



INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

APPLICABILITY OF HERTZ THEORY IN ROLLING CONTACT SIMULATIONS

R. Halama*, M. Fusek*

Summary: *Using finite element method for fatigue life estimation in rolling contact is very productive. Sometimes, in cases with complicated geometry of contact bodies, it is the only one way solving the task. This article shows some possibilities for consideration of contact pressure distribution using with the pressure moving method. Under the plastic shakedown limit the elastic Hertz normal pressure could be assumed. Above this value the proposed approximation is more accurate. The suggested function was investigated for case of line contacts. All solutions were done using FEM software Ansys 8.0.*

1. Úvod

V technické praxi se často vyskytuje opakované kontaktní namáhání, při kterém vznikají místní cyklické plastické deformace. V případě potřeby odhadu životnosti je účelné použití metody konečných prvků (MKP), protože na rozdíl od různých semianalytických metod lze řešit i složité geometrie těles. Při větších kontaktních tlacích je nutné provádět výpočet pro velký počet cyklů a je výhodné řešit kontaktní úlohu posouváním distribuce kontaktního tlaku (Halama & Lenert, 2004). Průběh kontaktního tlaku však při takovém zatížení neodpovídá Hertzovu řešení elastické úlohy. Je tedy nutné hledat vhodnou aproximační funkci pro přesnější zachycení odpovídajícího kontaktního tlaku.

2. Chování tvárných materiálů při valivém kontaktu

Pro tvárné materiály je charakteristické, že iniciace mikrotrhlin je řízena lokální plastickou deformací. V počátečních cyklech může dojít k přerušení růstu plastických deformací a k přechodu k pružnému chování – tzv. přizpůsobení (shakedown). Chování materiálů u valivého kontaktu je možno rozdělit do čtyř skupin stejně jako při obecném cyklickém zatěžování:

a) *Dokonale pružné* – v tomto stadiu není mez úměrnosti překročena v žádném cyklu a lze použít elastickou Hertzovu teorii (při splnění základních předpokladů, viz např. Timoshenko & Goodier, 1951). V literatuře je možno nalézt analytické vztahy pro stanovení průběhu napětí při valivém kontaktu založené na Hertzově teorii (Sackfield & Hills, 1983).

b) *Elastické přizpůsobení (elastic shakedown)* – plastická deformace se objevuje v prvních cyklech, v následujících cyklech je však chování elastické. Mez elastického přizpůsobení, do

* Ing. Radim Halama, Ing. Martin Fusek: Katedra pružnosti a pevnosti, VŠB-TU Ostrava; 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava tel.: +420-59-7323495, e-mail: radim.halama@vsb.cz

keré nevzniknou žádné plastické deformace ani v počátečních cyklech, může být vyjádřena podmínkou plasticity Von Mises

$$MAX \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} s : s} \right\} = \sigma_Y , \quad (1)$$

kde s je deviátor tenzoru napětí σ a σ_Y je mez kluzu materiálu. MAX v rovnici (1) je bráno vzhledem ke všem bodům zkoumaného tělesa v kontaktu.

