



# INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

---

## ""LATERAL BUCKLING – ASSESSMENT BY CODES / FEM

Ivan Krásný, Jan Leština\*)

**Summary:** *The loss of elastic stability caused by both lateral and torsional deformations of bent beams is called lateral buckling. The most typical cases of lateral buckling of beams are covered by the Czech Code ČSN 73 1401 [1]. In the real world we often need to solve structures where the application of the Code comes short. When it happens the finite element method (FEM) is the most convenient way we can use. Standard FEM calculations result in the linear (bifurcation) stability limit, but using only this number is not enough. We want to apply the experience collected in the Code concerning geometrical and material imperfections and factors of safety. This paper at first illustrates these problems on some simple beams but also provides a solution of a real compound beam used in house construction.*

### 1. Úvod

Klopení je příčná a torsní ztráta stability ohybem namáhaných nosníků. Je charakterisováno vybočením tlacené pásnice např. I- nebo U-profilu. Hlavní příčinou je malá torsní tuhost válcovaných otevřených profilů: je-li jejich příčný rozměr  $a$  a tloušťka stěny  $s$ , pak jsou ohybové tuhosti (řádu  $a^3 \cdot s$ ) podstatně větší než tuhost torsní, řádu  $a \cdot s^3$ . Proto také není třeba nosník vyšetřovat na klopení, má-li velikou torsní tuhost (uzavřený profil), ohýbá-li se v rovině minimální ohybové tuhosti, nebo je zabezpečen buď proti vybočení z roviny ohybu, nebo proti pootočení průřezů.

Návod k výpočtu celistvých prutů na klopení obsahuje norma ČSN 73 1401 „Navrhování ocelových konstrukcí“ [1] pro řadu typických základních případů. Technická praxe však někdy vyžaduje posoudit na klopení útvar, na nějž (nebo na jeho zatížení) není norma bezprostředně aplikovatelná. Pak se uchylujeme k numerickým výpočtům lineární (bifurkační) meze stability např. metodou konečných prvků. Při hodnocení výsledků takových výpočtů je nejvyšší žádoucí využít souhrnu technických zkušeností v normě obsažených a týkajících se předpokládaných imperfekcí řešeného útvaru, volby bezpečnosti proti ztrátě stability a pod. Touto problematikou se zabývá náš příspěvek, nejprve na několika jednoduchých prutech porovnává výsledky normových a prvkových výpočtů. Na konkrétním příkladu členěného prutu z praxe pak dokládá použitelnost popsaného postupu.

---

\*) VAMET s.r.o. Praha 5, Slávy Horníka 16a, tel.+420 257214125, e-mail krasny@vamet.cz, lestina@vamet.cz

## 2. Posouzení prutu na klopení podle ČSN [1]

Pro jednoduchost se omezíme na pruty třídy 3 ve smyslu [1], čl.6.3.2, tj. předpokládáme pouze jejich plnou pružnou únosnost. V článku 6.8.2.2 se limituje jejich ohybový moment (jako globální nominální průřezová hodnota) veličinou  $M_{b,Rd}$ , jež závisí na mezi kluzu oceli  $f_y$ , hodnotě elastického modulu odporu v ohybu  $W_{el,y}$  a součiniteli vzpěrnosti při klopení  $\chi_{LT}$  podle vztahu (stejný index „y“ značí u „f“ mez kluzu, u „W“ elastický modul ve směru maximální ohybové tuhosti, jde jen o náhodnou shodu)

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot W_{el,y} \cdot f_y / \gamma_{M1} \quad (1)$$

kde [1] v čl.6.1.1 předpisuje hodnotu dílčího součinitele spolehlivosti materiálu  $\gamma_{M1} = 1,15$ . Součinitel vzpěrnosti  $\chi_{LT}$  závisí na poměrné štíhlosti při klopení  $\lambda_{LT}^*$  vztahy

$$\chi_{LT} = \text{Min}\{1; [\Phi^2 + (\Phi - \lambda_{LT}^*)^2]^{-1}\}, \text{ kde } \Phi = [1 + \alpha_1(\lambda_{LT}^* - 0,2) + \lambda_{LT}^{*2}] / 2 \quad (2)$$

