

INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE s mezinárodní účastí Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

""""""""""DETERMINATION OF A DATABASE OF ADDITIONAL """""""EFFECT FROM NAVIER-STOKES EQUATION

J. Müller*, E. Malenovský*, F. Pochylý^{*}

Summary: One of the possibility, how to reduce amplitude of transversal vibration of rotors is to put together their rotating and no-rotating part by the squeeze film damper. This damper brings additional effect, namely additional mass and add^{*} itional damping, into vibrating shaft. These effects cannot be neglected and must be included to the solution of the rotor system. In this contribution are this effects determined by means of a new access, which is based on Navier-Stoke's equation.

1. ÚVOD

Jednou z možností jak snížit amplitudu příčného kmitání rotorů, je vložit mezi vnější kroužek valivého ložiska a skříň motoru hydrodynamický olejový tlumič, obr. 1. Radiální mezera bývá poměrně malá , pouze několik desetin milimetru. Takový hydrodynamický systém se ve vztahu ke kmitajícímu hřídeli projevuje přídavnými silovými účinky, které si můžeme přestavit jako virtuální hmotu a tlumič, přidaný k hřídeli. Tyto přídavné účinky (hmotnosti a tlumení) nemůžeme pro jejich velikost zanedbat a musíme je zahrnout do řešení rotorové soustavy.

V literatuře je analýza tlumičů poměrně podrobně a často publikována např.[1]-[3]. Teotetický základ všech dosavadních analýz vychází z Reynoldsovy rovnice, která ovšem vychází z řady zjednodušených předpokladů.

Zde je presentován nový přístup, navrhovaný F. Pochylým a E. Malenovským, který je na **obecnější úrovni**. Výchozími rovnicemi jsou **Navier-Stokesova rovnice** a rovnice kontinuity plus okrajové podmínky, jenž daný problém popisují lépe než Reynoldsova rovnice.

Navíc se podařilo odvodit transformaci, díky níž je možné vyloučit rychlost tělesa z rovnic. Tzn. přídavné účinky jsou pouze funkcí polohy středu hřídele v tlumiči, nejsou funkcí rychlosti ani zrychlení. Úlohu není tedy nutné řešit jako vázanou, což je obrovská přednost tohoto přístupu. Vlastní algoritmus analýzy dynamických vlastností rotorových soustav se tak skládá ze dvou samostatných kroků. Nejdříve se ve vhodném programovém

^{*} Ing. Jan Müller: VUT FSI, Technická 2, 616 69 Brno, tel.: 4114 2871, e-mail: janmuller@centrum.cz, Doc. Ing. Eduard Malenovský, DrSc.:VUT FSI, Technická 2, 616 69 Brno, tel.: 4114 2855, e-mail: malenov@umtn.fme.vutbr.cz, Prof. Ing. František Pochylý, CSc, VUT FSI, Technická 2, 61669 Brno, tel: 4114 2335 e-mail: pochyly@khzs.fme.vutbr.cz

prostředí, zaměřeném na analýzu tekutinových systémů, provede výpočet tzv. **databáze přídavných účinků**, tj. stanovení přídavných hmotností a tlumení pro každou polohu středu hřídele v tlumiči. Následně se v programovém prostředí, vhodném pro analýzu dynamických vlastností rotorových soustav, provede analýza rotorové soustavy se zahrnutím výsledků získaných z předchozího řešení, tzn. matice přídavných účinků jsou zahrnuty do matic hmotností a tlumení na levé straně pohybové rovnice. Tento teoretický přístup k řešení je detailně uveden v [4-6].

Jelikož se jedné o přístup zcela nový je nezbytné provést komplexní porovnání s výsledky dosaženými pomocí Reynoldsovy



Obr.1Hydrodynamický tlumič

rovnice. Porovnání obou přístupů je provedeno i)na základě přídavných účinků (hmotností a tlumení) ii) na základě ustálené odezvy modelové rotorové soustavy (Lavalův rotor) na buzení nevývahou. Ustálené orbity stanovené na základě numerického modelu jsou porovnány s orbity stanovenými na základě experimentu, provedeném na stavebnicové rotorové soustavě Rotor Kit RK-4.

