými iteračním postupem simultánně s výpočtem $F_S^{(k)}$ [N], a to již s ohledem na reálnou délku záběru postupem odvozeným a popsáním v lit. [9]. V případě nulté iterace, kdy $k=0$, platí $F_Z^{(0)} = F_N$ (tj. jmenovité zatížení ozubení). V případech kdy $k > 0$, $F_Z^{(k)}$ a $F^{(k)}$ představují vždy výsledky výpočtů předchozí iterace
- c) provozní nerovnoměrnost převodu $q^{(k)}$, získanou pro příslušný iterační krok řešením pohybových rovnic (2.3) Hammingem modifikovanou metodou „prediktor-korektor“ čtvrtého řádu, startovanou metodou „Runge-Kutte čtvrtého řádu
- d) provozní zatížení ozubení $F_Z^{(k+1)}$ [N] a odpovídající zatížení zubů $F_S^{(k+1)}$ [N] pro výše a v popisu dole uvedená zadání. Tyto výsledky výpočtů současně představují i výchozí zatížení ozubení a zubů pro další krok iteračních výpočtů, jejichž výsledky by byly uvedeny na následujícím obrázku. (A to vždy až do posledního kroku iteračních výpočtů).

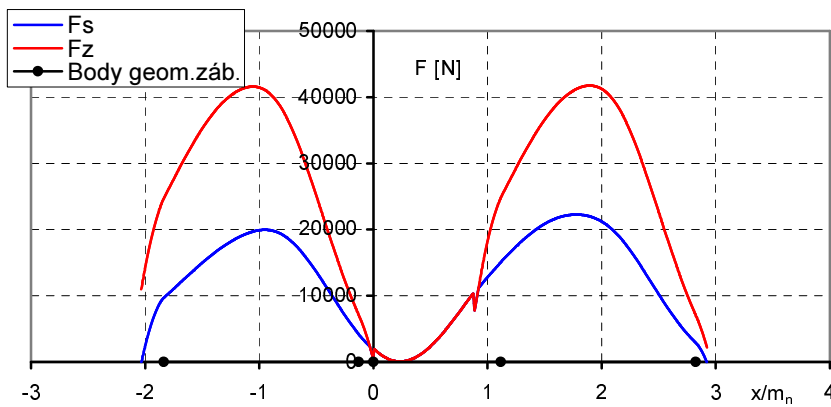
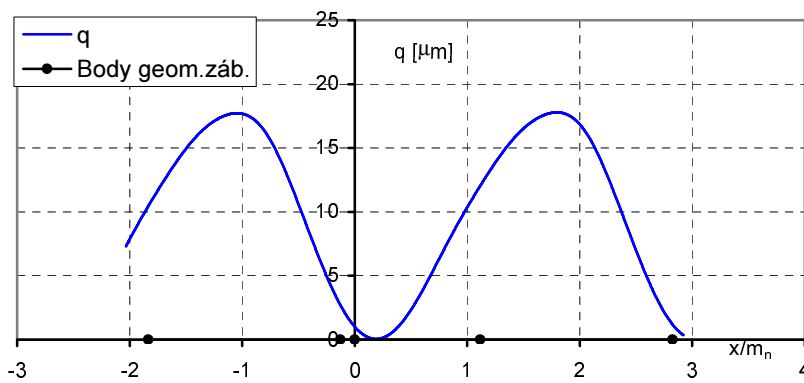
Pozn. 1. Pro porovnání rozdílů mezi geometrickým a provedeným výpočtem, počátky a konce záběru, včetně bodů osamělých záběrů a pólu záběru, určené geometrickým výpočtem, jsou u všech výsledků označovány plnými kroužky.

Pozn. 2. Pro přesnější porovnávání změn $c^{(k)}(x, F_Z^{(k)})$ a $v(x, c^{(k)}(x, F_Z^{(k)}), F_N)$, vznikajících po jednotlivých iteracích (pro jednoduchost zápisů značených c a v), jsou vedle graficky vynášených výpočtových výsledků uváděny i koeficienty Fourierových řad, kterými jsou tyto aproximovány pro řešení pohybových rovnic (2.3) a posouzení ustálení.

