



INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

""PROBABILITY ANALYSIS OF PROBLEMS LEADING TO ""SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

J. Rojíček*

Summary: *This paper describes estimation of random effects for systems of linear equations. It deals especially with presentation of the analytical method. The analytical method is shown in two examples. First example is simple frame (Joint method). Second example is clamped beam (FEM, Analytical method). All loads must be mutually independent. The Monte Carlo method is used for verification.*

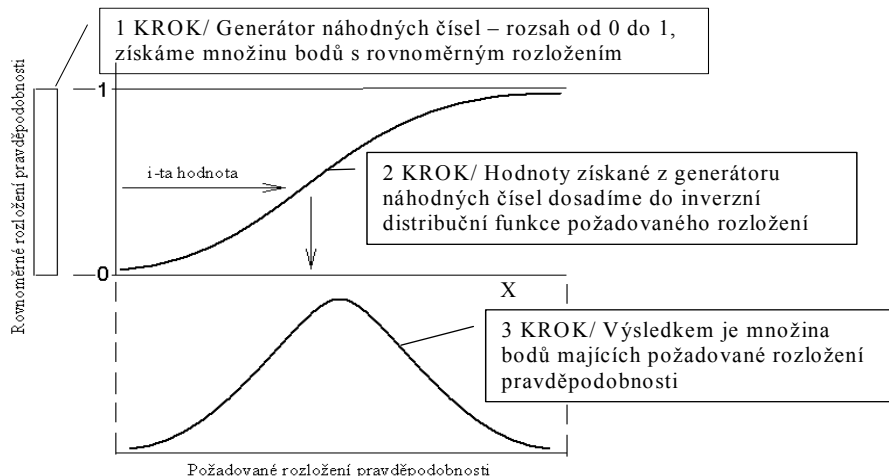
1. Úvod

V současné době se pro analýzu vstupních náhodných veličin používá často metoda Monte Carlo. V případech kdy hledáme řešení soustav rovnic (pro generování vstupních hodnot matic byla ve druhém příkladu použita MKP) a pokud navíc řešený problém obsahuje nelinearity je výpočet touto metodou velmi náročný na čas a výkon počítače. Postup uvedený v tomto příspěvku je založen na analytickém výpočtu a může zrychlit tento typ výpočtů. Uvedený postup je pouze prvním krokem a zabývá se pouze vzájemně nezávislými veličinami (ukázkové příklady obsahují pouze jednu sílu). Příspěvek neuvádí časové nároky na řešení u jednotlivých metod neboť řešení a kontrolní výpočet byl proveden v různých programech (Matlab, Mathcad). Cílem tedy bylo nalezení algoritmu využívajícího analytický postup. Dalším krokem bude vytvoření programu v Matlabu, kde bude možné lépe porovnat časové nároky na jednotlivé postupy a rozšířit metodu i pro vzájemně závislé veličiny.

2. Popis principu - metoda Monte Carlo (Marek P., Brozzetti J., Guštar M. 2001)

Obrázek 1. ukazuje způsob použití metody Monte Carlo v této práci. Na vstupu máme množinu hodnot s rovnoměrným rozložením pravděpodobnosti v mezích od 0 do 1 (levá strana obrázku). Známe také požadované rozložení a její distribuční funkci (inverzní distribuční funkci). V naznačeném směru pak přepočteme hodnoty: Máme množinu bodů s rovnoměrným rozložením, dosazením jednotlivých hodnot do inverzní distribuční funkce (požadované rozložení) získáme výslednou množinu bodů s požadovaným rozložením. Hodnoty dále dosadíme do zkoumané funkce (soustavy rovnic).

* Ing. Jaroslav Rojíček, kat. PRUŽNOSTI A PEVNOSTI, fakulta STROJNÍ, Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba. tel.: 069/699/4552, fax: 069/691 64 90, e-mail: jaroslav.rojicek@vsb.cz



Obr.1 Využití metody Monte Carlo v této práci

Hodnoty generované tímto způsobem byly využity pro výpočet a následné ověření testovaných postupů.

3. Popis principu navrženého postupu řešení

Princip řešení je uveden v literatuře Bolotin, V.V., 1978. Dále popisovaný postup se týká nejjednoduššího zadání rozšířeného na soustavy lineárních rovnic. Všechny vstupní parametry jsou vzájemně nezávislé a pouze jednorozměrné.

Řešení je založeno na větě o rozložení ryze monotónní funkce spojitě náhodné veličiny (např. Hátle, J.,Kahounová, J., 1978) :

$X = p(x)$ je frekvenční funkce (hustota pravděpodobnosti) spojitě náhodné veličiny X .