2. Teoretická analýza

2.1 Navier-Stokesova rovnice

Kapalina je uvažována jako reálná, nestlačitelná, nekvitující, předpokládáme laminární proudění a malé kmity tělesa. V tomto případě má pohybová rovnice tekutiny (Navier Stokesova) (1), rovnice kontinuity (2) a okrajové podmínky (3) následující tvar :



Obr.2 Jednoduché schéma hydrodynamického tlumiče

V Einsteinově sumační symbolice mají výše uvedené rovnice tvar

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} - \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$$
(4)
$$\frac{\partial c_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\mathbf{S}: \boldsymbol{c}_i = \dot{\boldsymbol{v}}_i \tag{5}$$

$$\Gamma: c_i = 0 \tag{6}$$

kde **c** - rychlost kapaliny, $\dot{\mathbf{v}}$ - rychlost vnitřního kroužku tlumiče, ρ - hustota kapaliny, η - dynamická viskozita kapaliny. U prostorové úlohy rozeznává N-S rovnice na čelech tlumiče (P,K) dva typy okrajových podmínek. A to buď p=0 (otevřený tlumič) a rychlosti se dopočítají nebo c=0 (těsně uzavřený tlumič) a tlaky se dopočítají.

Poté přejdeme k metodě kontrolních objemů a obě rovnice (1) a (2) integrujeme přes zvolený kontrolní objem ΔV . Podrobně je tento nový přístup publikován např. v [4]-[6]. Zde jsou z úsporných důvodů uvedeny pouze základní vztahy. Pokud bychom soustavu rovnic (1)-(3) řešili bez jakékoliv další modifikace, bylo by nezbytné zahrnout do řešení rovněž pohybové rovnice tělesa a úlohu řešit jako vázanou. Použitím vhodné substituce (7) je však možné z rovnic rychlost tělesa vyloučit :

$$c_{i} = \int_{0}^{t} \alpha_{ij}(t-\tau) \dot{v}_{j}(\tau) d\tau$$

$$p = \int_{0}^{t} \beta_{i}(t-\tau) \dot{v}_{i}(\tau) d\tau$$
(7)

Uvedenou substitucí se obecně v prostoru 3D zavádí místo tří složek rychlosti a tlaku devět složek α_{ij} a tři složky β_i . To umožní využitím Diracovy funkce vyloučit z okrajových podmínek rychlost tělesa \dot{v}_i . Úlohu není tedy nutné řešit jako vázanou. Přídavné účinky jsou pak pouze funkcí polohy středu čepu hřídele v tlumiči. Nejsou funkcí rychlosti ani zrychlení čepu.

Aplikace Bézierova tělesa

.

Bézierovo těleso (8) je použito pro popis geometrické konfigurace olejového filmu (stejně tak pro popis rychlostního a tlakového pole).

$$\mathbf{r}(u,v) = \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{p}\omega_{ijk}\mathbf{r}_{ijk}\mathbf{B}_{i}^{n}(u)B_{j}^{m}(v)B_{k}^{p}(w)\right) / \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{p}\omega_{ijk}\mathbf{B}_{i}^{n}(u)B_{j}^{m}(v)B_{k}^{p}(p)\right)$$
(8)

kde B jsou Bernsteinovy polynomy, u,v jsou parametry které nabývají hodnot (0,1), viz [7].

3. Reynoldsova rovnice

Jak již bylo řečeno v úvodu tato rovnice je pro popis tlakového pole v tlumiči doposud nejpoužívanější. A v literatuře je prezentována velmi často. Při použití tohoto přístupu je nutné úlohu řešit jako vázanou, neboť síly od olejového filmu (tlumící i setrvačné) jsou nelineární funkcí polohy a rychlosti středu čepu hřídele v tlumiči. Toto ovšem vnáší do rotorové soustavy silnou nelinearitu. Analytické řešení není tedy možné a je nutno použít některou z metod numerické integrace. V tomto případě je ovšem řešení obrovsky časově náročné, zvláště pak pro rotorové soustavy s větším množstvím tlumičů. Proto je ve většině prací ([1],[2],[3]..) předpokládána centrická kruhová trajektorie středu čepu hřídele v tlumiči. Za použití tohoto předpokladu jsou přídavné účinky funkcí pouze polohy středu čepu hřídele v tlumiči. Rovněž porovnání s Navier-Stokesovou rovnicí je provedeno za předpokladu kruhové trajektorie středu čepu hřídele v tlumiči. Je nutné srovnávat tytéž okrajové podmínky. Podmínku nulových rychlostí na čelech však Reynoldsova rovnice nezná, ovšem této podmínce odpovídá dlouhá aproximace Reynoldsovy rovnice, kdy obvodové proudění převládá nad axiálním. Vztahy (9) jsou závislosti přídavné hmotnosti m_{rr} a tlumení b_{rr} z Reynoldsovy rovnice, pro předpoklad kruhové trajektorie. Ostatní členy tenzoru přídavných účinků jsou uvedeny v [2] a [3].