V (2) značí  $\alpha_1$  součinitele imperfekce, jemuž je podle [1], čl. 6.8.1.1 a 6.8.2.2 pro křivku vzpěrné pevnosti  $a$  odpovídající klopení válcovaných profilů předepsána hodnota  $\alpha_1 = 0,21$ . Poměrná štíhlost  $\lambda_{LT}^*$  je dána vztahem

$$\lambda_{LT}^* = \lambda_{LT} / \lambda_1, \quad (3)$$

kde  $\lambda_1$  značí srovnávací štíhlost

$$\lambda_1 = \pi \cdot (E / f_y)^{1/2} \text{ a } \lambda_1 = 93,9 \quad (4)$$

pro modul pružnosti v tahu  $E = 210000$  MPa a pro nejběžnější pevnostní třídu oceli S235 s mezí kluzu  $f_y = 235$  MPa. Z výrazů (4) a (5) je vidět, že se štíhlost převádí na klasický Eulerův vzpěr oboustranně kloubově uloženého tláčeného prutu, v němž při srovnávací štíhlosti  $\lambda_1$  panuje v průřezu tlakové napětí rovné právě mezi kluzu  $f_y$ . Ve vzorci (3) značí  $\lambda_{LT}$  kritickou štíhlost při klopení, kterou lze – v závislosti na okrajových podmínkách a průběhu ohybového momentu podél prutu - určit pro několik typických průřezů z normativní přílohy G v [1]. V obecném případě je poměrná štíhlost  $\lambda_{LT}^*$  vázána s kritickým ohybovým momentem  $M_{cr}$  (který při pružném působení způsobí kolaps) vztahem

$$\lambda_{LT}^* = (W_{el,y} \cdot f_y / M_{cr})^{1/2} \quad (5)$$

Do výpočtu podle [1] vstupují v příloze G samozřejmě délka pole, výška profilu a kromě standardních parametrů (obě ohybové tuhosti) i hodnoty méně běžné: torsní tuhost volná i stísněná, střed smyku. V příloze G jsou zpracovány následující případy: krakorec (konstantní moment, spojitě rovnoměrné zatížení, soustředěná síla na konci), prostý nosník s variantami okrajových podmínek kloub/vetknutí pro oba ohyby a torsi a pro čtyři typické průběhy ohybového momentu (obecný lineární průběh, spojitě rovnoměrné zatížení, soustředěná síla uprostřed), respektuje se vzdálenost působíště zatížení od středu smyku, rozlišuje se, zda zatížení působí na tláčené nebo na tažené pásnici profilu. Moduly pružnosti  $E$  a  $G$  vstupují do výpočtů jen nepřímo, přes mez kluzu  $f_y$  a srovnávací štíhlost  $\lambda_1$ . Pro ilustraci ještě uvádíme v tab.1 hodnoty poměrných štíhlostí  $\lambda_{LT}^*$ , součinitelů vzpěrnosti  $\chi_{LT}$  a odpovídajících poměrů  $M_{cr} / W_{el,y} \cdot f_y$ . Je z ní mj. vidět, že norma [1] volí pro poměrnou štíhlost  $\lambda_{LT}^* = 1$  hodnotu bezpečnosti proti ztrátě stability klopením rovnou  $1 / \chi_{LT} = 1,5$ .

Tabulka 1. Závislost součinitele vzpěrnosti a poměrného kritického momentu na štíhlosti

štíhlost $\lambda_{LT}^*$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
vzpěrnost $\chi_{LT}$	1,000	0,953	0,890	0,796	0,666	0,530	0,418	0,333	0,270	0,223
$1 / \chi_{LT}$	1,000	1,050	1,124	1,257	1,502	1,887	2,393	3,001	3,700	4,486
$M_{cr} / W_{el,y} \cdot f_y$	25,0	6,25	2,78	1,56	1,00	0,694	0,510	0,391	0,309	0,250

Protože [1] pokrývá jen řadu základních variant klopení nosníků, mohou v praxi vznikat pochybnosti, zda se snažit konkrétní případ na normu více či méně násilně „naroubovat“, či zda je lepší použít jiný universálnější numerický postup, jehož jednu variantu popíšeme.

