



INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

DISPERSION PROPERTIES OF THE PLANE QUADRATIC FINITE ELEMENTS IN ELASTODYNAMICS

R. Kolman*

Summary: *The dispersion properties of the regular plane quadratic finite element used in the plane elastic wave propagation problems are presented and this finite element type is compared with the bilinear finite element. The regular quadratic finite elements cause occurrence of spurious frequency modes (called optical modes) in addition to physical modes (longitudinal and transverse, also called acoustical modes). The optical modes are the numerical effect in the finite element discretization of the elastodynamic problems. At finish, the empirical relations for the determination of the mesh size for the both finite element types from the knowledge of the load spectrum are derived.*

1. Úvod

Výsledky numerického řešení přechodové úlohy elastodynamiky jsou ovlivněny numerickými efekty způsobené hlavně volbou diskretizace (typem a velikostí konečných prvků, topologií sítě), volbou časového schématu řešení pohybové rovnice a velikostí integračního časového kroku. Numerickými efekty se rozumí např. numerické tlumení, dispersní chování a otázky stability řešení (Dokainish & Subbaraj, 1989). Pokud mají být tyto nežádané efekty potlačeny, měly by být transientní výpočet proveden pro korektně stanovené numerické parametry úlohy (velikost prvků a časového kroku). V tomto příspěvku bude provedena dispersní analýza kvadratických rovinných konečných prvků pro případ, kdy časová integrace pohybových rovnic je provedena exaktně.

Disperse konečných prvků v úlohách šíření elastických vln se projevu tím, že fázové rychlosti šíření vln a grupové rychlosti jsou závislé na vlnové délce této vlny, dochází k odklonu směru kmitu od směru šíření vlny a některé frekvence jsou potlačeny. Tyto dispersní chyby jsou ovlivněny volbou zvolené diskretizace, tj. typem konečných prvků, velikost prvků a také topologií konečné prvkové sítě.

Pro jednodimensionální Lagrangovské and Hermitovské konečné prvky byla dispersní analýza provedena v práci (Okrouhlík & Höschl, 1993), pro 2D lineární prvky v (Brepta & Okrouhlík, 1986). V minulosti nebyla věnována zásadní pozornost dispersní analýze kvadratických prvků používaných pro numerické řešení šíření elastických vln. Určitý náhled na dispersní chování těchto prvků lze získat z (Belytschko & Mullen, 1978).

* Ing. Radek Kolman: Ústav termomechaniky AV ČR; Dolejškova 5; 182 00 Praha 8; tel.: +420.266 053 292, fax: +420.285 584 695; e-mail: kolman@it.cas.cz

2. Exaktní řešení šíření elastických vln

Z analytického rozboru pohybových rovnic elastodynamiky pro neomezené rovinné spojité elastické prostředí a pro případ rovinných vln plynou dvě lineárně nezávislá řešení (Achenbach, 1973) a to: jedno odpovídá podélným vlnám šířící se rychlostí

$$c_1 = \sqrt{\frac{\Lambda + 2G}{\rho}} \quad (1)$$

a druhé odpovídá příčné vlně šířící se rychlostí

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (2)$$

kde Λ a G jsou Lamého konstanty a ρ je hustota. Časové pole posuvů je popsáno takto

$$u_i = U_i \exp[i k (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \pm c t)], \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

kde $i = \sqrt{-1}$, k je vlnové číslo, \mathbf{x} je polohový vektor, \mathbf{p} je jednotková normála k čele vlny, c je fázová rychlost, t je čas a U_i je i -tá složka vektoru amplitud v bodě určené vektorem \mathbf{x} . Vztah pro úhlovou frekvenci je možné stanovit z (3) takto

$$\omega = k c \quad (4)$$

a pro danou vlnovou délku λ je vlnové číslo definováno

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (5)$$

Analytické řešení je tedy nedispersní. Jinak řečeno, rychlost šíření vlny nezávisí na vlnové délce vlny λ a poté frekvence ω je lineární funkcí vlnové délky, grupové rychlosti jsou shodné s fázovými.