Krátký tlumič

Dlouhý tlumič

$$m_{rr} = 2 \frac{\rho L R^{3}}{c} \frac{1}{10} \frac{\pi}{\varepsilon^{2}} \left[\frac{1}{(1-\varepsilon^{2})^{1/2}} - 1 \right] \qquad m_{rr} = 2 \frac{\rho L R^{3}}{c} \frac{12}{10} \frac{\pi}{\varepsilon^{2}} \left[1 - (1-\varepsilon^{2})^{1/2} \right] b_{rr} = 2 \frac{\mu R L^{3}}{c} \frac{\pi}{2} \frac{(1+2\varepsilon^{2})}{(1-5\varepsilon^{2})^{5/2}} \qquad b_{rr} = 2 \frac{\mu R L^{3}}{c} \frac{6\pi}{(1-\varepsilon^{2})^{3/2}}$$
(9)

Kde ρ-hustota oleje, μ-dynamické viskozita,ε -ekcentricita, R-poloměr čepu hřídele, L-délka tlumiče, c-radiální mezera

Z uvedených vztahů je zřejmé, že za předpokladu kruhové trajektorie jsou přídavné účinky závislé pouze na ekcentricitě středu hřídele v tlumiči.

4. Zahrnutí přídavných účinků do řešení rotorové soustavy

Jak bylo řečeno v předchozím tento nový přístup umožňuje separovat od sebe pohyb tělesa a tekutiny. Tenzory přídavných účinků jsou tedy závislé pouze na poloze středu hřídele v tlumiči, můžeme je tedy zahrnout na levou stranu pohybové rovnice (12). Zavedeme **databázi přídavných účinků** obr.9,10, tzn. stanovíme matice přídavných účinků pro řadu poloh středu hřídele v tlumiči. Toto by bylo velice časově náročné, podařilo se však ověřit platnost ortogonální transformace, díky které stačí pouze stanovit hodnoty přídavných účinků pro jiná φ se použije následujících transformačních vztahů: $M_2=C^TM_1C$ (10), kde M_1 je matice přídavných účinků v pevném souřadném systému 1 viz. obr.3 a matice M_2 je matice přídavných účinků v natočeném systému 2. Matice přídavných účinků jsou řádu 2x2, C je

transformační matice tohoto tvaru :
$$C = \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$
 (11)

Sestavení pohybové rovnice

Kmitání soustav s n stupni volnosti je popsáno n diferenciálními rovnicemi druhého řádu. V našem případě se jedná o soustavu nelineárních dif. rovnic, jelikož k lineární rotorové soustavě přidáváme nelineární přídavné účinky hydrodynamického tlumiče. Pohybová rovnice má tedy tvar :

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_{p})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B} + \mathbf{B}_{p})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$$
(12)

Kde M_p a B_p jsou matice přídavných hmotností a tlumení, které jsou v případě použití nového přístupu založeného na N-S rovnici funkcí pouze polohy středu čepu hřídele v tlumiči, tedy

 $M_p = M_p(q)$ a $B_p = B_p(q)$. Tzn. aby bylo možné tuto nelineární dif. rovnici řešit je nutné nejprve stanovit **databázi přídavných účinků**, tj. velikost přídavných účinků pro "každou polohu" středu čepu hřídele v tlumiči.

$$\mathbf{M}_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0\\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B}_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0\\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$
(13)

 m_{ii} – je složka přídavné hmotnosti

 b_{ii} – složky přídavného tlumení

M, B, K jsou matice hmotnosti, tuhosti a tlumení

ÿ, ġ, q jsou vektory rychlosti, zrychlení a výchylky

 $\mathbf{Q}(t)$ je vektor budících sil

Analytické řešení nelineární dif. rovnice (12) není možné. Proto je k jejímu řešení nutné použít některou z metod numerické matematiky. V tomto případě byla zvolena Newmarkova metoda.

5. Experimentální úloha

Účelem experimentální analýzy v tomto článku je potvrdit výsledky dosažené pomocí matematického modelu. Experimentální stanovení přímo tenzorů přídavných účinků je poměrně obtížné. Proto jsme se rozhodli porovnat tyto přístupy na základě odezvy rotorové soustavy, konkrétně na základě ustálených orbitů.

