



# INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

---

## TO THE ANALYSIS OF LINEAR AND NONLINEAR DAMPING IN GEARING SYSTEMS WITH IMPACTS

M. Hortel, A.Škuderová\*

**Summary:** *The point of contribution consists in the analysis of linear and nonlinear damping influence on the dynamic properties of the specific case of pseudoplanetary system with split power flow, i.e. the kinematic pair of gear wheels with six degrees of freedom. The damping is considered linear and nonlinear - cubic, namely in the gear mesh, i.e. in the normal and inverse mesh. The damping in the area of tooth backlash in the course of tooth face contact loss and consecutive contact with impact is assumed zero. The results of solution are illustrated in 3D space in the form of the phase planes of relative motion in the gear mesh in the relation to the given damping.*

### 1. Úvod a formulace úlohy

Problematika vyšetřování dynamických jevů ve vysokoparametrických vysokootáčkových převodových soustavách s ozubenými koly není dosud uspokojivě vyřešena. To se týká mj. zejména otázek vlivu silných nelinearit neanalytického charakteru, jež jsou vyvolány existencí technologických bočních zubových vůlí v záběru se nacházejícího ozubení. Tyto nelinearity ovlivňují svými rázovými jevy nejen dynamické síly – zatížení ozubení, ale též celou tribologickou oblast mazání v záběru se nacházejícího ozubení. Každé odlehnutí zubových profilů způsobuje porušení podmínek teorie hydrodynamického mazání ve složitých záběrových podmínkách valení – smyk profilů ozubení, následkem čehož může viskozní mazání přejít v mazání polosuché až suché. Důsledek je pak zvýšení teploty mazacího oleje, pokles jeho viskozity a snížení únosnosti mazací vrstvy – olejového filmu mezi zubovými profily atd.

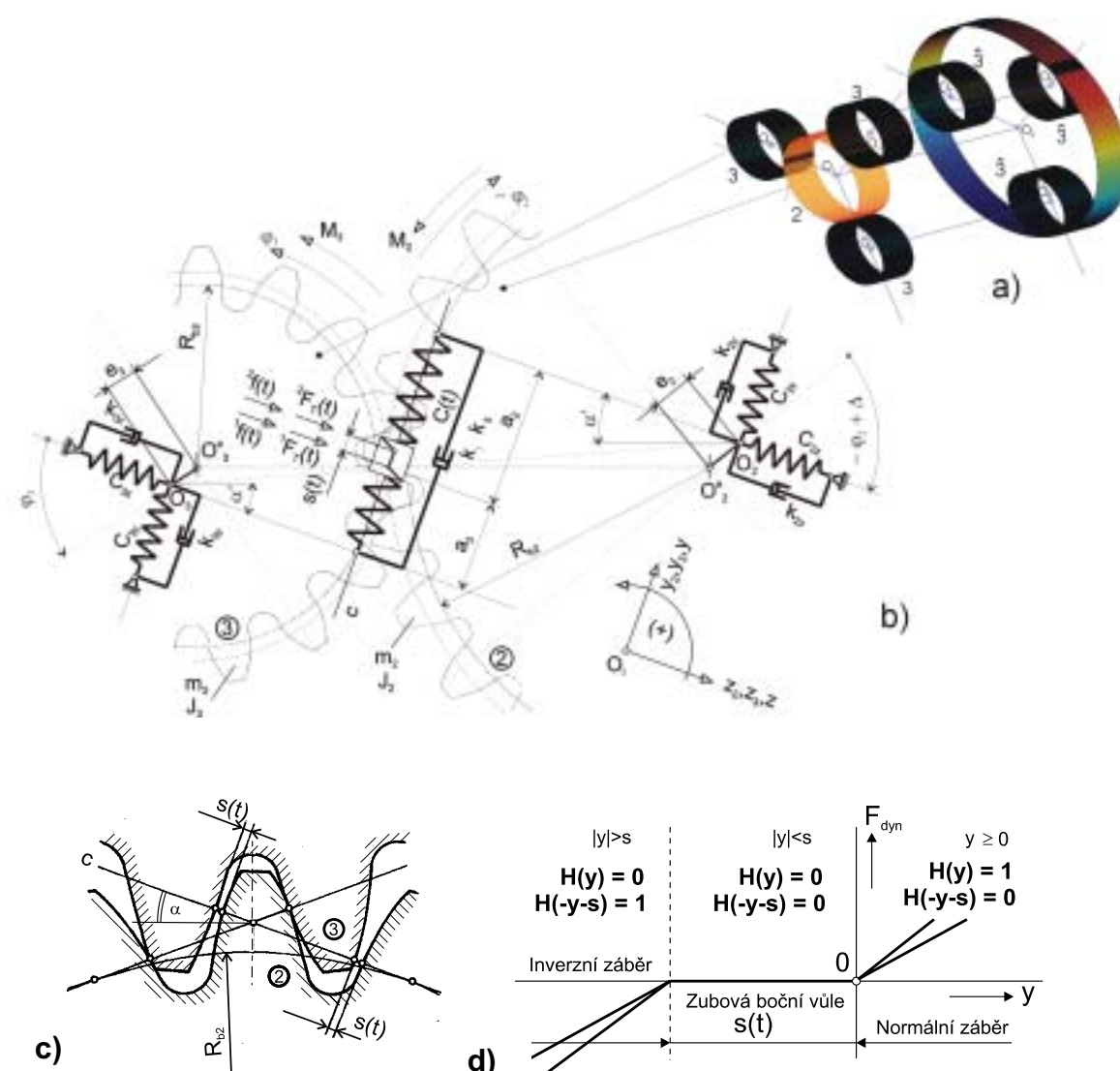
Nové, lehčí a výkonnější hnací stroje, které jsou více namáhány a využívají dokonalejší materiálové vlastnosti, pracují s většími rychlostmi a otáčkami. Tak např. spalovací turbíny ať již jsou používány v letectví, dopravě, či jako stacionární poháněcí jednotky, pracují s otáčkami v rozsahu až několika desítek tisíc za minutu. Zvyšování otáček a výkonu hnacích strojů však současně znamená i značné zvýšení nároků například na převodová ústrojí, kterými se takové vysoké otáčky např. redukují na otáčky požadovaného pracovního režimu.