3. Dispersní analýza

Pro stanovení dispersních vlastností se používá tzv. Fourierovy metoda a to tak, že jsou předepsané uzlové posuvy odpovídající exaktnímu řešení dosazeny do pohybových rovnic charakteristických uzlů. Charakteristickými uzly se rozumí takové uzly, jejichž charakter kmitání je shodný a jejich pohybové rovnice jsou také stejné. U pravidelných sítí složených z kvadratických prvků se jedná o tři typy uzlů: rohový uzel, vodorovný stěnový a svislý stěnový uzel (Obr. 1). Uzlové posuvy jsou tedy dány takto

$$u_{mn} = U_{mn} \exp[i k (x_m p_x + y_n p_y - c t)], \quad (6)$$

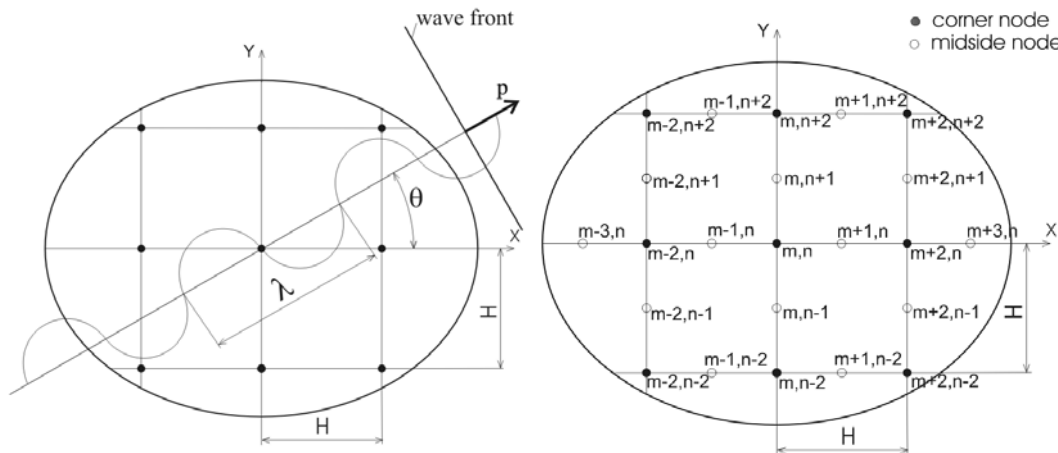
$$v_{mn} = V_{mn} \exp[i k (x_m p_x + y_n p_y - c t)], \quad (7)$$

kde indexy m, n označují příslušný uzel o souřadnicích (Obr.1)

$$x_m = m H / 2, \quad y_n = n H / 2, \quad (8)$$

kde H označuje délku hrany prvku a jednotková normála čela vln definovaná úhlem θ je

$$p_x = \cos \theta, \quad p_y = \sin(\pi / 2 - \theta). \quad (9)$$



Obr. 1 Orientace směru šíření vln vůči síti kvadratickým prvků a označení jednotlivých uzlů v síti.