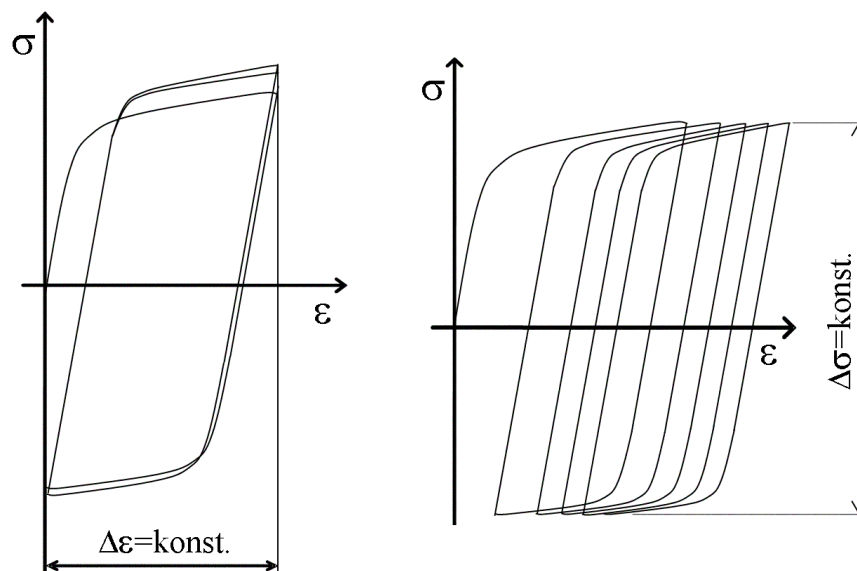
c) *Cyklická plasticita (plastic shakedown)* – je charakterizována uzavřenou hysterezní smyčkou v závislosti napětí – deformace (obr.1 vlevo). Tento případ vede k porušení nízkocyklovou únavou. Cyklická plasticita se objeví, jestliže je překročena mez plastického přizpůsobení. Matematicky lze definovat mez plastického přizpůsobení pomocí ekvivalentní amplitudy napětí (Jiang et al., 2002)

$$\bar{\sigma}_a = MIN \left\{ MAX \left[\sqrt{\frac{3}{2} (s - s_0) : (s - s_0)} \right] \right\} , \quad (2)$$

kde s_0 reprezentuje bod v deviátorovém prostoru napětí, symbol MAX se uvažuje vzhledem k bodům s v zátěžné historii pro dané s_0 a symbol MIN je uvažován pro všechny možné body s_0 . Meze plastického přizpůsobení je dosaženo, jestliže je hodnota ekvivalentní amplitudy napětí rovna mezi kluzu materiálu

$$\bar{\sigma}_a = \sigma_Y . \quad (3)$$

d) *Cyklické tečení (ratchetting)* – postupným nárůstem plastické deformace může dojít k vyčerpání plastických vlastností materiálu (obr.1 vpravo). Při návrhu součástí se snažíme cyklickému tečení vyhnout. Vznik ratchettingu je podmíněn nesymetrií u silového cyklického zatěžování. Stanovení meze zatížení, kdy vznikne ratchetting není dosud uspokojivě dořešeno.



Obr. 1 Plastické přizpůsobení (vlevo) a cyklické tečení (vpravo) u jednoosého namáhání

Vztahy (1) až (3) lze využít pro získání tzv. shakedown mapy, která slouží pro odhad chování materiálu součásti při daných provozních podmínkách. Podrobněji o tomto tématu pojednává také Jiang et al. (2002).

3. Řešení valivého kontaktu pomocí metody konečných prvků

Úlohu valivého kontaktu lze řešit buď s využitím kontaktních prvků pomocí MKP nebo metodou posouvání kontaktního tlaku. První možnost je při řešení odvalování v jednom směru komplikovaná a vznikají problémy s konvergencí při vyšších koeficientech tření. U druhého způsobu se posouvá distribuce povrchového normálového tlaku a třecího napětí. Odpadají problémy s konvergencí, avšak je nutné znát velikost a tvar kontaktní plochy. K tomuto účelu lze použít výsledky numerického výpočtu s využitím kontaktních prvků nebo lze vycházet z experimentu (Halama & Lenert, 2004). Řešení metodou posouvání povrchového tlaku je velmi efektivní. Jednoduše lze tuto metodu aplikovat v komerčních programech založených na MKP definováním okrajových podmínek pomocí funkcí.