---

\* Ing. Milan Hortel, DrSc., Ing. Alena Škuderová, Ph.D., Ústav termomechaniky AV ČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8, tel.: 320 266 053 803, fax: 320 286 583 695, e-mail: [hortel@it.cas.cz](mailto:hortel@it.cas.cz), [skuder@it.cas.cz](mailto:skuder@it.cas.cz)

Teoretické práce v oblasti dynamiky soustav s kinematickými vazbami – ozubenými koly narážejí na značné potíže, spočívající v prvé řadě v tom, že není dosud znám přesný obecný náhradní dynamický model, ani u pouhého jednoho páru ozubených kol, který by vystihoval, vzhledem k tvarové složitosti dílčích elementů, skutečnost. Dále jsou jen přibližně známy některé funkcionální závislosti vlivů, působících průběžně při činnosti (funkci) ozubeného převodu, jako např. tření, tlumení atd.

Předmětem dnešního příspěvku z oblasti vnitřní dynamiky planetových mechanismů s děleným – větveným tokem výkonu je, v návaznost na vypracovanou metodiku simulačního řešení [1], [2] dynamických vlastností zvláštních případů zpřesněných matematicko-fyzikálních modelů soustav s dělenými toky výkonů, viz obr.1, analýza vlivu tlumení v záběru se nacházejícího ozubení na kvalitativní a kvantitativní dynamické chování kinematických soustav ozubených kol s rázy v ozubení.



Obr.1 – Náhradní matematicko-fyzikální model páru ozubených kol (b) pseudoplanetové soustavy s dvojnásobnými satelity (a), technologická boční zubová vůle (c), hodnoty Heavisideových funkcí H v oblastech zubového záběru s vůlemi (d).

Metodika simulační analýzy byla vypracována pro zvláštní případ planetové soustavy s děleným tokem výkonu a s  $j = 3$  dvojnásobnými satelity, viz obr.1a, tj. pro zpřesněný model elasticky uložené kinematické dvojice s čelním přímým ozubením o šesti stupních volnosti – obr.1b - planetové soustavy.

Pohybové rovnice tohoto náhradního matematicko-fyzikálního modelu, které byly odvozeny na základě Lagrangeovy teorie, vedou na soustavu šesti obyčejných slabě a silně nelineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s časem proměnlivými koeficienty [2].

Relativní pohyb

$$y = R_{b3}\varphi_3 - (-\varphi_2)R_{b2} + y_3 - y_2 + e_3 \sin \varphi_3 - e_2 \sin(\Delta - \varphi_2) + {}^{1,2}f(\omega_c t)$$

v záběru se nacházejícího ozubení ve směru záběrové přímky vyjadřuje míru dynamického zatížení ozubení  $F_{dyn} = y(t)C(t)$ , tj. součin relativního pohybu  $y(t)$  a výsledné tuhostní funkce  $C(t)$  v záběru se nacházejícího ozubení.

Pohybové rovnice [3] popisují pohyb ve všech třech fázích pohybu, tj. v oblasti normálního záběru, vůle v ozubení  $s(t)$  a v oblasti inverzního záběru prostřednictvím zavedených Heavisideových funkcí  $H(y)$  a  $H(-y - s)$ , viz obr.1d.

V obr.1.a představují symboly  $k_{1,3}$  lineární resp. nelineární kubické tlumení jak v normálním, tak i inverzním záběru ozubení. ( ${}^{1,2}k_1 \equiv k_1$ ,  ${}^{1,2}k_3 \equiv k_3$ , horní index 1 značí normální záběr, 2 inverzní záběr),  $k_{1,3m}$  ... lineární resp. nelineární kubické tlumení v zubové mezeře – vliv prostředí. Fyzikální význam dalších zde necitovaných symbolů viz [3].

## 2. Ukázky analýzy

Analýza vnitřní dynamiky pomocí numerické simulace v prostředí Matlab/Simulink navazuje bezprostředně na práci [3] a je především zaměřena, v rámci objektivního popisu podstaty analyzované soustavy a jevů, které v ní probíhají, na upřesňování jednotlivých v modelu se vyskytujících parametrů. Týká se zejména problematiky vlivu *tlumení* resp. *samobuzení* jak materiálového, tak i tekutého prostředí mazacího olejového filmu v záběru ozubení, na mnohotvárnost či víceznačnost chování těchto nelineárních parametrických soustav s vůlemi a stanovení zákonitostí jejich pohybů.