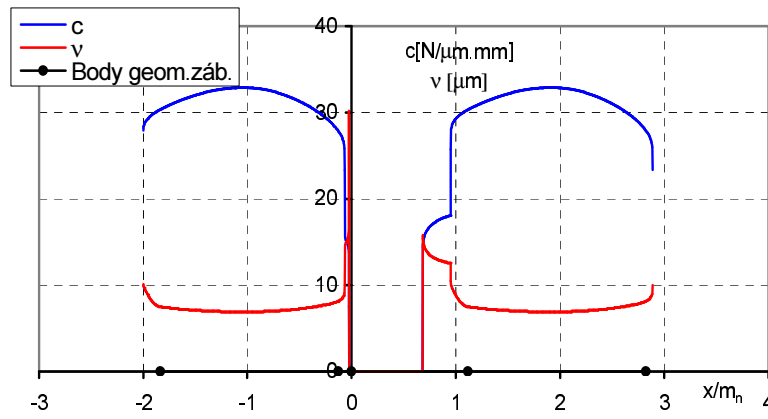
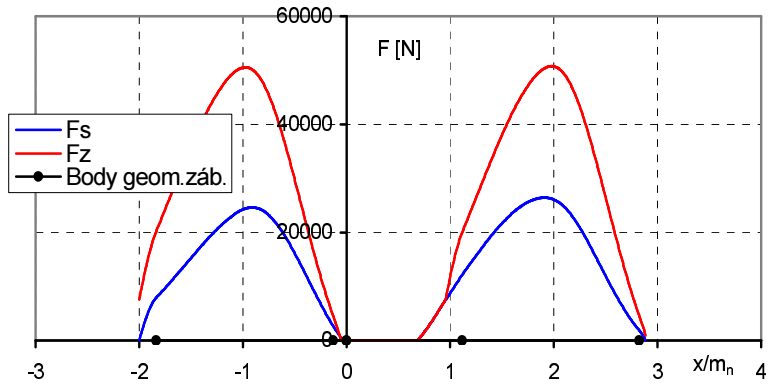
Dále uvedené ukázky vybraných výsledků výpočtů, redukované zde vždy jen na výsledky nultého a posledního, již dostatečně ustáleného iteračního výpočtu, nepotřebují s ohledem na podrobná zadání uvedená vždy pod každým graficky vyneseným výsledkem, bližší komentář.



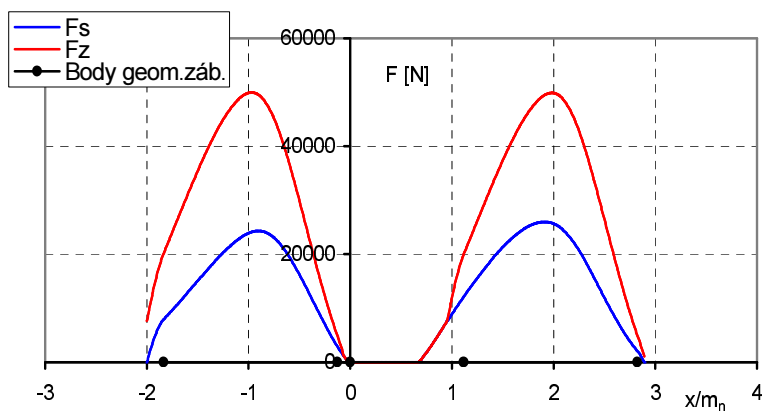
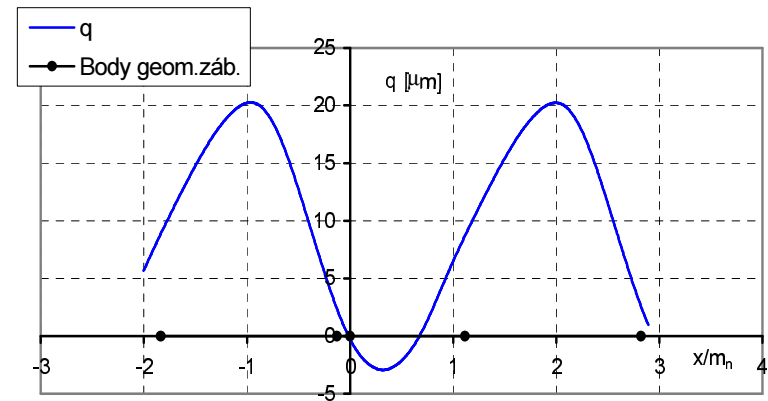
27.442	
5.974	-0.709
3.27	0.058
1.332	0.855
0.23	-1.442
1.062	-0.665
8.913	
2.586	2.419
1.225	-3.059
0.122	-2.061
0.468	1.642
0.462	2.479