Nejvíce používaná funkce pro zadání okrajových podmínek na povrchu je převzata z elastické Hertzovy teorie. Pro ukázkou může sloužit případ liniového kontaktu, kdy lze normálový tlak definovat vztahem

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad (4)$$

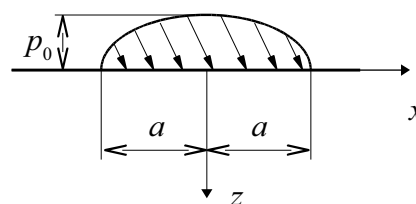
kde a je poloměr elipsy a p_0 maximální hodnota normálového tlaku, kterou lze určit z normálové síly F , tedy

$$p_0 = \frac{2F}{\pi a}. \quad (5)$$

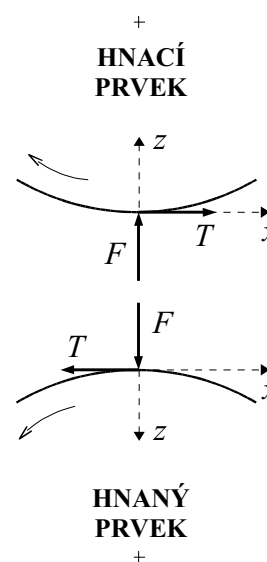
Při uvažování Coulombova tření je možné aplikovat smyková napětí na povrchu proporcionálně k normálovému tlaku podle vztahu

$$\tau(x) = f \cdot p, \quad (6)$$

ve kterém je f odpovídající koeficient tření. Vztah (6) lze použít pouze v případě zanedbatelného prokluzu. Navíc je na místě opatrnost vzhledem ke směru působení vyvolaných třecích sil T (viz obr.3), protože tento směr je závislý na tom, jestli je řešená součást hnaná nebo hnací. U hnacího prvku působí třecí síly proti směru pohybu, kdežto u hnaného prvku ve směru pohybu z důvodu platnosti zákona akce a reakce. Nakonec je vhodné upozornit, že na obr.3 znázorňují neoznačené šipky směr rotace součástí. Jestliže se potom aplikuje metoda posouvání povrchového tlaku, posouvá se distribuce povrchového napětí proti směru rotace.



Obr. 2 Průběh napětí dle Hertze

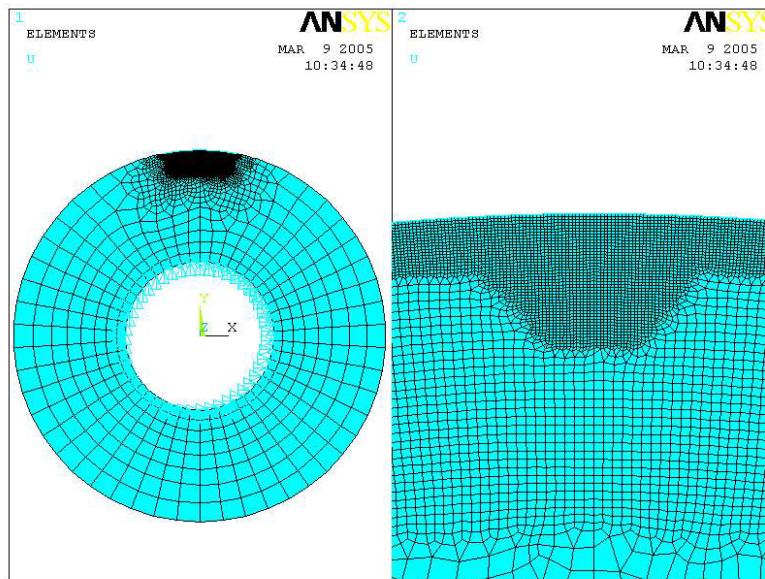


Obr. 3 Vliv typu součásti z hlediska pohonu

4. Použitelnost Hertzovy teorie pro simulaci odvalování

Pro ukázkou postupu při řešení valivého kontaktu pomocí metody posouvání povrchového tlaku a ke zkoumáním použitelnosti Hertzovy teorie byly provedeny numerické výpočty s materiálem BS11. Autoři použili ke všem výpočtům tohoto článku program Ansys 8.0. Pro jednoduchost byl použit multilineární kinematický model plasticity. Zadána byla cyklická deformační křivka materiálu BS11 (Peng & Ponter, 1994). Kolejnicová ocel BS11 je nejvíce zdokumentovaným materiálem z hlediska kontaktní únavy. Odkázat lze například na práce Tyfour et al. (1995) a Beynon et al. (1996), kde byly popsány experimenty s kladkami stejného průměru $d=47\text{mm}$ a liniovým stykem (twin-disc test). Ukázková úloha měla stejnou geometrii kontaktních těles, a proto mohla být řešena pouze ve 2D (rovinná deformace).