Tlumení či tlumící síly v mechanických systémech tvoří významnou složku, která jak *kvalitativně* tak i *kvantitativně* ovlivňuje dynamické chování reálných soustav. Je to souhrn nevratných procesů, při kterém se část mechanické energie ztrácí – rozptyluje. Při matematickém modelování se proces tlumení spojuje s představou ekvivalentní tlumící síly (- třecí síly), která působí proti smyslu pohybu. Příčiny existence tzv. disipativního tlumení v soustavách lze spatřovat jednak v materiálových vlastnostech, tj. v mikrostruktuře materiálu dané soustavy a zde pak mluvíme o tzv. vnitřním tlumení, jednak v charakteru konstrukčního – technologického provedení soustavy. V tomto případě mluvíme o tzv. konstrukčním tlumení, které vzniká třením v důsledku vzájemných mikropohybů – posuvů částí k sobě

spojených a které může být i teplotně závislé. A konečně lze jako třetí vliv na tlumení jmenovat i vliv prostředí, ve kterém se ten který daný systém s jistými vlastnostmi nachází.

Tuto širokou škálu příčin vzniku a existence vlastností tlumících sil lze ještě doplnit o složky tzv. nedisipativního tlumení, ke kterým lze řadit např. parametrické tlumení vlivem parametrických nelinearit, vliv fáze mezi parametrickým a vnějším nepotenciálním buzením apod.

Přesto, že otázkám vlivu tlumení na pohyb v kinematických dvojicích s ozubenými koly v obecném slova smyslu je věnována pozornost již mnoho desetiletí, jsou ve světové literatuře o této významné problematice – zvláště u nelineárních parametrických soustav – pouze kusé nesystematické příspěvky. Jedním z důvodů je zřejmě vysoce individuální vliv jednotlivých komponent na příčiny vzniku tlumení.

Studie je zaměřena na dynamickou analýzu pohybu soustav

- A) konzervativních,
- B) nekonzervativních

ve všech fázích pohybu.

Protože mírou dynamického zatížení v záběru se nacházejícího ozubení kinematických dvojic je relativní pohyb  $y$ , bude vliv materiálového tlumení či tlumení v olejové vrstvě zubové mezery analyzován právě na tomto pohybu.

Pohyb v záběru kinematických dvojic lze obecně dělit na

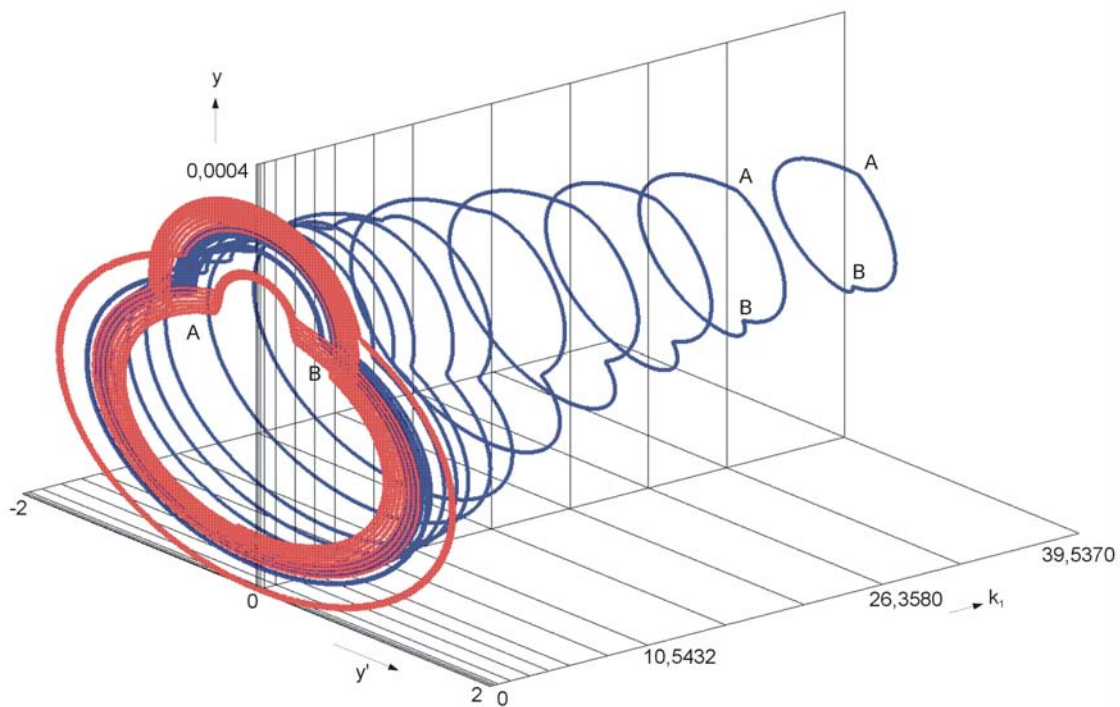
- 1) pohyb *normální*, kde je relativní pohyb v záběru  $y > 0$ ,
- 2) pohyb *rázový*, s pohybem v zubové vůli  $s(t)$ , a to
  - a) s předpětím v ozubení ( $M_2, M_3 \neq 0$ ), kde relativní pohyb může nabýt hodnot  $y > 0, y = 0, y < 0$ ,
  - b) bez předpětí ( $M_2, M_3 = 0$ ) (např. u volnoběhu kol stálého záběru) s relativním pohybem  $y = 0$ ,
  - c) pohyb *inverzní* protiboků zubových profilů  $|y| > s(t)$ ,
  - d) pohyb *interferenční*, kdy dojde k vymezení např. zubové vůle se ztrátou stupně volnosti (tzv. „zamrznutí“) a zadírání na obou bocích zubů současně. Je to pohyb havarijní, který nebyl řešen.

