INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

REDUCTION METHOD FOR INVESTIGATION EIGENFREQUENCES AND EIGENVECTORS OF MECHANICAL SYSTEMS

O. Tuhovčák

Summary: *This paper presents evolution of the reduction method for solution of natural frequencies of mechanical systems. The purpose of the reduction method is to reduce the number of DOF and decrease computing time. The proposed method is generalization method of modal synthesis, which is based on decomposition of the structure. The model of solved problem is made by using ANSYS and then is transported to MATLAB. The algorithm code is written in MATLAB.*

1. Úvod

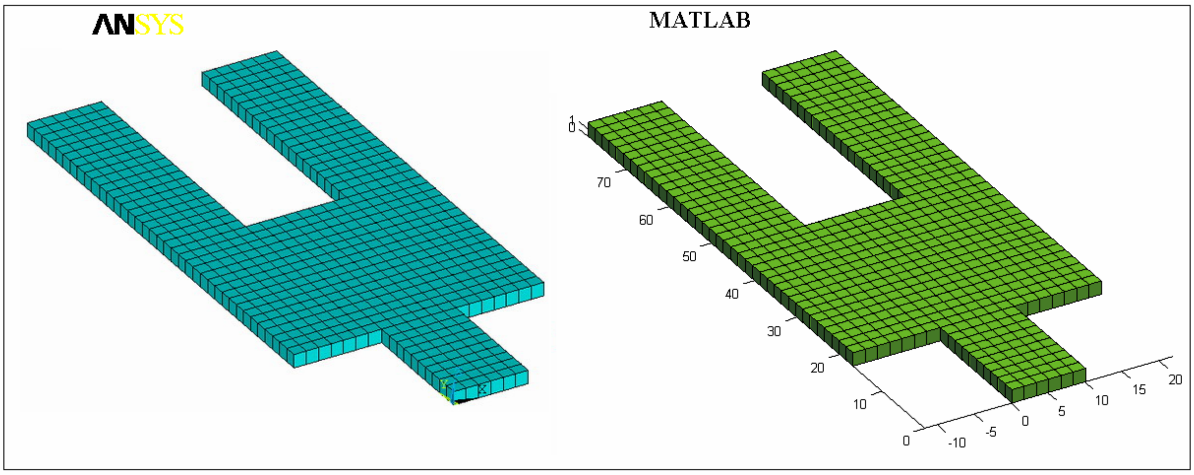
Článek se zabývá vývojem redukční metody pro řešení vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitání mechanických soustav. Redukční metody slouží především k snížení řádu úlohy a tím zkracují dobu potřebnou k řešení. Navržená metoda zobecňuje metodu modální syntézy, která je založená na dekompozici struktury a následné redukci počtu stupňů volnosti pomocí vlastních tvarů. Navržený algoritmus splňuje podmínku paralelní škálovatelnosti. Za pomocí programu ANSYS je vytvořen model úlohy a tento model je přenesen do prostředí programu MATLAB. V prostředí programu MATLAB je naprogramován algoritmus použitý k řešení.

2. Export matice tuhosti a matice hmot z programu ANSYS

Jeden z důležitějších předpokladů je zvládnutí formulace úlohy v prostředí programu ANSYS a dále export matic tuhosti K, hmot M a případně tlumení C do prostředí programu MATLAB. Výchozí předpoklad je takový, že geometrický model řešené struktury bude buď vytvořen v programu ANSYS nebo v jiném programu pro 3D modelování. Síťování a zavedení okrajových podmínek bude provedeno v programu ANSYS. Program ANSYS umožňuje exportovat již zmíněné matice K, M a C a to v tzv. „Harwell-Boeing format“, viz.(Doff, I., S. 1992). V programu ANSYS jsou dvě možnosti jak ukládat soubory obsahující matice a to ve formátu „ASCII“ nebo „BINARY“. Tyto soubory obsahují zakódované informace potřebné k sestavení matic a pomocí vytvořeného konverzního programu mohou být načteny do prostředí programu MATLAB.

Součást vytvořeného konverzního programu je i vizualizace úlohy tedy vykreslení elementů. Následující obrázek ukazuje geometrii a MKP diskretizaci řešené úlohy. Na levé straně je grafika z ANSYSu, na pravé straně grafika z MATLABu.