### 3. Určení kritického zatížení metodou konečných prvků (FEM)

Výpočet sestává ze dvou kroků:

a) standardního statického řešení, které určí posuvy  $\mathbf{u}$  i prvotní napětí  $\sigma_0$  pro dané zatížení. Po diskretisaci jde o řešení soustavy lineárních rovnic ( $\mathbf{K}$  je globální tuhostní matice,  $\mathbf{b}$  je diskretisovaná podoba zatížení)

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (6)$$

b) řešení obecného problému vlastní hodnoty

$$[\mathbf{K} - p\cdot\mathbf{G}(\sigma_0)]\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (7)$$

kde jsme naznačili závislost geometrické matice  $\mathbf{G}(\sigma_0)$  na prvotním napětí  $\sigma_0$ . Výsledkem jsou vlastní čísla  $p_i$  a jim příslušné tvary ztráty stability  $\mathbf{u}_i$ . Tuhostní matice  $\mathbf{K}$  je pozitivně definitní, matice  $\mathbf{G}(\sigma_0)$  je obecně indefinitní, proto vlastní čísla  $p_i$  mohou být kladná i záporná. Nejmenší kladné číslo  $p_{\min}$  pak určuje zatížení  $\mathbf{b}_{cr}$  útvaru při ztrátě stability, které je formálně dáno výrazem

$$\mathbf{b}_{cr} = p_{\min}\cdot\mathbf{b} \quad (8).$$

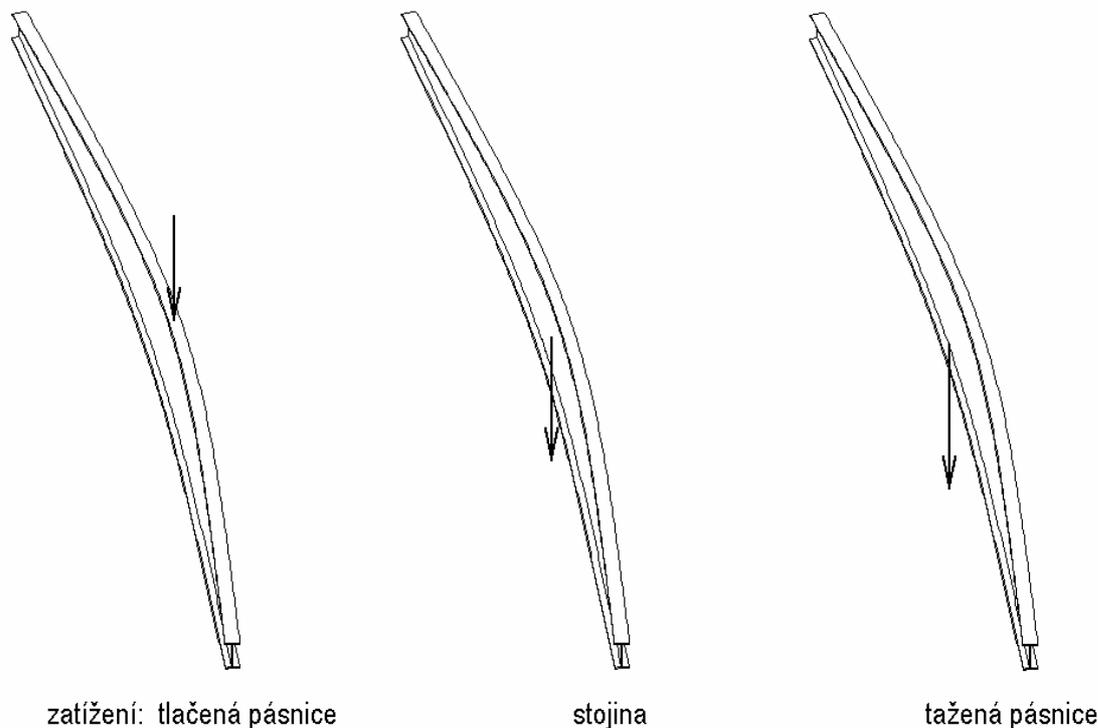
Tento postup řešení problémů elastické stability je implementován v tuzemském souboru programů metody konečných prvků PMD [2], používaném firmou VAMET s.r.o. Vlastní veličiny  $p_i$  a  $\mathbf{u}_i$  se určují metodou iterací na podprostoru, která snadno zpracuje i problémy s blízkými a násobnými vlastními čísly. Fyzikální význam přitom mají nejen kladná vlastní čísla, ale i záporná – znamenají pouze kritickou mez, která nastane při změně znaménka zatížení. Tak lze např. při jednom výpočtu stanovit obě kritické meze, platné pro zatížení tlačené i tažené pásnice I- nebo U-profilu.