Špičkové konstrukce sériově vyráběných převodových soustav leteckého, automobilového či těžkých pásových a kolových vozidel obranného průmyslu se vyznačují tvarově složitými odlévanými skříněmi. Tato tvarová složitost má za následek různé vnitřní tlumící vlastnosti, které mohou značně ovlivňovat dynamické chování celé strukturální převodové soustavy. Práce se proto zabývá též možným vlivem tlumení na kvalitativní a kvantitativní vlastnosti amplitudofrekvenčních charakteristik, tj. dynamické namáhání ozubení celé převodové struktury.

Protože problematika tlumení v tak tvarově složitých částech převodových systémů není dosud jak teoreticky, tak experimentálně dostatečně známá, budou následující ukázky řešení

provedeny pro širší oblast tlumícího spektra. Totéž platí i pro tekuté tlakově a teplotně závislé prostředí olejové mazací vrstvy v záběru ozubení.

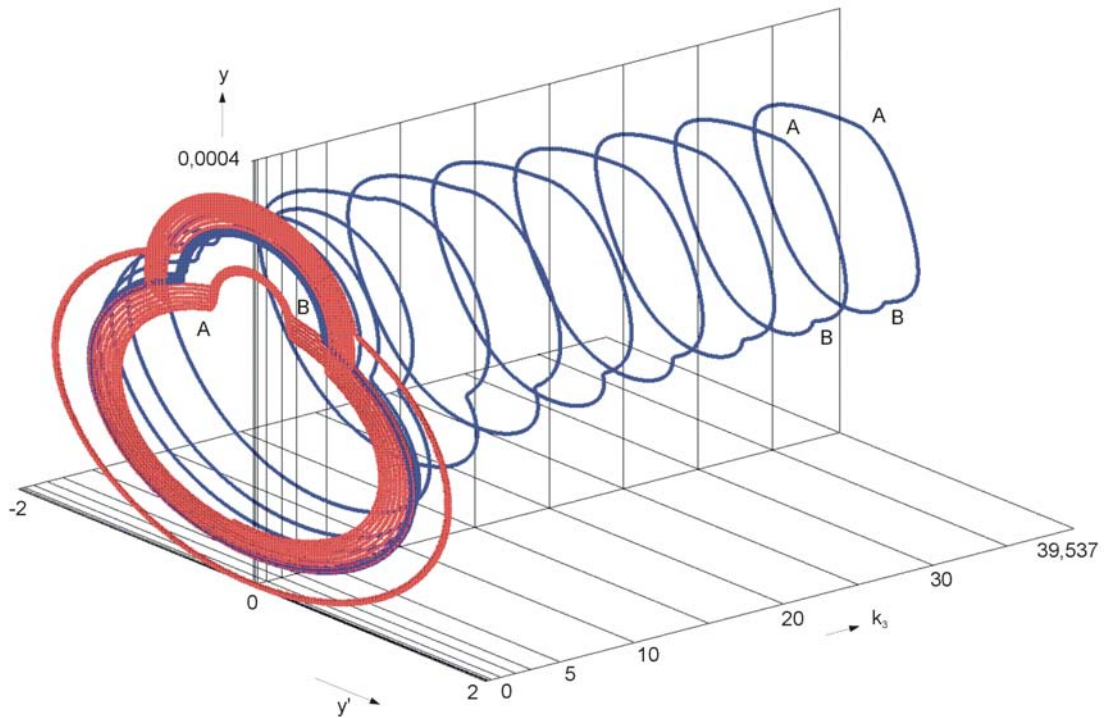
Obr. 2 navazuje na analýzu systému nelineární parametrické soustavy s kinematickými vazbami v [3]. Představuje fázové roviny relativního pohybu  $\{y'(t), y(t)\}$  v záběru ozubení v závislosti na lineárním materiálovém tlumení ozubení  $k_1$  při normálním záběru ozubení, tj. bez rázových jevů způsobených odskoky zubových profilů. Červenou barvou je znázorněn průběh fázové roviny relativního pohybu s nulovým tlumením v záběru ozubení. S rostoucím lineárním tlumením  $k_1$  se zmenšuje dynamické namáhání řešené soustavy. Nespojitosti v průbězích fázových rovin relativního pohybu, patrné z tohoto obrázku a označené např. body A a B, jsou způsobeny střídáním (obecně  $m$  a  $m+1$ ) párů zubů v záběru, tj. změnou hladiny výsledné tuhostní funkce v záběru ozubení z  $C_{min}$  na  $C_{max}$  - body A - a obráceně - body B. Vzájemné natočení těchto míst nespojitostí je způsobeno větším fázovým posunutím relativního pohybu s rostoucím  $k_1$  vůči parametrické budící funkci, představované v případě normálního záběru ozubení výslednou tuhostní funkcí v záběru ozubení  $C(t)$ .