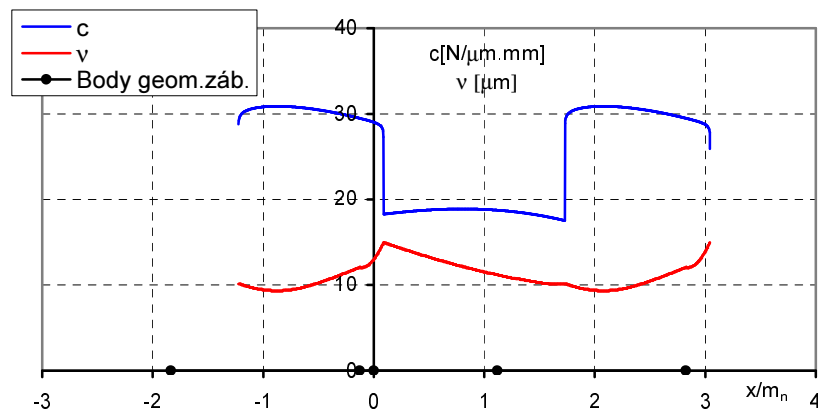
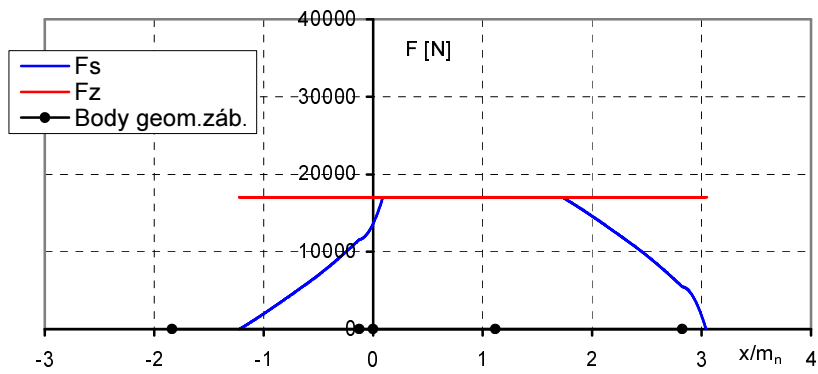
Obr. 2.0 Výsledky výpočtů nulté iterace pro ozubení LCRG bez modifikace, $F_N=17035$ N, $\Delta=0$ μm , $n_1=13000$ ot/min



22.338	
16.257	-0.352
7.967	0.932
2.23	2.521
1.557	-0.436
1.921	1.417
6.246	
2.305	0.1
3.115	1.262
2.48	2.329
1.073	3.078
0.809	2.383

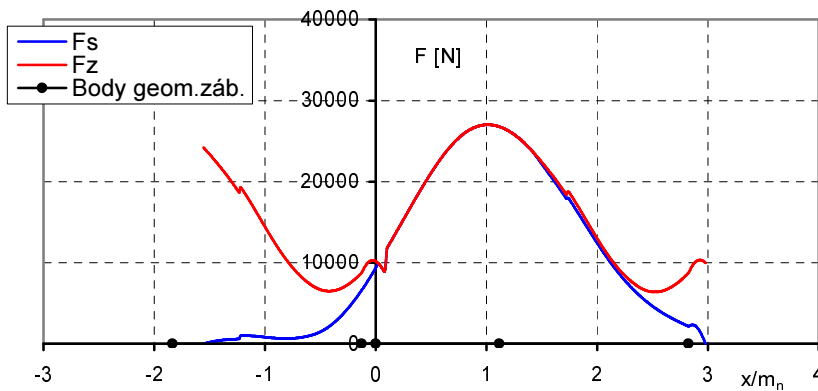
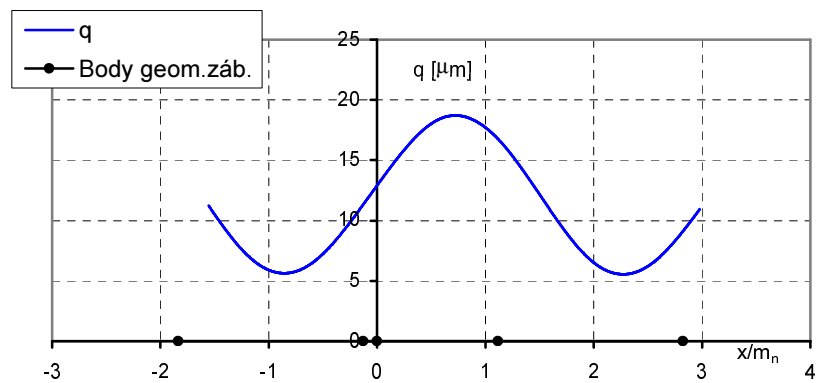