Pro navázání takto získaných výsledků na pravidla výpočtu obsažená v [1] nestačí pouhé určení kritického zatížení z rov.(8). Protože [1] omezuje vztahem (1) ohybový moment v prutu, je účelné stanovit kritickému zatížení  $\mathbf{b}_{cr}$  odpovídající moment  $M_{cr}$ , z (5) pak určit poměrnou štíhlost  $\lambda_{LT}^*$  a konečně z rov. (2) a (1) spočítat moment únosnosti při ohybu  $M_{b,Rd}$ . Připomeňme, že u komplikovanějších útvarů může být potřebné určit několik hodnot  $M_{cr}$ , k čemuž je nutno vzít na pomoc i příslušné tvary ztráty stability  $\mathbf{u}_i$ . Jako příklad může posloužit prostě podepřený nosník s převislým koncem, zatížený jak v poli, tak na převislém konci, u nějž je obecně třeba určit přípustný ohybový moment v obou těchto místech. Domníváme se, že navržený postup je korektnější a bližší duchu [1], než pouhé limitování zatížení hodnotou (zvolené) bezpečnosti vůči ztrátě stability.

### 4. Porovnání výsledků výpočtu podle ČSN a FEM

Jako příklad byl vybrán oboustranně prostě podepřený nosník délky 6 m o profilu I20 resp. U20, zatížený soustředěnou silou uprostřed. Zatížení působilo buď na tlačенou pásnici, nebo na stojinu, nebo na taženou pásnici profilu. Při výpočtu FEM bylo zatížení alternativně realizováno na linii pásnice (kolmé k ose nosníku), na malou plochu povrchu pásnice resp. na plochu příčného řezu stojiny. Soustředěné zatížení jediného uzlu sítě prvků je nevhodné, neboť vyvolává nereálné lokální špičky napětí. Předběžné testovací výpočty prokázaly, že při diskre-

tisací válcovaného profilu isoparametrickými prostorovými šesti- a pěti-stěny s 20-ti a 15-ti uzly (tedy zhruba řečeno s kvadratickou interpolací posuvů po prvku), jsou již při jediném prvku po tloušťce profilu výborně vystiženy jak obě ohybové, tak Saint-Venantova i sektoriální torsní tuhost. Výsledky výpočtů jsou shrnuty v tab.2, je z nich vidět velmi dobrou shodu obou postupů. Pro profil I20 jsou tvary ztráty stability naznačeny v obr.1. Postupně rostoucí délky vektoru zatěžovací síly odpovídají růstu meze stability se změnou jejího působení.



Obr.1. Tvary ztráty stability klopením prostého nosníku I20

Tabulka 2. Výsledky výpočtů únosnosti nosníků při ohybu (klopení) podle ČSN a FEM

profil	štíhlost $\lambda_{LT}^*$		vzpěrnost $\chi_{LT}$		$M_{cr}$		$M_{b,Rd}$		$M_{b,Rd}$
	-		-		Nm		Nm		-
místo zatížení	ČSN	FEM	ČSN	FEM	ČSN	FEM	ČSN	FEM	FEM/ČSN
I20									
tlačná pásnice	1,274	1,289	0,485	0,477	30982	30287	21216	20850	0,9828
stojina	1,186	1,194	0,539	0,534	35736	35271	23558	23341	0,9908
tažená pásnice	1,105	1,108	0,593	0,591	41218	40960	25927	25823	0,9960
U20									
tlačná pásnice	1,155	1,192	0,559	0,535	33620	31612	21808	20894	0,9581
stojina	1,054	1,091	0,628	0,602	40381	37686	24497	23494	0,9591
tažená pásnice	0,962	1,002	0,692	0,664	48504	44692	27011	25920	0,9596