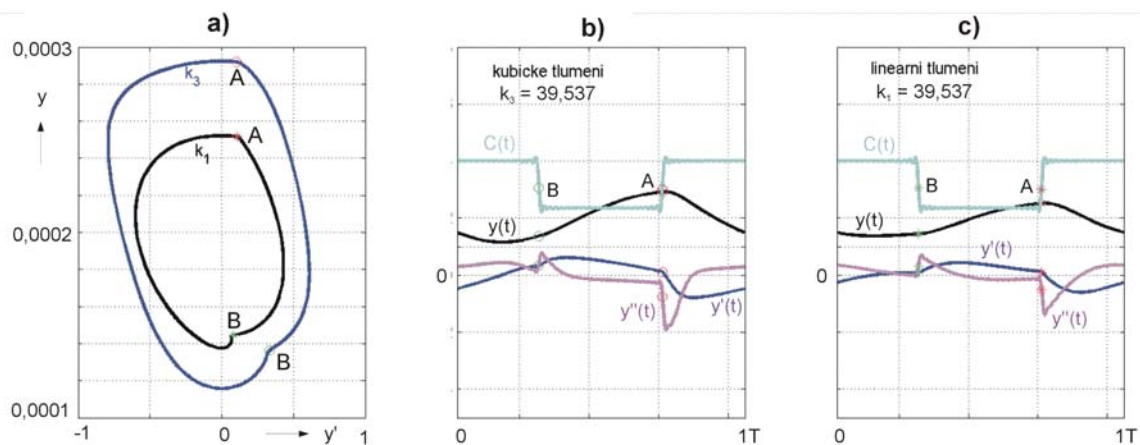
Obr. 2 – Fázové roviny  $\{y'(t), y(t)\}$  relativního pohybu  $y(t)$  kinematické soustavy ozubených kol o šesti stupních volnosti v závislosti na lineárním  $k_1$  materiálovém tlumení v záběru ozubení;  $k_3 = k_{1m} = k_{3m} = 0$ .

Obr. 3 představuje opět fázové roviny  $\{y'(t), y(t)\}$  relativního pohybu v závislosti na nelineárním - kubickém materiálovém tlumení ozubení  $k_3$  v normálním záběru, tj.  $y(t) > 0$ .

V pohybových rovnicích [3] jsou vlivy lineárního a nelineárního materiálového tlumení v ozubení dány výrazy  $(H1+H2)[k_1 y'(t) + 2k_3 y'^3(t)]$ , kde Heavisideovy funkce jsou



Obr. 3 – Fázové roviny  $\{y'(t), y(t)\}$  relativního pohybu  $y(t)$  kinematické soustavy ozubených kol o šesti stupních volnosti v závislosti na nelineárním - kubickém  $k_3$  materiálovém tlumení v záběru ozubení;  $k_1 = k_{1m} = k_{3m} = 0$ .



Obr. 4 - a) Ukázka srovnání fázových rovin  $\{y'(t), y(t)\}$  relativního pohybu  $y(t)$  pro tlumení  $k_1 = k_3 = 39,537$ ; průběhy výsledné tuhosti v záběru se nacházejícího ozubení  $C(t)$ , relativního pohybu ozubení v záběru  $y(t)$ , jeho první  $y'(t)$  a druhé  $y''(t)$  derivace v jedné záběrové periodě pro lineární tlumení  $k_1$  - (c), pro kubické tlumení  $k_3$  - (b).

$H1 \equiv H(y)$  a  $H2 \equiv H(-y - s)$ . Kvantitativní srovnání fázových rovin se všemi nespojitostmi, označenými body A,B, v průbězích pro  $k_1 = k_3 = 39,537$  je patrné z obr.4a.

Fyzikální význam bodů nespojitosti A,B a jejich vznik je dán parametrickou tuhostní funkcí  $C(t)$ , viz též obr.2 a 3. Ukázka kvalitativních průběhů výsledné tuhosti v záběru se nacházejícího ozubení  $C(t)$ , relativního pohybu ozubení v záběru  $y(t)$ , jeho první  $y'(t)$  a druhé  $y''(t)$  derivace v jedné záběrové periodě pro lineární tlumení  $k_1$  jsou patrné z obr.4c, pro kubické tlumení  $k_3$  z obr.4b.