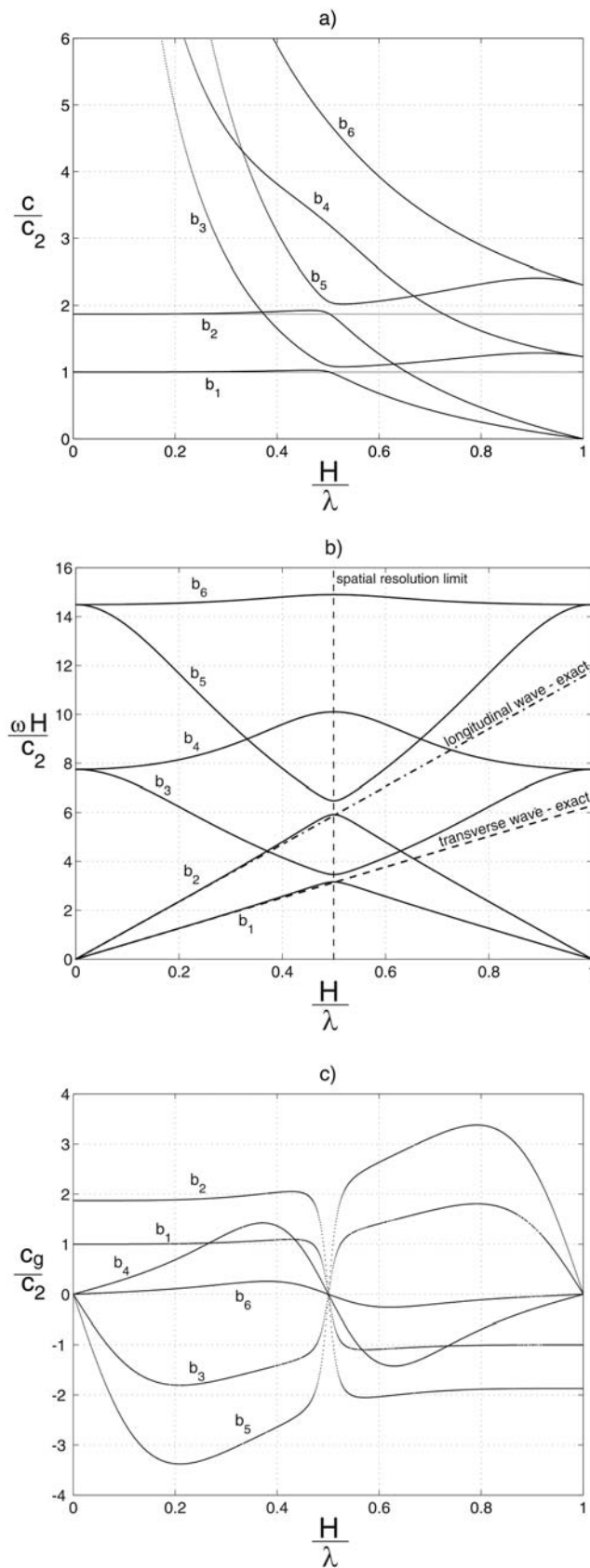
Po provedení těchto zmíněných operací se hledání dispersních vztahů transformuje na řešení zobecněného problému vlastních čísel. Vypočtená vlastní čísla souvisejí s fázovými rychlostmi a vlastní vektory dávají informaci o tvaru kmitání charakteristických uzlů.