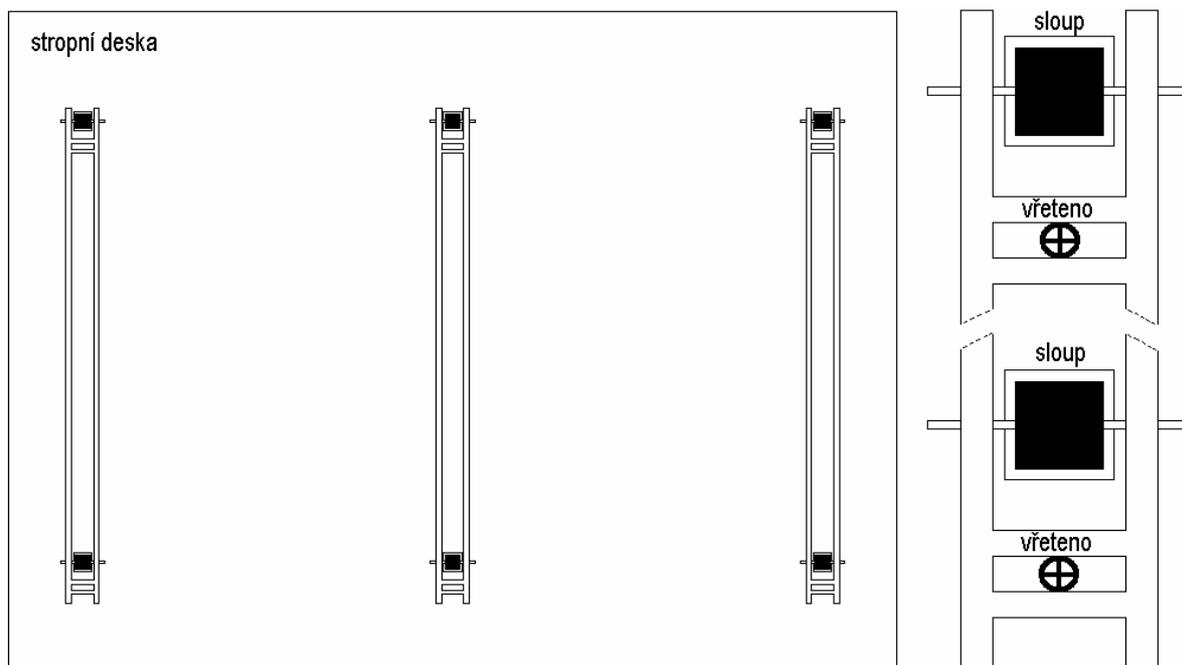
### 5. Příklad z praxe: stanovení únosnosti složeného prutu FEM

Při stavbě nízkopodlažních domů lze použít tzv. metodu zvedaných stropů. Schéma je v obr.2: na stavbě se nejprve upraví základ a vztyčí šest železobetonových sloupů na nichž spočívají tři dvojité ocelové nosníky, sloužící pro zvedání stropů za pomoci šesti závitových vřeten. Jde