Ke stanovení průběhu kontaktního tlaku pro danou sílu byly provedeny výpočty s kontaktními 2D prvky plocha-plocha postupem popsaným v kapitole 3 s uvažováním Coulombova tření. Simulován byl jediný pojezd pro natočení 20° . Jedno kontaktní těleso čítalo 9503 prvků PLANE42 s celkovým počtem 9697 uzlů. Obě tělesa měla stejnou síť (detail viz obr.4).



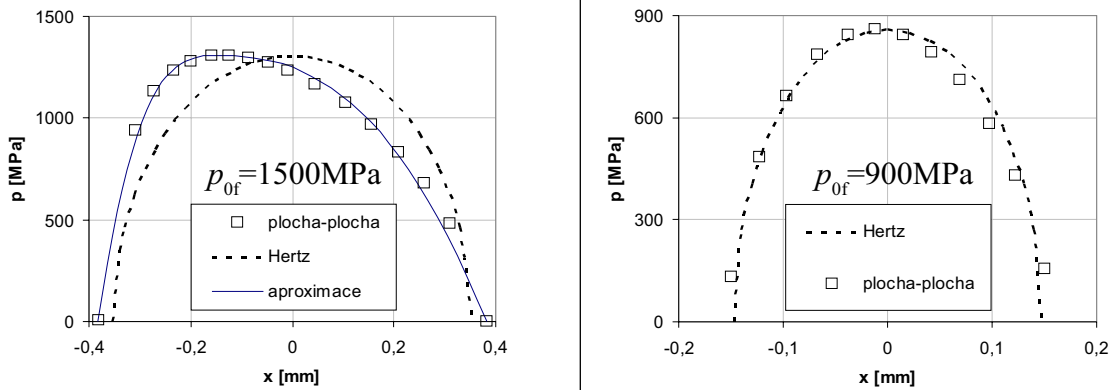
Obr. 4 Detail použité sítě modelu jednoho z kontaktních těles

Prezentovány jsou výsledky pouze dvou výpočtů s odlišnou přítláčnou silou. V odborné literatuře je zvykem kvantifikovat zatížení u elastoplastických kontaktních úloh maximální hodnotou fiktivního elastického tlaku p_{0f} , který se počítá pomocí Hertzovy teorie (Timoshenko & Goodier, 1951). První výpočet byl proveden těsně nad mezí plastického přizpůsobení pro $p_{0f}=900\text{MPa}$, druhý pro $p_{0f}=1500\text{MPa}$, což je obvyklá hodnota u kontaktu kolo-kolejnice v praxi. Nejdůležitější výsledky jsou uvedeny v tabulce 1, kde p_0 je maximální hodnota zjištěného normálového tlaku a a polovina velikosti kontaktní linie (obr.2).

Tab.1 Výsledky výpočtu na konci jednoho pojezdu s kontaktními prvky plocha-plocha

p_{0f} [MPa]	p_0 [MPa]	a [mm]
900	858	0,15
1500	1305	0,38

Získaný průběh normálového tlaku pro oba výpočty byl převeden do tabulkového procesoru MS Excel (obr.5). Ze srovnání obou průběhů je patrné, že pro $p_{0f}=900\text{MPa}$ lze aplikovat metodu posouvání povrchového tlaku užitím Hertzovy funkce (4), kdežto pro $p_{0f}=1500\text{MPa}$ je vhodnější hledat jinou aproximační funkci. Průběh třecího napětí byl tvarově shodný s průběhem normálového tlaku a zároveň hodnota koeficientu tření neměla pozorovatelný vliv na průběh normálového tlaku.