* Ing. Ondřej Tuhovčák,: Katedra mechaniky, VŠB-TU Ostrava; 17 Listopadu 15/2172, Ostrava-Poruba, tel.: +420 59 732 4351, e-mail: o.tuhovcak@seznam.cz



Obr.1 Vykreslení sítě v programu ANSYS a MATLAB (rozměry jsou v [mm])

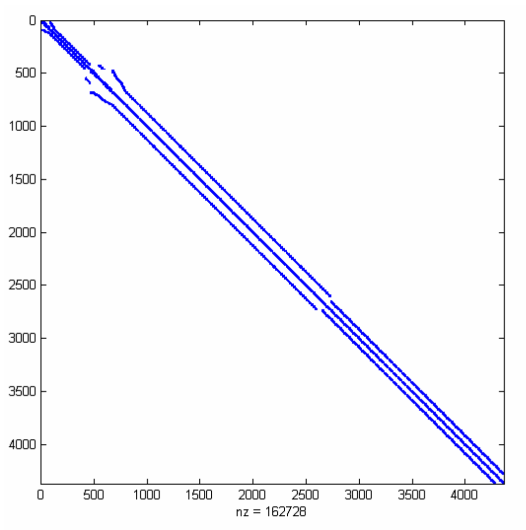
Tab.1 Parametry modelu

Diskretizace		**Základní rozměry**			**Fyzikální vlastnosti**		
počet elementů	**počet uzlů**	**délka**	**šířka**	**tloušťka**	**modul pružnosti**	**Poissonovo číslo**	**hustota**
N_1 [-]	N_2 [-]	L_1 [mm]	L_2 [mm]	L_3 [mm]	E [MPa]	μ [-]	ρ [kg/m^3]
640	1456	79	33,6	1,8	210000	0,3	7850

Použitý prvek má označení SOLID45. Je to osmiuzlový šestistěn, každému uzlu přísluší tři stupně volnosti (UX,UY,UZ).

Program MATLAB umožňuje vizualizaci struktury matic vykreslením nenulových prvků pomocí zvoleného symbolu. Tato vizualizace je zobrazena na následujícím obrázku. Je vidět, že matice *K* je pásová a symetrická, program ANSYS používá k dosažení co nejužší šířky pásu algoritmus využívající topologie úlohy. Počet míst obsazených nenulovými prvky je uvedený pod rámečkem jako hodnota nz.

Pro ověření, zda byly správně převedeny matice *K* a *M* do programu MATLAB byla zvolena testovací úloha (výpočet vlastních frekvencí a tvarů volné soustavy).



Obr.2 Vzhled matice K

V programech ANSYS a MATLAB bylo vypočteno prvních 10 vlastních frekvencí a tvarů. Z porovnání hodnot vyplynulo, že výsledky jsou pro zvolenou přesnost naprosto shodné. Prvních šest vlastních frekvencí je nulových tabulka 2 uvádí nenulové vlastní frekvence.

Fakt, že řešení v programu ANSYS a MATLAB je shodné, ověřuje správnost exportu požadovaných matic.

Tab.2 Vlastní frekvence

Vlastní frekvence				
pořadové číslo	7	8	9	10
vlastní frekvence f [Hz]	33.66	55.09	128.86	140.16

3. Zobecnění metody modální syntézy

Navržená metoda vychází z metody modální syntézy uvedené například v (Slavík, J., Stejskal, V., Zeman, V. 1997). Metoda modální syntézy je určena pro modelování kmitání rozsáhlých mechanických systémů. Předpokládá, že systém je přirozeně dekomponovatelný a jednotlivé substruktury jsou spojeny diskrétními vazbami. V tomto článku je navrženo zobecnění metody modální syntézy. Takto modifikovanou metodu je možno použít nejen na dekompozici mechanických soustav, jejichž díly představují přirozené substruktury, ale také na dekompozici jediné kompaktní struktury. Je tedy možné rozdělit jednu homogenní součást na několik substruktur. Pro odvození metody uvažujme netlumenou mechanickou soustavu popsanou soustavou pohybových rovnic

$$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = f^E . \tag{1}$$

Přičemž každou z matic K a M lze rozdělit na dvě části čímž se původní soustava rozpadne na jednotlivé substruktury a na úzké pásy prvků, které tyto substruktury propojují (viz. obrázek 3). Rovnice přejde do tvaru

$$\left[M^D + M^V\right] \cdot \ddot{q} + \left[K^D + K^V\right] \cdot q = f^E . \tag{2}$$

Matice M^D ,K^D jsou blokově diagonální a každý z bloků představuje jednu substrukturu.