Obr. 2.8 Výsledky výpočtů osmé iterace pro ozubení LCRG bez modifikace, $F_N=17035$ N, $\Delta=0$ μm , $n_1=13000$ ot/min

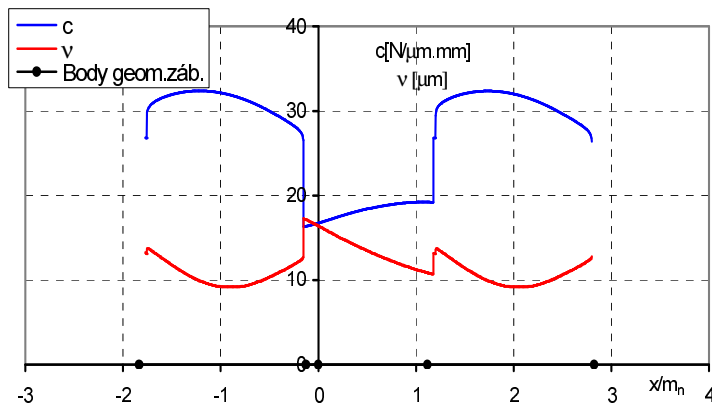
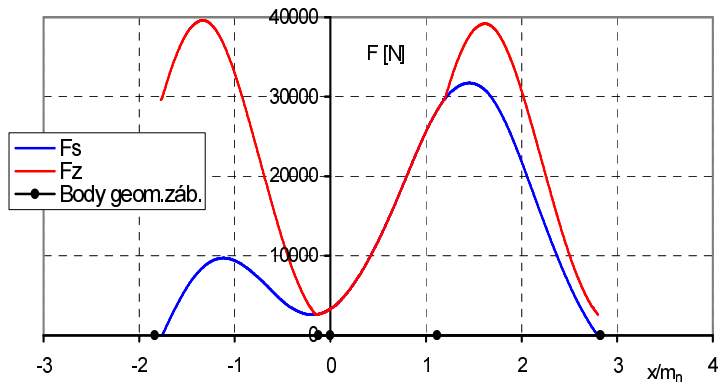


23.737
 7.297 0.198
 1.754 -0.986
 2.046 0.454
 1.309 -0.763
 0.877 0.741

11.388
 2.1 -1.862
 0.653 1.905
 0.194 -1.13
 0.228 2.076
 0.147 -0.372

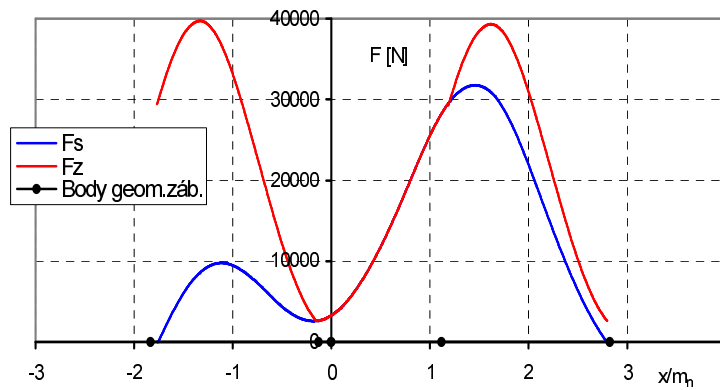
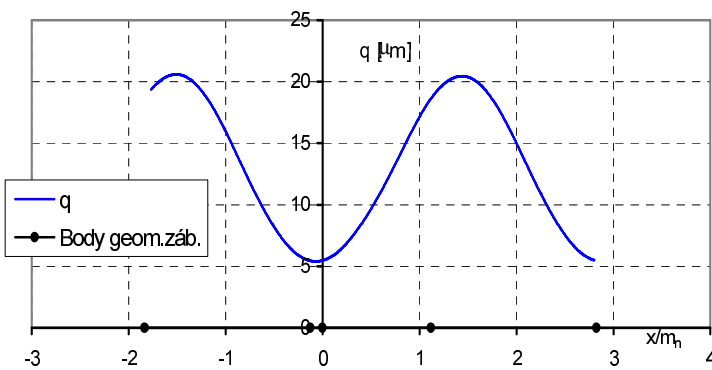