4. Výsledky dispersní analýzy kvadratických konečných prvků

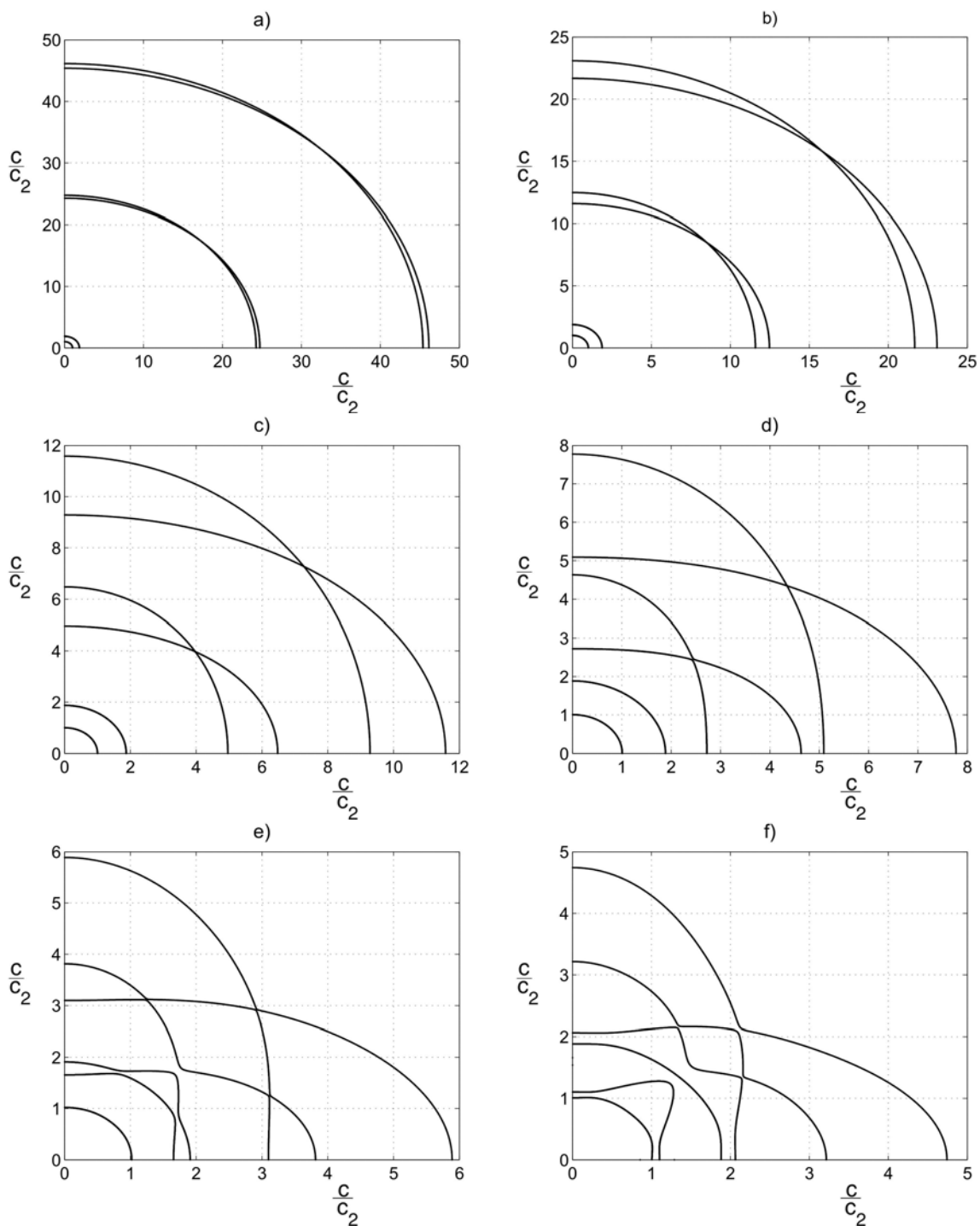
Byla provedena zmíněná dispersní analýza pro čtvercové rovinné kvadratické prvky. Tyto prvky jako každé prvky vyšších řádů jsou charakteristické tím, že se u nich vyskytují tzv. optické módy (Brillouin, 1953). Tvar kmitu těchto optického módů je takový, že některé sousední uzly kmitají v protifázi, přičemž vlnová délka je větší než vzdálenost těchto uzlů.

Na Obr. 2 jsou zobrazeny dispersní křivky, průběhy frekvencí a grupových rychlostí pro směr šíření vlny ve vodorovném směru ($\theta = 0^\circ$). Směrové závislosti těchto prvků pro určité hodnoty H / λ jsou zobrazeny na Obr. 3. Na základě těchto grafů jsou vysloveny základní vlastnosti pro čtvercové rovinné kvadratické prvky:

1. existence šesti dispersních větví, z toho vždy jedna větev odpovídá podélným vlnám, druhá má vždy souvislost s příčnými vlnami a zbylé jsou tzv. optické
2. výskyt tzv. frekvenčních pásů, přeskoků podél dispersních křivek u podélných a příčných vln
3. téměř konstantní fázové rychlosti podélných a příčných vln do hodnoty $H / \lambda < 0.38$ pro libovolný směr šíření vlny, což se u lineárních prvků neobjevuje



Obr. 2 Dispersní křivky (a), frekvence (b) a grupové rychlosti (c) pro čtvercové rovinné kvadratické rovinné konečné prvky pro směr vlny šířící se ve směru osy x.