Fyzikální jevy uvedené v obr. 2-4 platí pro soustavu z obr.1, která byla frekvenčně naladěna na hodnotu  $\nu = \omega_c \Omega^{-1} = 0,74$ , kde  $\omega_c \dots$  záběrová frekvence ozubení,  $\Omega \dots$  vlastní frekvence vztažená na střední tuhost  $C_s$  tuhostní funkce  $C(t)$ . Pro toto naladění vykonává soustava pouze normální, tj.  $y > 0$ , záběr ozubení. Přeladěním soustavy na hodnotu  $\nu = \omega_c \Omega^{-1} = 0,87$  dochází v záběru k odlehnutí zubových profilů, k proběhnutí zubové vůle a ke styku protilehlých boků zubů - inverznímu záběru. Každé odlehnutí zubových profilů je následováno opětým stykem s rázem, jak je patrné z obr.5.

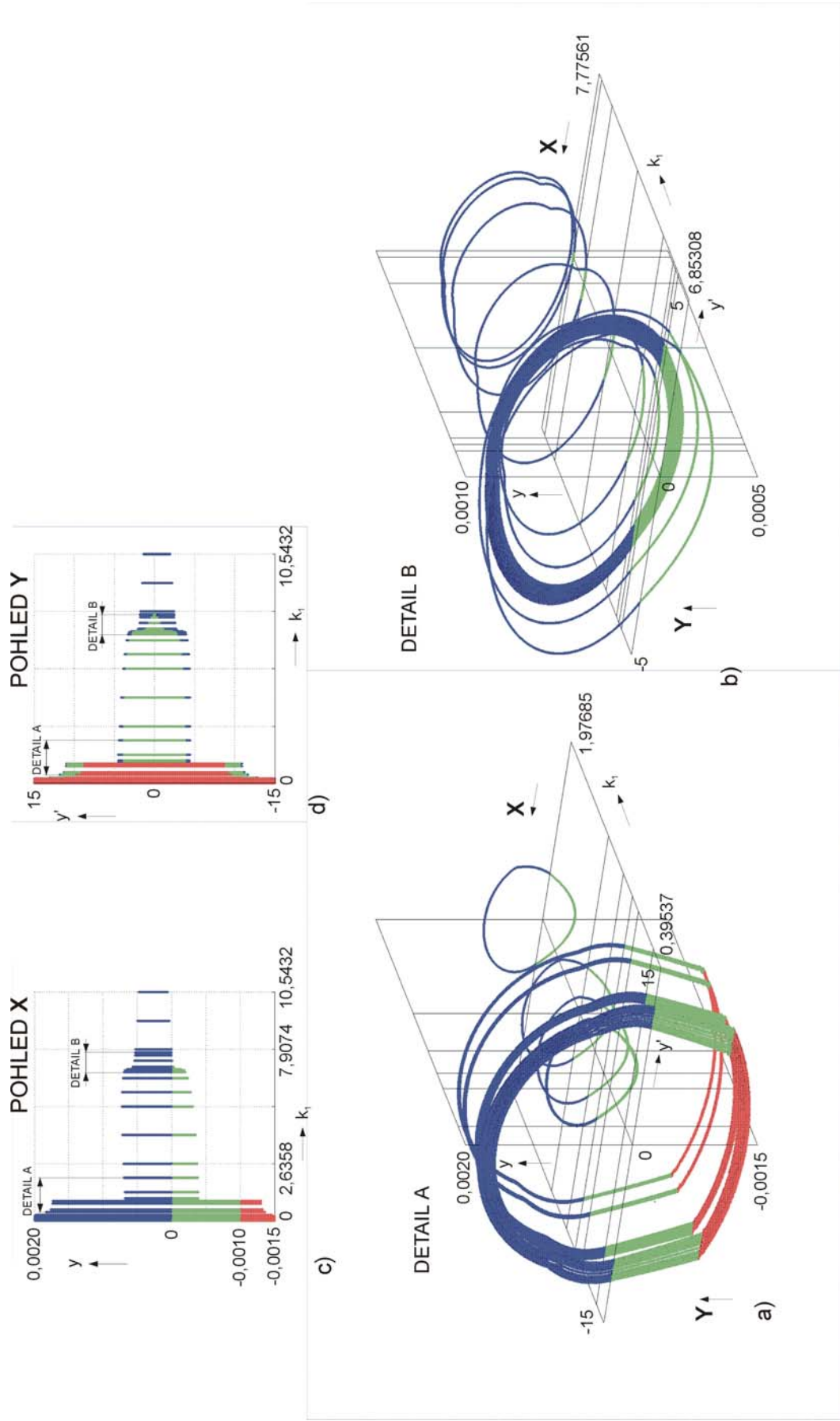
Obr.5a a 5b představují fázové roviny relativního pohybu  $\{y'(t), y(t)\}$  pro různé intervaly lineárního materiálového tlumení  $k_1$ , kde modré průběhy představují normální záběry ozubení, zelená barva značí průlet zubovou mezerou a červené průběhy pak záběry inverzní. Obr.5c a 5d tvoří ortogonální průměty  $\{y'(t), y(t), k_1\}$  ve směru X a Y, tzn. řezy  $\{y(t), k_1\}$  resp.  $\{y'(t), k_1\}$ . Z nich jsou patrné amplitudové resp. rychlostní skokové přechody vyvolané modifikovanými parametrickými tuhostními funkcemi  $C(t)(H1+H2)$  [3]. Z obrázků je dále patrný vliv tlumení  $k_1$  na charakter pohybu. S růstem tlumení  $k_1$  se zmenšuje dynamická setrvačná složka zubových profilů, což způsobuje změnu podmínek pro vznik nejdříve inverzního záběru a vznik odskoků – odlehnutí zubových profilů. Tyto podmínky jsou ještě ovlivněny dalšími parametry jako např. kubickým tlumením v materiálu, lineárním, příp. kubickým tlumením v mazací olejové vrstvě při průletu oblastí zubové vůle apod.