Obr. 3.0 Výsledky výpočtů nulté iterace pro ozubení LCRG s modifikací, $F_N=17035$ N, $\Delta=10$ μm , $n_1=12000$ ot/min

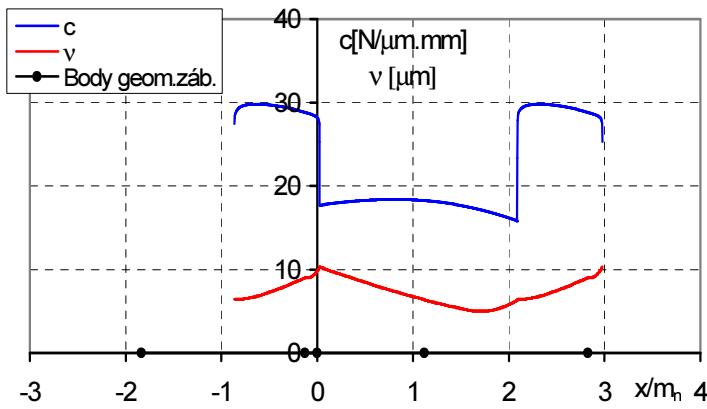
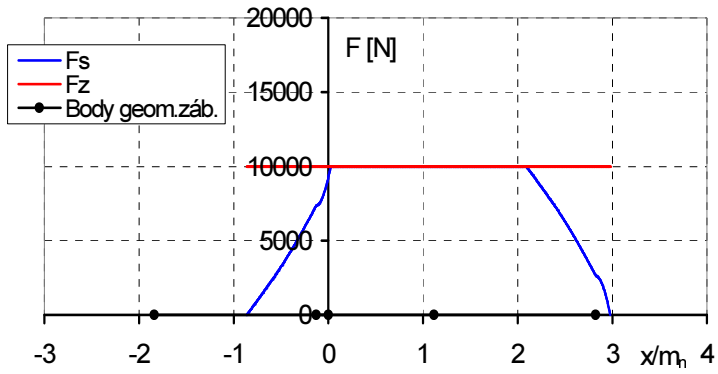


25.212
 8.493 0.005
 0.36 1.327
 2.348 -0.44
 0.84 0.952
 1.152 -0.777

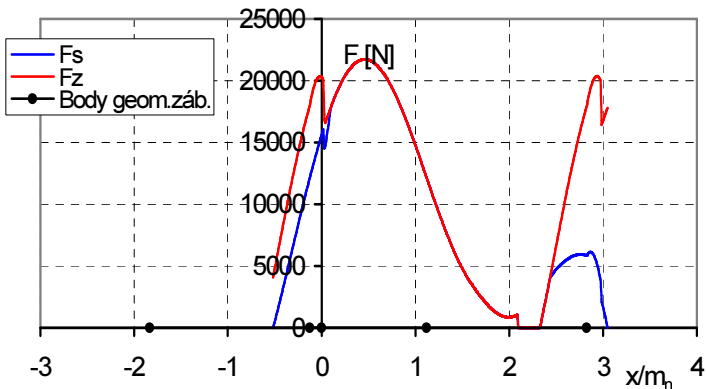
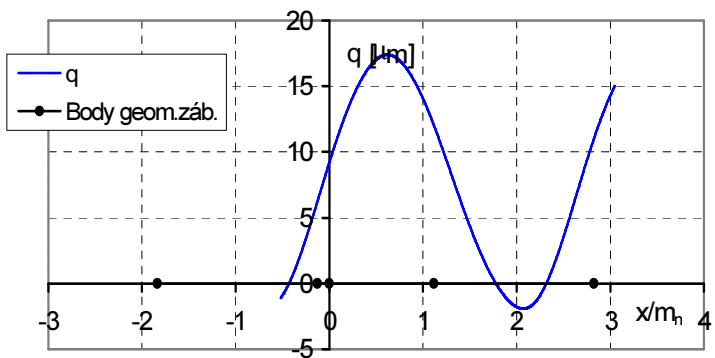
12.018
 2.431 -2.945
 1.575 0.225
 0.375 1.884
 0.593 -0.477
 0.349 1.188