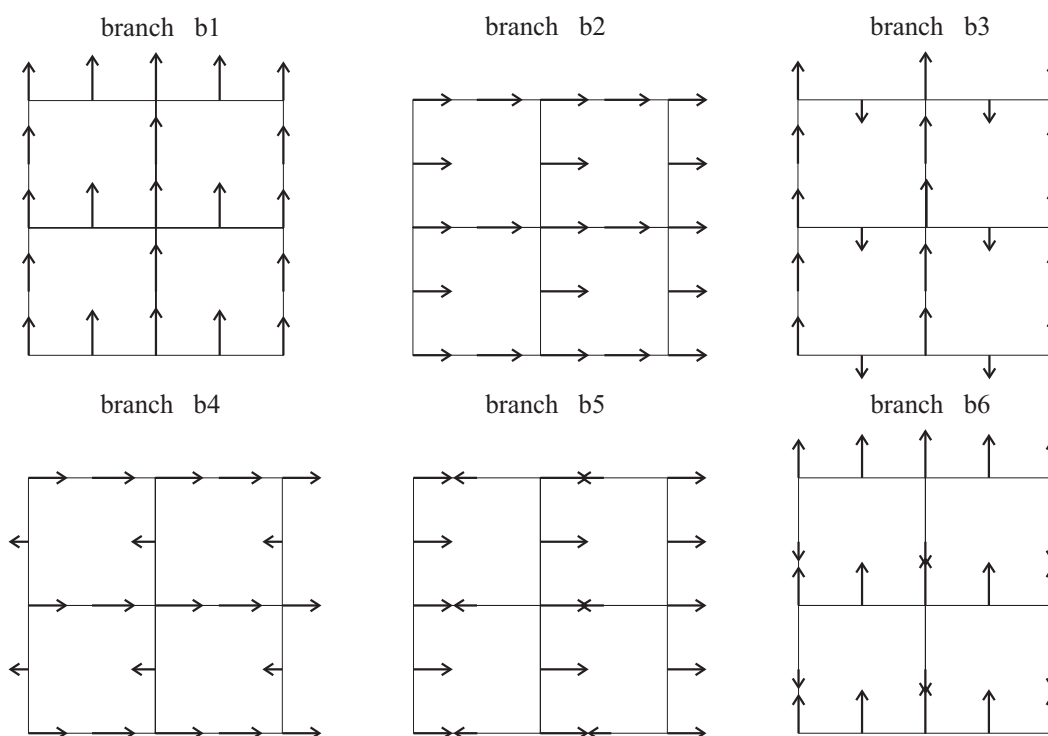
Obr. 3 Směrová závislost fázových rychlostí c čtvercových kvadratický rovinných konečných prvků pro a) $H/\lambda = 0.05$, b) $H/\lambda = 0.1$, c) $H/\lambda = 0.2$, d) $H/\lambda = 0.3$, e) $H/\lambda = 0.4$ a f) $H/\lambda = 0.5$.

5. Ukázka dispersních módů

Pro ilustraci o tvarů kmitání jednotlivých dispersních módů bylo provedeno vykreslení posuvů pro tyto hodnoty $H/\lambda = 0.1, E = 1[Pa]$, $\nu = 0.3$, $\rho = 1[kg/m^3]$, $\theta = 0^\circ$ (Obr. 4). V Tab. 1 jsou uvedeny příslušné hodnoty fázových rychlostí, frekvencí a grupových rychlostí.