$y = \varphi(x)$ je ryze monotónní funkce na intervalu (a,b) (uvnitř intervalu má spojitou derivaci).

Pak hustota rozložení $Y = g(y)$ je ve tvaru: $g(y) = p(\hat{\varphi}(y)) \cdot |\hat{\varphi}'(y)|$ (1)

kde $\hat{\varphi}(y)$ je inverzní funkce k funkci $\varphi(x)$.

Pro ilustraci využití tohoto postupu je dále uveden jednoduchý případ pro dutý válcový vzorek zatížený pouze tahem – tlakem (Rojíček, J., 2005). Síla působící na vzorek má rovnoměrné rozložení pravděpodobnosti. $X = p(F) = \frac{1}{F_b - F_a}$ (2)

Kde F_a a F_b vymezují interval hodnot F ($F \in \langle F_a, F_b \rangle$). Napětí σ při zatížení vzorku tahem-tlakem stanovíme dle rovnice: $\sigma = \frac{F}{S} = \varphi(F)$, kde F je zatěžující síla a S plocha průřezu (v našem případě mezikruží). Najdeme inverzní funkci $\hat{\varphi}$, tedy $F = \hat{\varphi}(\sigma) = \sigma \cdot S$. Derivace inverzní funkce potom bude: $\hat{\varphi}'(\sigma) = S$. Dosazením do věty o rozložení ryze monotónní funkce spojitě náhodné veličiny získáme výslednou hustotu pravděpodobnosti:

$$p(\sigma) = \frac{S}{F_b - F_a} = \frac{1}{\sigma_b - \sigma_a} \quad (3)$$

Kde $\sigma_b = \frac{F_b}{S}$ a $\sigma_a = \frac{F_a}{S}$. Porovnáním rovnic (2) a (3) zjistíme, že výsledné rozložení je také rovnoměrné.

4. Rozšíření postupu

Výše uvedený postup můžeme rozšířit pro funkce více proměnných a pro soustavy rovnic.

Nechť $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_S)$ je s-rozměrný náhodný vektor (s – řád matice) a $X_1=p_1(x_1)$, $X_2=p_2(x_2)$, ... $X_S=p_S(x_S)$, jsou frekvenční funkce (hustoty pravděpodobnosti) spojitých náhodných veličin X_1, X_2 atd. (náhodné veličiny jsou vzájemně nezávislé).

Řešením různých problémů praxe získáme soustavy rovnic. Předpokládejme, že rovnice jsou lineární (viz např. příklad 1 - prutová soustava). V maticovém tvaru pak můžeme psát:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{X} \quad (4)$$

Kde $\mathbf{Y}=(Y_1, Y_2, \dots, Y_S)$ je s-rozměrný náhodný vektor. Pro jednoduchost předpokládejme vektor \mathbf{X} ve tvaru $\mathbf{X}=(0, 0, 0, \dots, 0, X_i, 0, \dots, 0, 0)$ (soustava je zatížena pouze jednou silou viz kapitoly 6 a 7).

Soustavu rovnic (4) převedeme na tvar:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}, \text{ kde } \mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B} \quad (5)$$

První rovnici ze soustavy (4) můžeme napsat jako:

$$a_{1,1} \cdot y_1 + a_{1,2} \cdot y_2 \dots = x_1 \quad (6)$$

První rovnici ze soustavy (5) můžeme napsat jako:

$$y_1 = b_{1,1} \cdot x_1 + b_{1,2} \cdot x_2 \dots + b_{1,i} \cdot x_i + \dots \quad (7)$$

Dále můžeme postupovat obdobně jako v rovnici (1) najdeme inverzní funkci k rovnici (7) (pravá strana již neobsahuje x_i) :

$$x_i(y_1, x_1, \dots) = (y_1 - b_{1,1} \cdot x_1 - b_{1,2} \cdot x_2 \dots) / b_{1,i} \quad (8)$$

Stanovíme derivaci inverzní funkce:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = \frac{1}{b_{1,i}} \quad (9)$$

Dosadíme a získáme sdruženou hustotu pravděpodobnosti (výsledná funkce neobsahuje x_i , ale obsahuje y_1) :

$$p_1(y_1, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_S) = p_i(x_i(y_1, x_1, x_2 \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_S)) \cdot \left| \frac{\partial x_i}{\partial y_1} \right| \cdot p_1(x_1) \cdot \dots \cdot p_S(x_S) \cdot \quad (10)$$