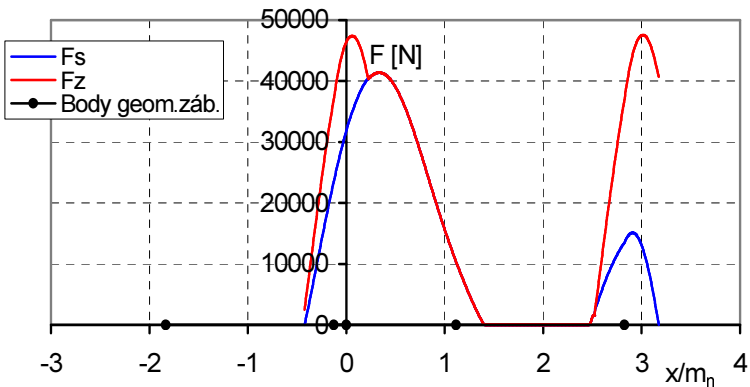
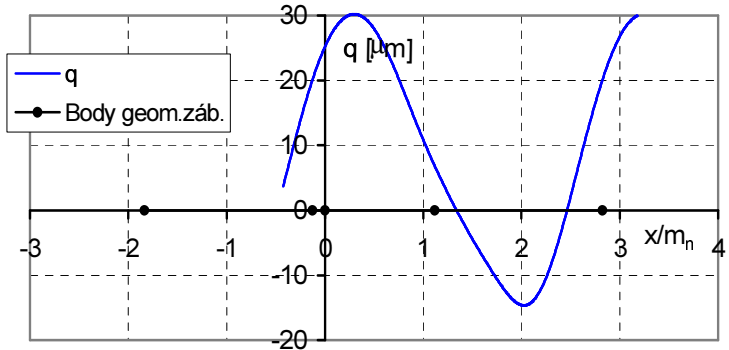
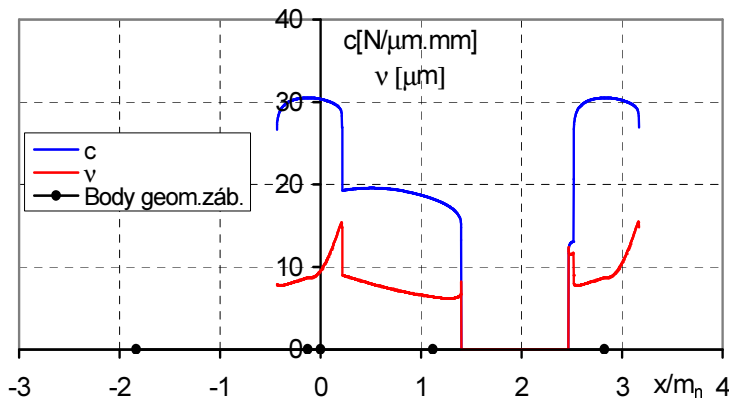
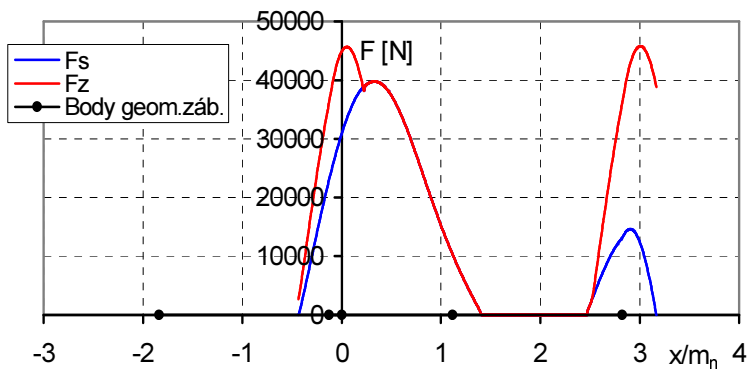
Obr. 3.6 Výsledky výpočtů šesté iterace pro ozubení LCRG s modifikací, $F_N=17035$ N, $\Delta=10$ μ m,



21.248
5.671 0.553
3.894 -0.277
1.043 -0.945
1.073 0.728
1.545 -0.024
7.19
2.105 -0.6
0.211 -2.181
0.259 1.512
0.118 0.467
0.049 -2.951



Obr. 4.0 Výsledky výpočtů nulté iterace pro ozubení LCRG s modifikací, $F_N=10000$ N, $\Delta=10$ μ m, $n_1=12000$ ot/min