Větev	b1	b2	b3	b4	b5	B6
Typ vln	příčná	podélná	optická	optická	optická	optická
c/c_2	1.00011	1.87103	11.58451	12.47391	21.67263	23.08613
$\omega H/c_2$	0.62839	1.17561	7.27876	7.83759	13.61732	14.50544
c_g/c_2	1.00053	1.87181	-1.36487	0.29939	-2.55343	0.046219

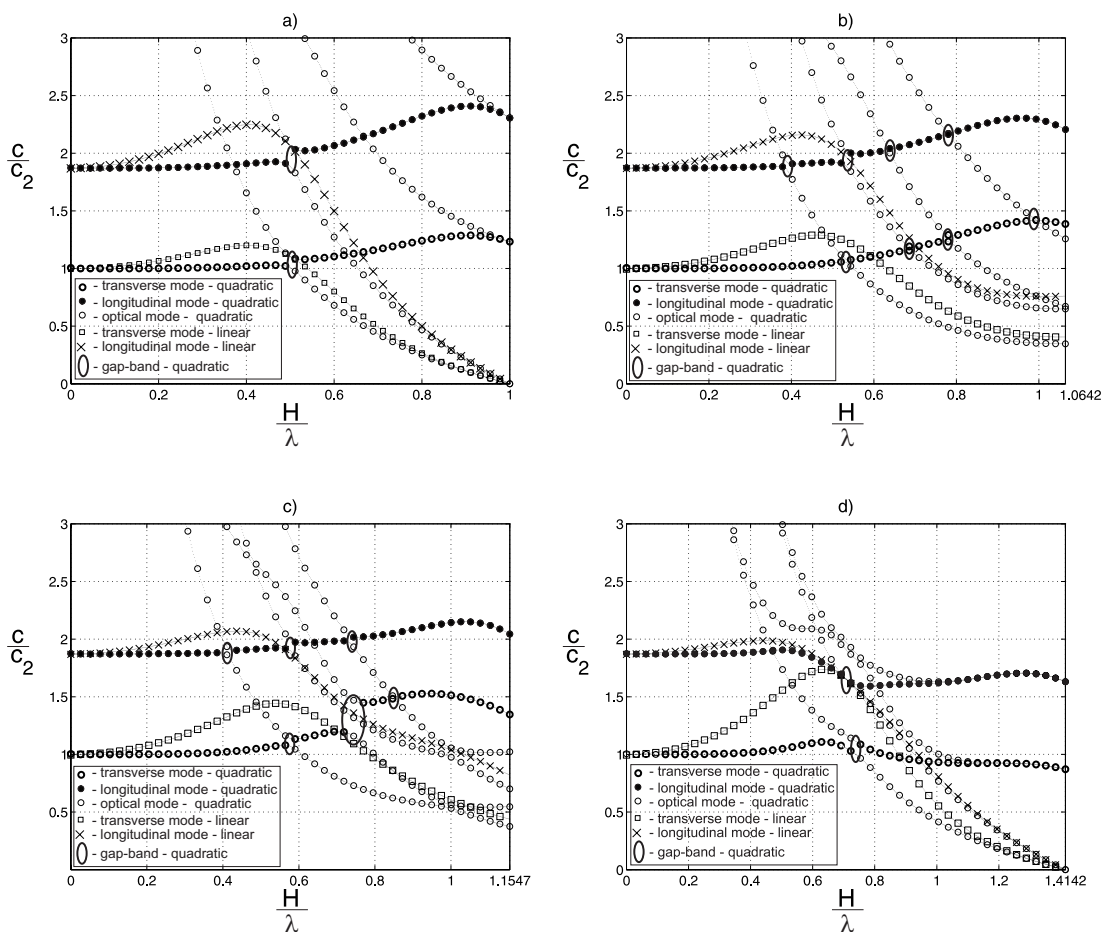
Tab. 2 Hodnoty fázových a grupových rychlostí a frekvencí pro jednotlivé dispersní módy pro úlohu určenou vlastními daty $H/\lambda = 0.1, E = 1[Pa]$, $\nu = 0.3$, $\rho = 1[kg/m^3]$, $\theta = 0^\circ$.