A integrací získáme marginální hustotu pravděpodobnosti:

$$p_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots p_1(y_1, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_S) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_S \quad (11)$$

Obdobným postupem můžeme získat hustotu pravděpodobnosti pro veličiny y_2, y_3, \dots

5. Linearizace

V dalším kroku se pokusíme vyřešit integrál (11). Nejprve zvolíme s-rozměrný náhodný vektor \mathbf{X} .

$$X_j = p_j(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x_{j\sigma}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j - x_{jS}}{x_{j\sigma}}\right)^2\right) \quad (12)$$

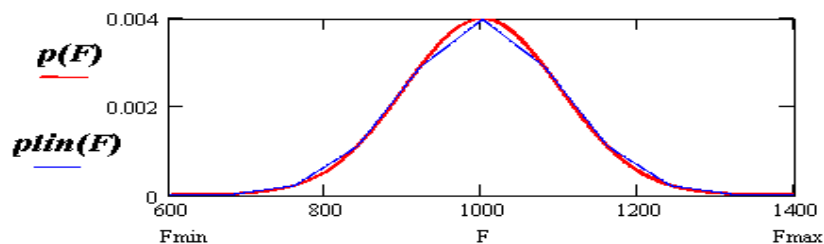
Pro $j=1 \dots S$ je $x_{j\sigma}$ směrodatná odchylka j-té veličiny a x_{jS} je střední hodnota j-té veličiny. Dosazením do (11) získáme integrál který je již poměrně komplikovaný.

$$p_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x_{i\sigma}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i(y_1, x_1, \dots) - x_{iS}}{x_{i\sigma}}\right)^2\right) \cdot \left|\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\right| \cdot p_1(x_1) \cdot \dots \cdot p_S(x_S) dx_1 \dots dx_S \quad (13)$$

Situaci komplikuje i-ta složka náhodného vektoru, převedeme tedy p_i ve vybrané oblasti na soustavu přímek. Velikost oblasti volíme např. pro uvedený případ $(x_{iS} - 4 \cdot x_{i\sigma}; x_{iS} + 4 \cdot x_{i\sigma})$. Počet dělení závisí na složitosti nahrazované funkce (V případech uvedených v následujících kapitolách je funkce p_i nahrazena pomocí 12 přímek).

$$p_i(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x_{i\sigma}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - x_{iS}}{x_{i\sigma}}\right)^2\right) \approx k_1 \cdot x_i + q_1, k_2 \cdot x_i + q_2, \dots, k_{12} \cdot x_i + q_{12} \quad (14)$$

Kde $k_1, k_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ jsou parametry přímek nahrazujících původní funkci p_i v jednotlivých intervalech.



Obr.2 Nahrazení funkce $p_i(x_i)$ soustavou přímek.

Rovnice (11) přeepsaná pomocí linearizované funkce má tvar pro první úsek:

$$p_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots (k_1 \cdot x_i(y_1, x_1, \dots) + q_1) \cdot \left|\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\right| \cdot p_1(x_1) \cdot \dots \cdot p_S(x_S) dx_1 \dots dx_S \quad (15)$$

Po úpravě a dosazení (9) dostaneme:

$$p_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \frac{k_1}{|b_{1,i}|} \cdot x_i(y_1, x_1, \dots) \cdot p_1(x_1) \cdot \dots dx_1 \dots + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \frac{q_1}{|b_{1,i}|} \cdot p_1(x_1) \cdot \dots dx_1 \dots \quad (16)$$

Druhý integrál v rovnici (16) můžeme zjednodušit ($\int_{-\infty}^{\infty} p_j(x_j) dx_j = 1$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \frac{q_1}{|b_{1,i}|} \cdot p_1(x_1) \cdot \dots dx_1 \dots = \frac{q_1}{|b_{1,i}|} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_2) dx_2 \dots = \frac{q_1}{|b_{1,i}|} \quad (17)$$

První integrál v rovnici (16) obsahuje proměnnou x_i dosadíme tedy rovnici (8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \frac{k_1}{|b_{1,i}|} \cdot x_i(y_1, x_1, \dots) \cdot p_1(x_1) \cdot \dots dx_1 \dots = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \frac{k_1}{|b_{1,i}|} \cdot \frac{y_1 - b_{1,1} \cdot x_1 - b_{1,2} \cdot x_2 \dots}{b_{1,i}} \cdot p_1(x_1) \cdot \dots dx_1 \dots (18)$$