Obr. 5 Detail použité sítě modelu jednoho z kontaktních těles

Z provedených výpočtů je zřejmé, že pro zatížení do meze plastického přizpůsobení lze uvažovat Hertzův elastický tlak. Při vyšších zatíženích je nutné použít pro stanovení okrajových podmínek potřebných v metodě posouvání povrchového tlaku experiment nebo numerický výpočet (např. s kontaktními prvky).

5. Návrh aproximace vhodné pro distribuci povrchového tlaku

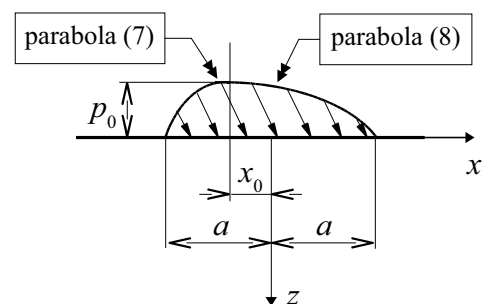
Dle závěrů z předchozí kapitoly je nutné pro aproximaci průběhu kontaktního tlaku navrhnout funkci, která by se snadno aplikovala při použití metody posouvání povrchového tlaku. Jednou z rozumných možností se zdá být použití dvou parabolických funkcí. Matematicky lze tuto aproximaci popsat takto

$$p(x) = p_0 \left\langle 1 - \left| \frac{x - x_0}{a - x_0} \right|^{m_1} \right\rangle, \text{ pro } -a \leq x \leq -x_0 \quad (7)$$

$$p(x) = p_0 \left\langle 1 - \left| \frac{x - x_0}{-a - x_0} \right|^{m_2} \right\rangle, \text{ pro } -x_0 < x \leq a, \quad (8)$$

kde symbol $\langle . \rangle$ odpovídá tzv. MacCauleyho závorkám ($\langle A \rangle = 0$, jestliže $A < 0$ a $\langle A \rangle = A$, když $A > 0$). MacCauleyho závorky jsou použity pouze z důvodu vzniku problémů při aplikaci v programu Ansys 8.0.

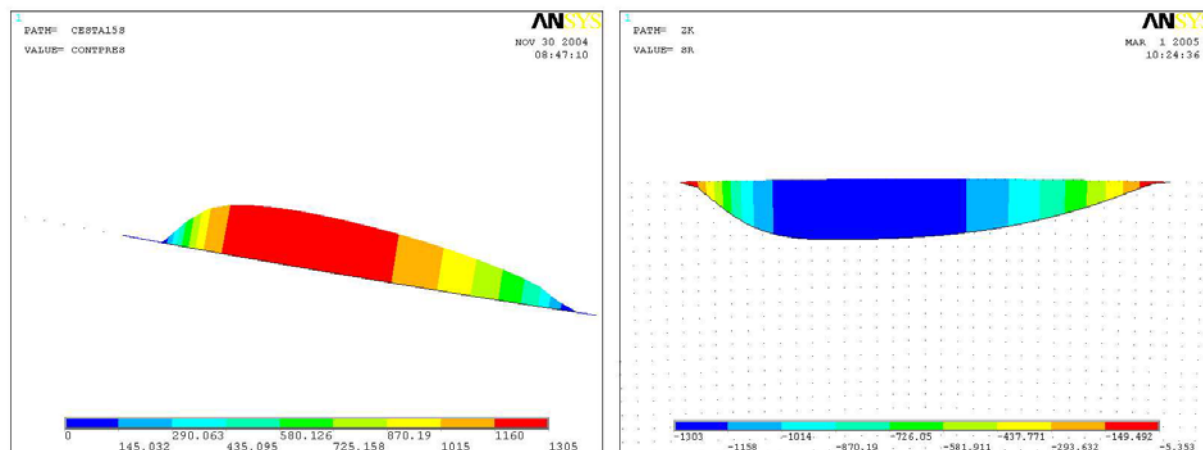
Navržená aproximační funkce byla aplikována na případ $p_{0f}=1500\text{MPa}$ (viz obr.5 vlevo). Zobrazená křivka odpovídá parametrům $m_1=3$; $m_2=2,5$; $x_0=0,15\text{mm}$. Ostatní hodnoty ve vztazích (7), (8) odpovídají hodnotám z tabulky 1.