Ukázka vlivu kubického materiálového tlumení  $k_3$  v záběru ozubení je uvedena na obr. 6a a 6b. V souřadnicích  $\{y(t), k_3\}$  a  $\{y'(t), k_3\}$  při daném frekvenčním naladění je patrný větší kvantitativní vliv tohoto tlumení oproti vlivu tlumení lineárního  $k_1$  - viz obr.5c a 5d – na amplitudy  $y(t)$  a  $y'(t)$ , tj. dochází dříve k bezrázovému stavu pohybu.

Na závěr příspěvku ukažme dílčí výsledek řešení vlivu lineárního tlumení  $k_{1m}$  olejové vrstvy na amplitudy relativního pohybu  $y(t)$  v normálním záběru (modré průběhy) a ve fázi odskoků zubových profilů do oblasti zubové vůle (průběhy zelené). Z fázových rovin vyplývá, že lineární tlumení  $k_{1m}$  ovlivňuje průběhy jak kvalitativně, tak i kvantitativně, co do velikosti výkmitu amplitudy  $y$  i rychlosti  $y'$  v daném intervalu tlumení  $k_{1m} \in \langle 1,1;30 \rangle$ .

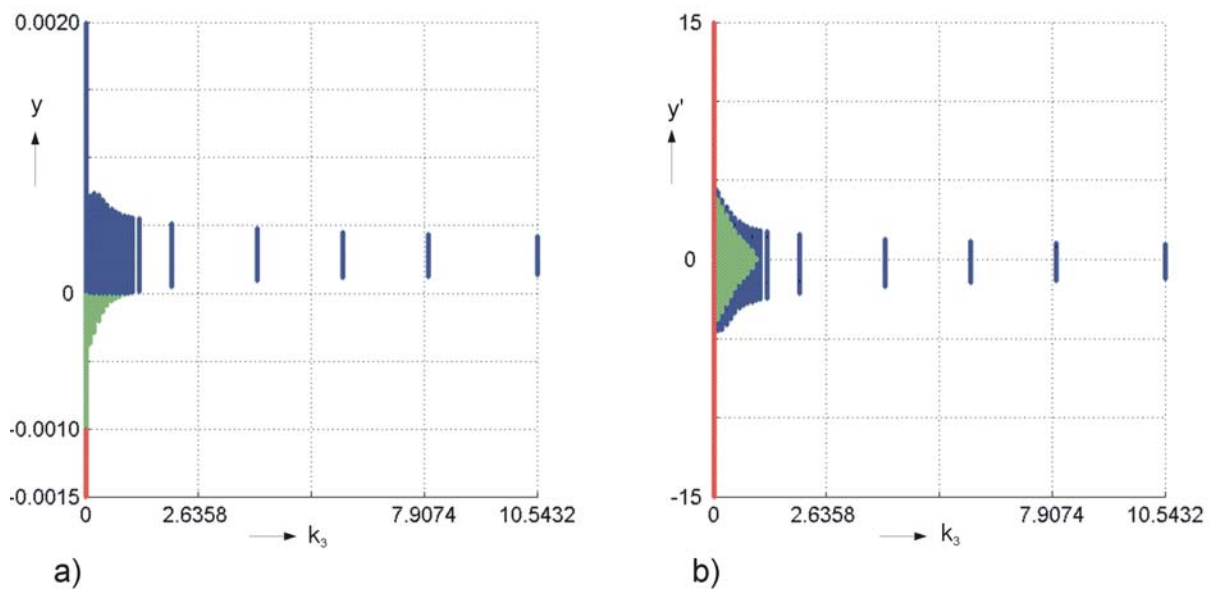
### 3. Závěr

Uvedené ukázky vlivu tlumení na dynamiku záběru ozubení kinematických dvojic představují dílčí výsledky analýzy vnitřní dynamiky silně nelineárních parametrických převodových soustav. Dosud byl sledován vždy pouze jeden parametr tlumení (z  $k_1, k_3, k_{1m}, k_{3m}$ ) při