Po jednoduché úpravě získáme výsledný tvar rovnice (18) (znovu využijeme $\int_{-\infty}^{\infty} p_j(x_j) dx_j = 1$):

$$\frac{k_1}{|b_{1,i}| \cdot b_{1,i}} \left(y_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) dx_1 \cdot 1 \cdot 1 \dots - b_{1,1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_1(x_1) dx_1 \cdot 1 \cdot 1 \dots - b_{1,2} \cdot 1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2 p_2(x_2) dx_2 \cdot 1 \dots - \dots \right) (19)$$

V rovnici (19) zbývá vyřešit pouze “jeden” integrál. Pro normální rozložení pravděpodobnosti můžeme použít:

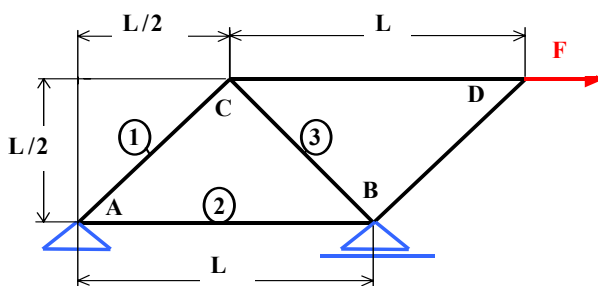
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_j p_j(x_j) dx_j = x_{i_s} (20)$$

Rovnice (15) po výše popsané úpravě má tvar pro první úsek:

$$p_1(y_1) = \left(\frac{q_1}{|b_{1,i}|} - \sum_{j \rightarrow 1..s}^{j \neq i} \left(\frac{k_1}{|b_{1,i}| \cdot b_{1,i}} \cdot b_{j,i} \cdot x_{i_s} \right) \right) + \frac{k_1}{|b_{1,i}| \cdot b_{1,i}} \cdot y_1 (21)$$

Obdobným způsobem získáme rovnice pro všechny úseky (i – se vztahuje k inverzní funkci (8)).

6. Příklad 1. Prutová soustava



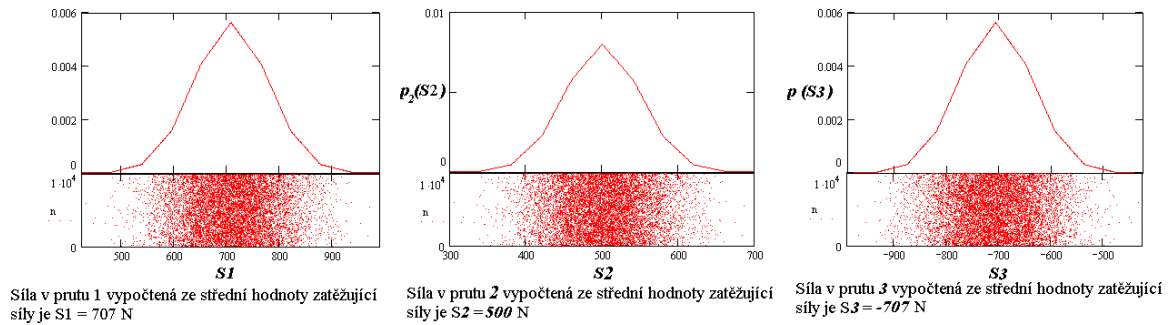
Obr.3 Testovací příklad 1

Pokusme se výše uvedený postup aplikovat na jednoduchou prutovou soustavu. Pro řešení nám postačí znát délku L a popsat náhodné zatížení F .

$$p(F) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma_F} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{F - F_S}{\sigma_F}\right)^2\right) (22)$$

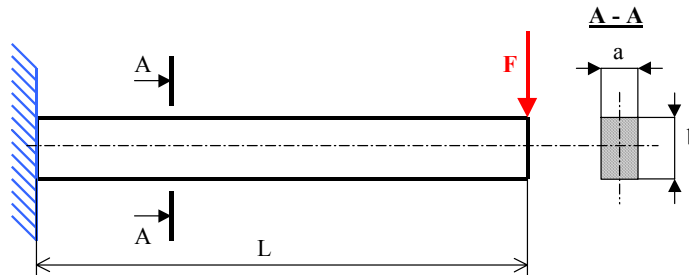
Což je normální rozložení se střední hodnotou F_S a směrodatnou odchylkou σ_F . Soustava rovnic byla vytvořena styčnickovou metodou. V maticovém tvaru ji můžeme zapsat jako rovnici (4) (řád matice - 8x8). Soustava rovnic byla řešena metodou Monte Carlo a navrženým výše popsaným způsobem. Výsledky řešení oběma postupy se shodují.