Jako reálné modelové rotorové soustavy pro experimentální měření bylo použito stavebnicového systému ROTORKIT RK4, který byl zakoupen na Ústav mechaniky těles pro školní a vědecko-výzkumné účely. Jedná se o takovou technickou soustavu, kde libovolnou kombinací počtu i typu ložisek, typu uložení hřídele, počtem hmotných kotoučů, jejich rozmístěním a dále vhodnou volbou velikosti nevývahy se dají simulovat a analyzovat nejrůznější úlohy z oblasti dynamiky rotorových soustav.

Z numerických analýz, obr. 7-10, bylo zjištěno, že přídavné účinky výrazně závisí na radiální vůli v mezikruží tlumiče. Z toho důvodu byly použity čtyři varianty tlumiče z různou radiální vůlí a to 0.5mm, 1mm, 1.5 mm.

Popis měřícího řetězce

Měřící řetězec tvoří dva bezkontaktní snímače dráhy, umístěné ve dvou na sobě kolmých směrech, pracující na principu vířivých proudů, bezkontaktní snímač otáčkových pulzů. Dalším členem měřícího řetězce je zesilovač a dále antialiazingový a dolnopropustný filtr, tyto uzavírají analogovou část přenosu signálu, poté signál pokračuje do A/D převodníku a následně do multianalyzátoru PULSE od firmy Bruel&Kjaer, který umožňuje zpracování dat několika způsoby. Zpracování dat navíc probíhá v reálném čase, tzn. je možno výsledky měření okamžitě sledovat. PULSE rovněž umožňuje snadnou komunikace s Matlabem. Data jsou ukládána ve formě textových souborů na harddisk počítače.

6. Řešení modelových úloh

Geometrické rozměry modelového tlumiče pro numerický model i experiment jsou shodné: L=0.014m, R=0.015, byly sledovány tři různé velikosti radiální mezery : 1.5mm, 1mm, 0.5mm. Fyzikální vlastnosti tekutiny jsou : ρ =885 kg/m³, μ =0.008 Pas. Rovněž byl sledován vliv hydrodynamického tlumiče na odezvu rotorové soustavy analýzou Lavalova rotoru (obr.4) o těchto parametrech : hmotnost kotouče je 1 kg, přídavná tuhost 16 000 N/m

Na obr. 5,6 jsou rychlostní pole stanovené z N-S rovnice pro okrajové podmínky na čelech tlumiče p=0 (otevřený tlumič-převládá axiální proudění) a c=0 (uzavřený tlumič-převládá obvodové proudění).Na obr. 7,8 jsou porovnány velikosti přídavných účinků v závislosti na excentricitě stanovené na základě Re a N-S rovnic.Srovnání je provedeno pro radiální mezeru 0.5mm a pro různé okrajové podmínky na čelech tlumiče.

- Až překvapivě dobrá kvalitativní i kvantitativní shoda mezi Re a N-S rovnicí a to jak v případě přídavných hmotností tak i tlumení. N-S c=0 velmi dobře odpovídá dlouhé aproximaci Re rovnice a naopak N-S p=0 odpovídá krátké aproximaci Re rovnice.
- Uzavřený tlumič podle očekávání vykazuje několikanásobně vyšší přídavné účinky. Přídavné účinky, zejména tlumení, výrazně rostou s excentricitou což je velmi žádoucí.
- Přídavné účinky rovněž rostou s klesající radiální mezerou.

Na obr. 11 jsou porovnány ustálené orbity středu hřídele v tlumiči, získané použitím N-S rovnice, pro ω =100 rad/s. Je zřejmé, že při větším vymezení vůle již nemůžeme předpokládat kruhovou trajektorii a použití Re rovnice s tímto předpokladem tudíž není správné. Na dalším obr.12 je orbit středu hřídele pro okrajovou podmínku p=0 a nevývahu 5g. Na posledních dvou obr.12,13 jsou porovnány orbity N-S p=0 a Re krátký a na obr.10 N-S c=0 Re dlouhý, pro nevývahu 2g. Radiální mezera je 0.5mm u všech případů.

- Použití předpokladu kruhové trajektorie je pro tento model rotorové soustavy možné do vymezení vůle cca 60%.
- Při vymezení vůle cca do 60% je shoda mezi N-S a Re rovnicí velmi dobrá, při větším vymezení vůle již nemůžeme použít předpoklad kruhové trajektorie a tudíž není možné oba přístupy porovnat.