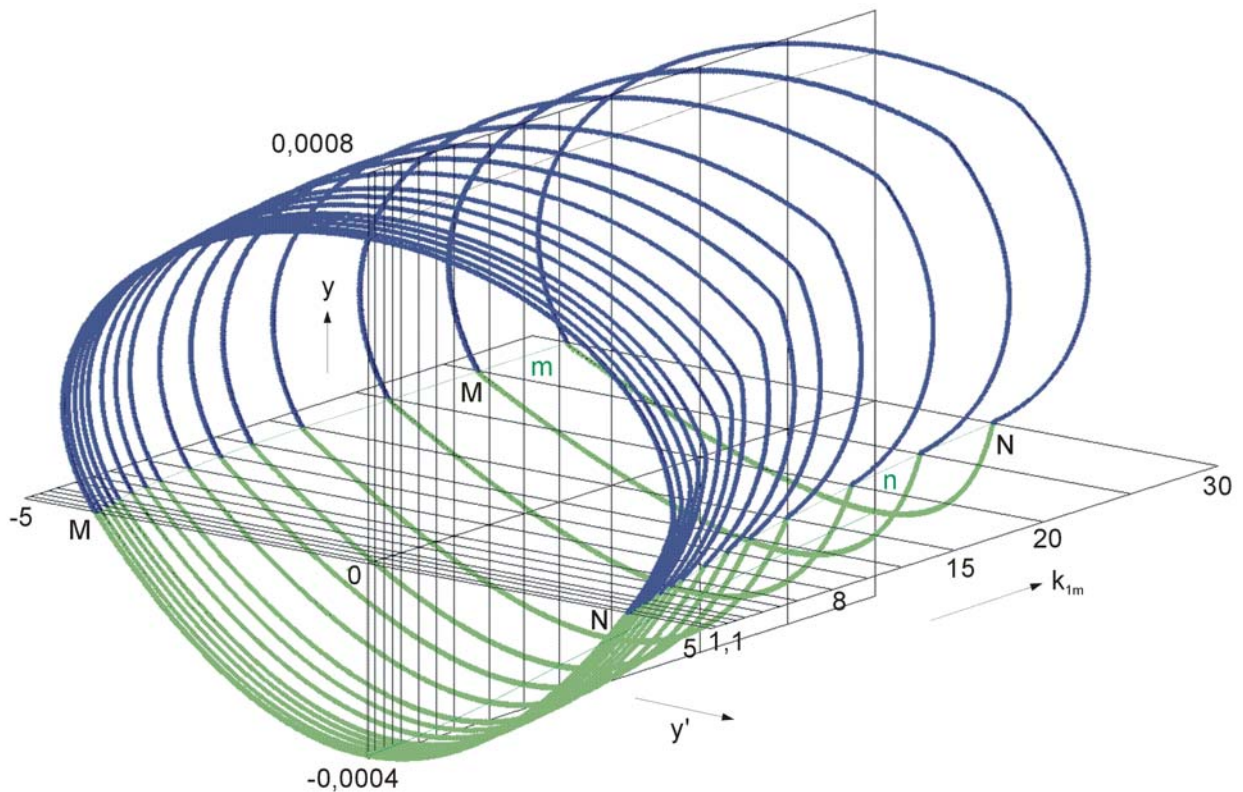


Obr. 5 – Fázové roviny  $\{Y'(t);Y(t)\}$  a),b) relativního pohybu do směru  $X, Y$  c),d) při frekvenčním naladění soustavy v záběru  $v = 0,87$  v závislosti na lineárním materiálovém tlumení zubů v záběru  $k_1$ .





Obr. 6 – Průběhy  $\{y(t), k_3\}$  a  $\{y'(t), k_3\}$  při frekvenčním naladění zubů v záběru  $\nu = 0,87$  v závislosti na materiálovém kubickém tlumení  $k_3$  zubů v záběru.



Obr. 7 - Fázové roviny  $\{y'(t), y(t)\}$  relativního pohybu kinematické soustavy ozubených kol o šesti stupních volnosti v závislosti na lineárním  $k_{1m}$  tlumení mazací olejové vrstvy v záběru ozubení pro frekvenční naladění  $\nu = 0,87$  zubů v záběru.

zbývajících třech parametrech nulových. Probíhající výzkum není dosud uzavřen, pozornost v současné době je zaměřena na studium zákonitostí vlivu kombinací lineárního a nelineárního tlumení jak v normálním či inverzním záběru, tak i ve fázi odskoku profilů zabírajících zubů v oblasti zubové mezery.

Problematika výskytu a řešení nežádoucích – rázových – jevů má své významné opodstatnění především u převodových soustav, které pracují v širokém pásmu otáček, kdy dochází k „přejíždění“ rezonančních oblastí.

Rychlé přechody mezi oblastmi zubového záběru a vůle mohou způsobovat porušování tribologických poměrů, tj. nosné vrstvy olejového filmu, spojené s vytvořením podmínek pro vznik polosuchého až suchého tření v záběru, s důsledkem vzniku samobuzeného kmitání a hluku.

*Práce vznikla za podpory AV ČR při řešení projektu PPCVV reg.č. S2076353 a výzkumného záměru ÚT AV ČR AVOZ 2076919 – reg. č. 90357.*

#### **4. Literatura**

- [1] Hortel, M.: Dynamika nelineární soustavy s kinematickými vazbami. N AV ČR, Praha, (v tisku).
- [2] Škuderová, A.: K analýze vnitřní dynamiky silně nelineární parametrické soustavy s kinematickými vazbami. Doktorská dizertační práce, ÚMT FSI VUT Brno, 2003.
- [3] Hortel, M., Škuderová, A.: K problematice rázových jevů v planetových převodových soustavách s čelním ozubením. In Sborník Colloquium Dynamics of Machines 2005, Praha, February 8-9, 2005, ÚT AV ČR Praha, str. 63-70.