Obr. 6 Navržená aproximační funkce

V programu Ansys 8.0 byla tato funkce aplikována pomocí tzv. function editoru, jestliže veličina x byla závislá na čase. Tímto způsobem lze dosáhnout postupného posouvání distribuce tlaku.

Průběhy normálového tlaku z výpočtu s kontaktními prvky a normálového tlaku získaného metodou posouvání povrchového tlaku s navrženou funkcí jsou na obr.7.



Obr. 7 Průběh normálového tlaku u výpočtu s kontaktními prvky a výpočtu metodou posouvání povrchového tlaku

6. Závěr

Článek se věnoval možnostem volby okrajových podmínek při simulaci odvalování pomocí metody posouvání povrchového tlaku, což je efektivní a často používaná metoda pro stanovení průběhů napětí a deformace v okolí kontaktu (Jiang et al., 2002). Průběh kontaktního tlaku při zatíženích nad mezí plastického přizpůsobení se výrazněji liší od Hertzova řešení elastické úlohy. Bylo zjištěno, že tento problém lze řešit aproximací distribuce z numerického výpočtu s kontaktními prvky vhodnou aproximační funkcí. V článku navržená aproximační funkce pro liniový kontakt je velmi jednoduchá a variabilní.

Závěrem je vhodné doporučit použití nových modelů cyklické plasticity nad mezí plastického přizpůsobení z důvodu nebezpečí vzniku ratchetingu. Modely plasticity běžně zahrnuté v komerčních programech neodpovídají experimentům s neproporcionálním zatěžováním. Návod na implementaci modelu plasticity s obecnou podobou kinematického pravidla do programu Ansys 8.0 lze nalézt v práci Halama & Fusek (2005).

7. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory projektu FRVŠ 3395021 a dílčí části projektu CEZ J17/98:272300009 zaměřeného na kontaktní únavu.

8. Literatura

Beynon, J.H. & Garnham, J.E. & Sawley, K.J. (1996) *Rolling Contact Fatigue of Three Pearlitic Rail Steels*. Wear, 192, pp. 94-111.

- Halama, R. & Lenert, J. (2004) Metodika řešení kontaktní únavy s využitím MKP. in: *Sborník konference Inženýrská mechanika 2004, Svatka 10.-13.5.2004* (I. Zolotarev & A. Poživilová eds), AVČR Ústav termomechaniky, Praha, pp.105-106.
- Halama, R. & Fusek, M. (2005) Modifikace modelu cyklické plasticity s ohledem na multiaxiální ratcheting, Část II. Implementace v programu Ansys, in: *Sborník 7. ročníku konference Aplikovaná mechanika 2005*, Hrotovice, v tisku.
- Jiang, Y. & Xu, B. & Sehitoglu, H. (2002) *Three-Dimensional Elastic-Plastic Stress Analysis of Rolling Contact*. Journal of Tribology, 124, pp. 699-708.
- Peng, X. & Ponter, A.R.S. (1994) *An Experimental and Theoretical Investigation of the Response of BS11 Steel to Cyclic Loading*. Int. J. Solids Structures, 31, pp. 807-822.
- Sackfield, A. & Hills, D.A. (1983) Some Useful Results in the Classical Hertzian Contact Problem. *J. Strain Anal. Eng. Des.*, 18, pp. 101-105.
- Sackfield, A. & Hills, D.A. (1983) Some Useful Results in the Tangentially Loaded Hertzian Contact Problem. *J. Strain Anal. Eng. Des.*, 18, pp. 107-110.
- Timoshenko, S. & Goodier, J.N. (1951) *Theory of Elasticity*, NY: McGraw-Hill, New York, Second Edition.
- Tyfour, W.R. & Beynon, J.H. & Kapoor, A. (1995) *The Steady State Wear Behaviour of Pearlitic Rail Steel Under Dry Rolling-Sliding Contact Conditions*. Wear, 180, pp. 79-89.