Experimentální stanovení ustálených orbitů

Pro všechny tři druhy radiálních vůlí byly stanoveny ustálené orbity při buzení nevývahou. Ke stanovení ustálených orbitů bylo použito opět multianalyzátoru PULSE. Na následujících obrázcích 15-22 jsou zobrazeny ustálené orbity středu hřídele v tlumiči při

buzení nevývahou 4 gramy pro tlumič s radiální vůlí 1mm. Otáčky jsou zvyšovány tak, aby došlo k přechodu přes rezonanci, která je okolo 3000 ot/min. Z obrázků je vidět, že amplituda postupně roste, při rezonanci dokonce dojde k vymezení vůle, poté amplituda opět postupně klesá. Obdobně je tomu i u ostatních radiálních vůlí.

Na obr. 19 je vykreslen orbit středu hřídele pro 2700 ot/min gramy pro případ bez oleje (olej není pumpován do ložiska). Na dalším obr. 20 je totéž, ale pro případ s olejem. Snížení amplitudy je naprosto zřejmé.

Na dalších obr. 21,22 jsou tyto experimentální výsledky porovnány s numerickým modelem, viz. kapitola 4. Orbit získaný pomocí numerického modelování je vyznačen červenou barvou. Zobrazené výsledky jsou opět pro radiální vůlí 1mm. Přídavné účinky byly stanoveny pro okrajovou podmínku c=0, která lépe odpovídala experimentu (okrajová podmínka závisí na utažení čela tlumiče).

Poměrně dobré shody bylo dosaženo pro menší vymezení vůlí. Naopak v blízkosti resonančních otáček byly orbity rozdílné.

7. Závěr

V příspěvku je uveden nový teoretický přístup k analýze dynamických vlastností tuhého rotujícího hřídele v reálné tekutině. Přístup vychází z Navier-Stokesovy pohybové rovnice tekutiny. Vhodnou substitucí lze od sebe separovat pohyb tělesa a tekutiny. K analýze dynamických vlastností tekutiny je použito Bézierovo těleso, přičemž řešení je provedeno v křivočarých souřadnicích. Řešení na základě Navier-Stokesovy rovnice umožňuje sestavení databáze přídavných účinků.

Na řadě modelových úloh je tento přístup porovnán s doposud nejpoužívanější Reynoldsovou rovnicí, přičemž bylo dosaženo kvalitativní i kvantitativní shody.

V případě porovnání ustálených orbitů získaných na základě experimentu s numerickým modelem (N-S rovnice) bylo dosaženo poměrně dobré shody pro vymezení vůle přibližně do 50% a pro stavy dostatečně vzdálené od resonančního. Rozdíly mohou být rovněž způsobeny příliš zjednodušeným modelem rotorové soustavy (Lavalův rotor). Proto se chceme v budoucnu zaměřit na vyvinutí přesnějšího MKP modelu.

8. Literatura

- [1] El-Shafei A., Crandall S. H.: Fluid inertia forces in squeeze film dampers, ASME Rotating machinery and vehicle dynamics, 1991, 219-228
- [2] A. El-Shafei: Unbalance Response of Jeffcott Rotor Incorporating Short Squeeze Film Dampers, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1990,445-453
- [3] A. El-Shafei: Unbalance response of a Jeffcott Rotor Incorporating Long Squeeze Film Dampers, Journal of Vibration and Acoustics, 1991, 85-94
- [4] Malenovský E., Pochylý F. : The Rigid Body Interaction with Real Liquid, Colloquium Dynamic of Machines , 2002, 121-128
- [5] Pochylý, F., Malenovský, E., Hlavoň, P.: The Nonstationary Motion of the Rigid Body in Real Liquid, 3rd Int. Conference Engineering Aero-Hydroelasticity, Prague, 1999, 346-351
- [6] Malenovský E., Pochylý F.: Computational Modeling of Velocity and Pressure Fields of Squeeze Film Dampers Using Navier-Stokes Eq., Proceedings Part III., Section No 9, Applied Mechanics, 2001, 590-595

- [7] Malenovský E.: Využití Bézierových entit v mechanice, Inženýrská mechanika, 2000, č.6 401-424
- [8] Pochylý, F, The nonstationary Motion of the Rigid Body in Real Liquid, Proc. of 3rd International Conference Engineering Aero-Hydroelasticity, Prague, 346-351, (1999)



Obr.7 Radiální mezera 0.5mm

Obr.8 Radiální mezera 0.5mm











Re krátký, nevývaha 2g



Obr. 10 Přídavné tlumení b11 v závislosti poloze hřídele v tlumiči, pro N-S c=0









Obr.21 1500 ot/min

Obr.22 4000 ot/min