Obr. 4 Zobrazení jednotlivých módů šíření harmonické vlny získané Fourierovou analýzou pro $H/\lambda = 0.1, E = 1[Pa]$, $\nu = 0.3$, $\rho = 1[kg/m^3]$ a vodorovný směr šíření vlny ($\theta = 0^\circ$).

6. Porovnání kvadratických a lineárních prvků

Na Obr. 5 je vykresleny dispersní křivky lineárních a kvadratických čtvercových rovinných konečných prvků pro směry šíření vln $\theta = 0, \pi/9, \pi/6, \pi/4$.



Obr. 5 Porovnání dispersních křivek pro lineární a kvadratické rovinné konečné prvky pro směry šíření vln a) $\theta = 0$, b) $\theta = \pi/9$ c) $\theta = \pi/6$ a d) $\theta = \pi/4$.

7. Návrhové vztahy

Z rozboru dispersních křivek $c = c(H/\lambda)$ a směrových závislostí $c = c(\theta)$ je možné stanovit oblast použitelnosti kvadratických prvků pro zvolenou procentuální chybu fázové rychlosti. Oblast použitelnosti konečných prvků s ohledem na potlačení dispersního chování je stanovena empirickým vztahem

$$(H/\lambda)_{\max} \leq \text{const}_{\text{disp}}, \quad (10)$$

kde hodnota konstanty $\text{const}_{\text{disp}}$ pro jednotlivé typy konečných prvků a zvolenou přesnost je uvedena v Tab. 2. Potřebnou vlnovou délku lze přibližně určit podle

$$\lambda = \frac{c_2}{f_{\max}}, \quad (11)$$

kde f_{\max} je maximální frekvence zatížení tělesa.

Dovolená chyba fázové rychlosti [%]	lineární konečný prvek	kvadratické konečný prvek
1	0.075	0.35
2	0.11	0.37
5	0.175	0.385

Tab. 2 Hodnoty $const_{disp}$ pro jednotlivé typy prvků v závislosti na dovolené chybě fázové rychlosti.

8. Závěr

V příspěvku jsou uvedeny a porovnány dispersní křivky čtvercových rovinných lineárních a kvadratických konečných prvků používaných v elastodynamice. Na základě analýzy dispersních křivek jsou navrženy empirické vztahy pro volbu hustoty výpočtové sítě ze znalosti frekvence zatížení.

9. Poděkování

Tato práce vznikla za laskavé podpory výzkumného záměru AV0Z20760514.

10. Literatura

- Achenbach, J.D. (1973) Wave propagation in Elastic Solids. *North-Holland Publishing Comp., American Elsevier Publishing Comp., Inc.*, New York.
- Belytschko, T. & Mullen, R. (1978) On dispersive properties of finite element solutions, in: *Modern problem in Elastic Wave Propagation* (J. Miklowitz et al., eds), Wiley, pp. 67-82.
- Brepta, R. & Okrouhlík, M. (1986) Disperzní vlastnosti obdélníkových a čtvercových prvků pro dvojrozměrnou oblast. Výzkumná zpráva Z998/86, ČSAV Ústav termomechaniky.
- Brillouin, L. (1953) Wave propagation in periodic structures: Electric filters and crystal lattices. *Dover Publications*. New York.
- Dokainish, M.A. & Subbaraj K. (1989) A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – I. Explicit methods. *Computers & Structures*, 32, 6, pp. 1371-1386.
- Okrouhlík, M. & Höschl, C. (1993) A contribution to the study of dispersive properties of one-dimensional Lagrangian and Hermitian elements. *Computers & Structures*, 50, 5, pp. 779-795.