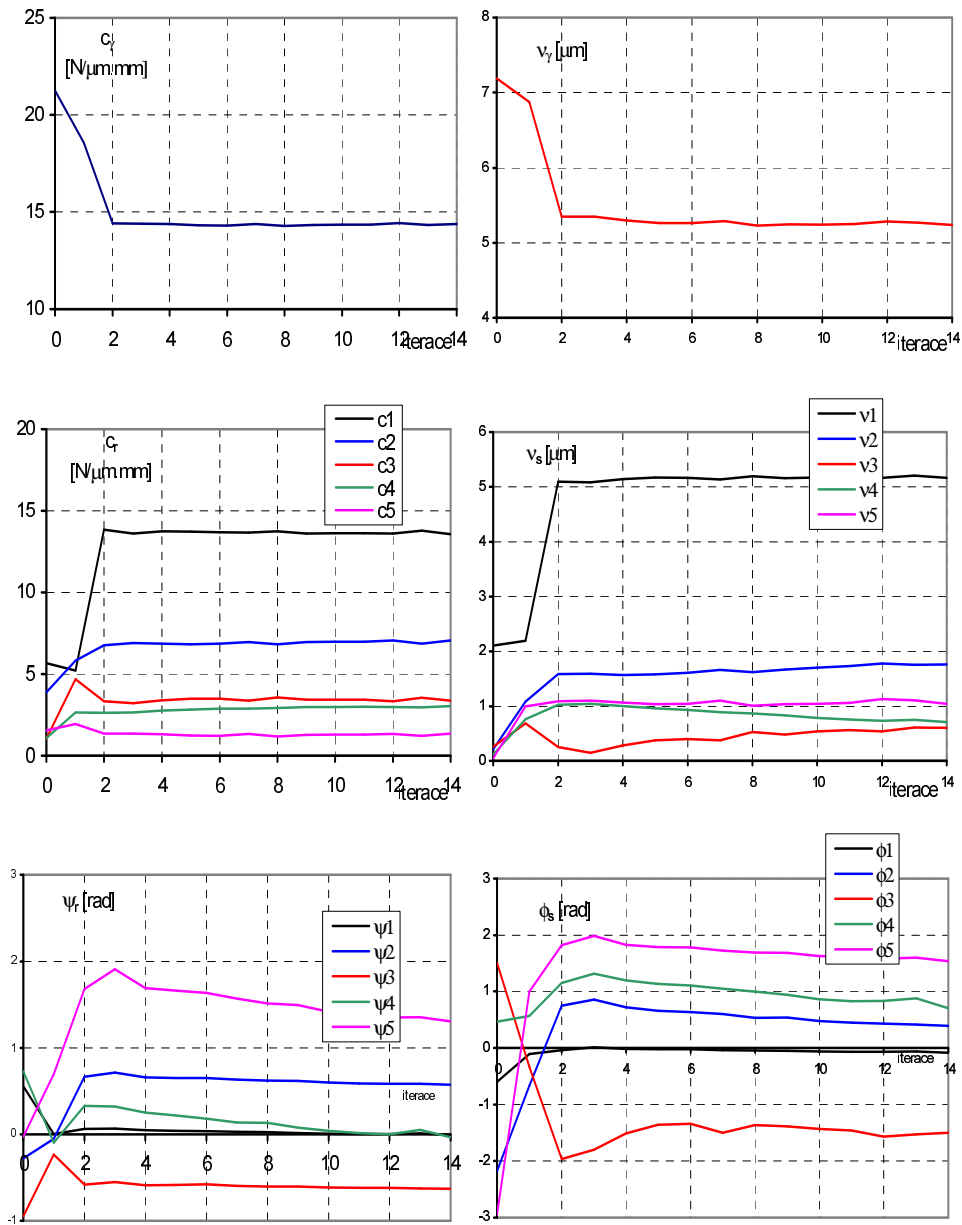


14.384
13.572 -0.005
7.052 0.572
3.376 -0.627
3.043 -0.033
1.352 1.307
5.238
5.161 -0.084
1.762 0.393
0.604 -1.5
0.707 0.702
1.045 1.54