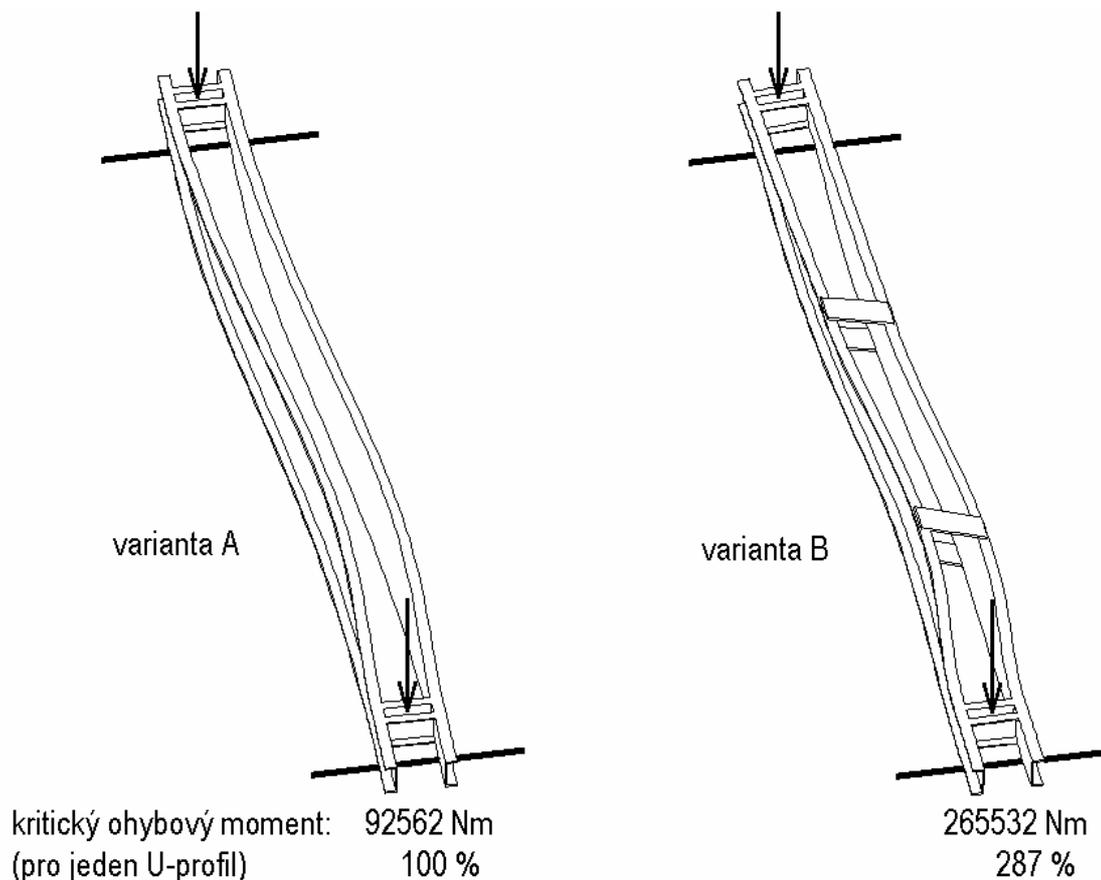
o prostě podepřené nosníky s převislými konci, zatížené vřety blízko podpor, průběh momentu je odlišný od případů uvedených v [1]. Vzdálenost podpor je 6 m, nosníky je z konstrukčních důvodů výhodné složit z U-profilů, zvolen byl profil U20. Původně se předpokládaly dva U-profilu, propojené jen v místech zatížení vřety (varianta A). Po předběžném rozboru bylo rozhodnuto spojit oba U-profilu i v mezilehlých partiích (varianta B) – viz obr.3. Statická napětí se v obou případech téměř neliší, podstatný rozdíl je v klopení: díky této úpravě vzrostla mez stability 2,87-krát a pokles únosnosti způsobený klopením se snížil z 15% na 5% - viz tab.3. V obr.3 jsou pro oba případy naznačeny tvary ztráty stability, je z něj názorně vidět, jak „spolupráce“ obou U-profilů přispívá k stabilitě útvaru. U varianty B je třeba věnovat pozornost i spojovacím prvkům (např. deskám) obou U-profilů. Samotné statické zatížení v nich sice vyvolává jen nepatrná napětí, přesto se však nesmějí poddimenzovat. Při extrémně slabých deskách by nastala ztráta stability nejdříve u nich, a nikoliv klopením podélných U-profilů. Nejspolehlivější způsob jejich hodnocení vychází z průběhů napjatosti při relevantním tvaru ztráty stability: napjatost spojů by měla být přiměřeně (odhadujeme asi o 30 % až 50 %) menší, než napjatost samotných nosníků.

Tabulka 3. Únosnost nosníku U20 pro zvedané stropy

varianta	kritický moment	štíhlost	vzpěrnost	moment
	$M_{cr}$ [Nm]	$\lambda_{LT}$ [-]	$\chi_{LT}$ [-]	$M_{b,Rd}$ [Nm]
A	92562	0,69639	0,84944	33154
B	265532	0,41114	0,94983	37072



Obr.2. Schéma metody zvedaných stropů



Obr.3. Tvary ztráty stability dvojitéch nosníků z profilů U20

## 6. Závěr

Příspěvek dává návod k posouzení únosnosti ohýbaných nosníků na klopení pomocí metody konečných prvků v těch případech, na něž nelze bezprostředně aplikovat postupy obsažené v příslušné normě [1]. Snaží se přitom i při numerické cestě řešení využít zkušenosti v normě zahrnuté a vtělené do parametrů respektujících materiálové, geometrické i jiné imperfekce a volbu bezpečnosti. Výsledky výpočtů únosnosti na klopení podle normy [1] a metodou konečných prvků se na několika jednoduchých případech velmi dobře shodují. Výhodou je podstatné rozšíření aplikačních možností, neomezené na případy obsažené v normě a jim blízké. Navíc vytvoření výpočtového modelu FEM a jeho statické řešení implicitně obsahuje i efektivní hodnocení statické únosnosti v možných atypických případech konstrukcí a zatížení. Navržený postup je ilustrován na příkladu z technické praxe.

## 7. Literatura

- [1] ČSN 73 1401 Navrhování ocelových konstrukcí (1998)
- [2] Výpočtový systém PMD, doporučen odbornou komisí SÚJB pro výpočty zařízení jaderné energetiky stanoviskem č.515 (1999)