Následující grafy ukazují přímé výsledky řešení metodou Monte Carlo (množina bodů) a “analytickým” postupem (soustava přímek) pro první tři pruty.



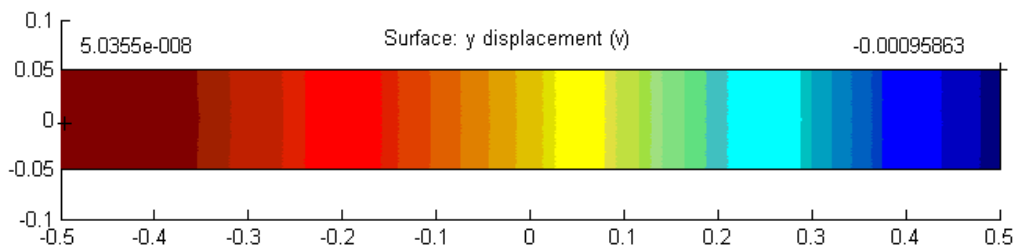
Obr.4 Výsledky výpočtu příkladu 1.

7. Příklad 2. Ohyb



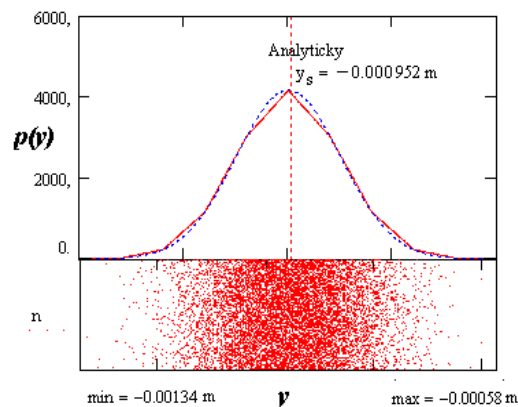
Obr.5 Testovací příklad 2

Pro řešení nám postačí znát délku L , rozměry a , b , vlastnosti materiálu E a popsat náhodné zatížení F . Což je normální rozložení (22) se střední hodnotou F_S a směrodatnou odchylkou σ_F . Výsledný posuv v místě zatížení silou F je $y_S = \frac{F_S \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J} = -0.952 \text{ mm}$ (analyticky, střední hodnota síly). Výsledek řešení MKP je na obrázku 6 (zatížení se střední hodnotou síly).



Obr.6 Výsledné posuvy v řešeném příkladu 2.

Pro sestavení soustavy rovnic (4) byla využita metoda konečných prvků (MKP). Na tuto soustavu rovnic byly aplikovány obě výše popsané metody (matice tuhosti - 1194x1194). V následujícím obrázku jsou uvedeny výsledky řešení metodou Monte Carlo, výsledky “analytického” řešení (modře je vyhlazená křivka) a pro orientaci analytické řešení průhybu pro střední hodnotu zatížení F_S .



Obr.7 Řešení příkladu 2 pro místo ve kterém působí síla.

8. Závěr

Článek se zabývá výpočtem hustoty pravděpodobnosti výsledných hodnot v případech kdy řešení problému vede na soustavu lineárních rovnic. Je zde naznačen postup, který je aplikován na dvou jednoduchých příkladech. První je prutová soustava zatížená jednou silou. Druhá úloha je vetknutý nosník zatížený jednou silou řešený MKP. Obě úlohy je možné vyřešit analyticky a můžeme je tedy jednoduše zkontrolovat. Dalším krokem bude rozšířit řešení i pro vzájemně závislé vstupní veličiny (síly) a provést celý postup v jednom programovacím prostředí.

9. Poděkování

Článek byl vytvořen s podporou GAČR 101/04/0475.

10. Literatura

Marek P., Brozzetti J., Guštar M. (2001) Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation,

Bolotin, V.V. (1978) Použití metod teorie pravděpodobnosti a teorie spolehlivosti při navrhování konstrukcí, SNTL, Praha.

Hátle, J., Kahounová, J. (1978) Úvod do teorie pravděpodobnosti, SNTL, Praha.

Škrášek J., Tichý Z. (1990) Základy aplikované matematiky II, III,

Rojíček, J. (2004) Výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu, sborník 6. ročníku konference Aplikovaná mechanika 2004, s.245-248

Rojíček, J. (2005) Odhad vlivu náhodných chyb na přesnost měření, Workshop2005, s. 58, VŠB-TUO, Ostrava

Pavelka, L., Doležalová, J. (1999) Pravděpodobnost a statistika, VŠB-TUO, Ostrava