Obr. 4.14 Výsledky výpočtů čtrnácté iterace pro ozubení LCRG s modifikací, $F_N=10000$ N, $\Delta=10$ μ m, $n_1=12000$ ot/min

$$c = c_\gamma + \sum_r c_r \sin(r\omega t + \psi_r)$$

$$v = v_\gamma + \sum_s v_s \sin(s\omega t + \phi_s)$$



Obr. 5 Závíslostí koeficientů Fourierových řad aproximujících c a v na počtu provedených iterací pro modifikované ozuben LCRG s výrobní úchylkou $\Delta=10\mu\text{m}$ při 12000 ot/min. (Viz obr.4.0 a 4.14)

5. Shrnutí a závěr

V příspěvku je uvedeno zpřesněné modelování silně nelineárních dynamických jevů a silových poměrů, které se vyskytují v dynamických soustavách tvořených jedním párem ozubených kol s moderním čelním ozubením s přímými zuby, uložených na isotropně či neisotropně poddajných a tlumených podporách.

U zpřesněného modelu jsou již uvažovány nelineární zdroje vnitřního periodického buzení záběrovou tuhostí c a nerovnoměrností převodu ν jako složité nelineární funkce polohy záběru x a provozní síly F_Z zatěžující ozubení, tj. ve tvaru $c(x, F_Z)$ a $\nu[x, c(x, F_Z), F_N]$, kde ovšem i F_Z je vysoce složitou funkcí nejen $c(x, F_Z)$ a $\nu[x, c(x, F_Z), F_N]$ ale i provozních otáček. Jelikož provozní síla, provozní tuhost ozubení a nepřesnost ozubení pod provozním zatížením nejsou předem známy, výpočty je nezbytné provádět iteračním postupem.

Ověřovací výpočty potvrdily, že nový model čelního ozubení se svými vlastnostmi významně přiblížil vlastnostem reálného čelního ozubení s přímými zuby.

6. Literatura

- [1] DOLEŽAL Z.: Řešení planetových vysokootáčkových převodů metodou komplexních dynamických poddajností. Zpráva VZLÚ V-1319/78
- [2] DOLEŽAL Z.: Výpočty ozubení nové varianty reduktoru M 602. Zpráva VZLÚ R-2652/91.
- [3] DOLEŽAL Z.: Vztahy pro výpočty a kreslení progresivních tvarů čelních zubů a ozubení. Zpráva VZLÚ R-2683/92
- [4] DOLEŽAL Z.: Záběrová poddajnost a tuhost moderního čelního ozubení. Zpráva VZLÚ R-2684/92.
- [5] DOLEŽAL Z.: Analýza buzení generovaného v záběru moderního čelního ozubení. Zpráva VZLÚ-TURBOMOTOR s.r.o. V-003/94
- [6] DOLEŽAL Z.: Modelování dynamických jevů v záběru moderního čelního ozubení. Zpráva VZLÚ-TURBOMOTOR s.r.o. V-018/95
- [7] DOLEŽAL Z.: Modelování silně nelineárních jevů v záběru čelního ozubení. Zpráva VZLÚ-TURBOMOTOR s.r.o. V-007/96
- [8] DOLEŽAL Z.: Vliv dynamického zatížení na únosnost přímých zubů moderního vysokootáčkového ozubení. Zpráva Walter a.s. V-007/97
- [9] DOLEŽAL Z.: Modelování kvazistatických a dynamických jevů v záběrech soukolí s moderním čelním ozubením. Zpráva Walter a.s. V-007/98
- [10] DOLEŽAL Z.: Vliv zatížení čelního ozubení s přímými zuby na zdroje jeho vnitřního vysokofrekvenčního buzení. Zpráva VZLÚ V-1704/2000
- [11] DOLEŽAL Z.: Modelování provozního zatížení přímých zubů moderního čelního vysokootáčkového ozubení. Zpráva VZLÚ V-1732/01
- [12] DOLEŽAL Z.: Modelování T-EHD mazání a tření v záběrech přímých zubů moderního čelního ozubení. Zpráva VZLÚ V-1759/02
- [13] DOLEŽAL Z.: Zpřesněné modelování provozního zatížení přímých zubů v záběrech soukolí s moderním čelním ozubením. Zpráva VZLÚ V-1812/04

Práce byla řešena s podporou projektu AV ČR: „Program podpory cíleného výzkumu a vývoje“, IK-IBS2076353, pod názvem „Metody modelování, analýzy a zákonitostí pohybu v dynamice slabě a silně nelineárních parametrických soustav s děleným tokem výkonu.“