Matice M^V ,K^V jsou matice vazbové a jsou řídce obsazeny.

Vektor f^E je vektor vnějších sil.

3.1. Úprava na výpočet vlastních frekvencí za využití redukce

Zavedením modální transformace $q = V \cdot u$, $\ddot{q} = V \cdot \ddot{u}$ a násobením transponovanou maticí V zleva lze převést rovnice na následující tvary

$$M^D \cdot V \cdot \ddot{u} + M^V \cdot V \cdot \ddot{u} + K^D \cdot V \cdot u + K^V \cdot V \cdot u = f^E \qquad /\ ^L \cdot V^T , \tag{3}$$

$$V^T \cdot M^D \cdot V \cdot \ddot{u} + V^T \cdot M^V \cdot V \cdot \ddot{u} + V^T \cdot K^D \cdot V \cdot u + V^T \cdot K^V \cdot V \cdot u = V^T \cdot f^E . \tag{4}$$

Transformační matici V obdržíme řešením vlastních tvarů z rovnice

$$\left(\left[K^{D}\right]_{i}-\Omega_{i}^{2}\cdot\left[M^{D}\right]_{i}\right)\cdot\left[V\right]_{i}=0\,. \qquad (5)$$

Index i označuje jednotlivé substruktury. Výsledná transformační matice V je diagonálně bloková s jednotlivými bloky V_i na diagonále viz. obrázek 5. vlevo. Vlastní tvary jednotlivých substruktur je možno řešit odděleně pro každý blok zvlášť.

Je vhodné upozornit, že tato část numerických výpočtů splňuje podmínku **paralelní škálovatelnosti**. Tedy, že hledání vlastních tvarů a frekvencí pro jednotlivé substruktury může probíhat současně a nezávisle.

Zavedením následujících substitucí

$I=V^{T}\cdot M^{D}\cdot V$ modální matice hmot (jednotková),

$\widetilde{M}^{V}=V^{T}\cdot M^{V}\cdot V$ modální matice hmot vazeb,

$\Lambda=V^{T}\cdot K^{D}\cdot V$ modální matice tuhosti (spektrální),

$\widetilde{K}^{V}=V^{T}\cdot K^{V}\cdot V$ modální matice tuhosti vazeb,

je možno soustavu zjednodušeně zapsat

$$\left[I+\widetilde{M}^{V}\right]\cdot\ddot{u}+\left[\Lambda+\widetilde{K}^{V}\right]\cdot u=V^{T}\cdot f^{E}\,. \qquad (6)$$

Dále soustavu pomocí substituce $\widetilde{M}=\left[I+\widetilde{M}^{V}\right]$, $\widetilde{K}=\left[\Lambda+\widetilde{K}^{V}\right]$, $\widetilde{f}=V^{T}\cdot f^{E}$ zapíšeme jako

$$\widetilde{M}\cdot\ddot{u}+\widetilde{K}\cdot u=\widetilde{f}\,. \qquad (7)$$

Pokud bychom transformační matici V ponechali v původní dimenzi, tak nedojde k redukci počtu stupňů volnosti a rovnice (7) bude ekvivalentní rovnici (1). Což lze ověřit řešením obou rovnic a porovnáním výsledků.

Redukce pomocí vlastních tvarů spočívá v tom, že snížíme řád transformační matice V. Místo všech vlastních tvarů vypočítaných pro každou substrukturu zvlášť a sestavených do matice V použijeme pouze výběr několika zvolených vlastních tvarů každé substruktury. Tedy redukovaná matice V bude opět diagonálně bloková, ale obdélníková, nikoli čtvercová (viz. obrázek 5. vpravo). Sestaví se tak, že z každého bloku V_i použijeme jen zvolený počet sloupců. V hraničním případě se použije pouze prvních 6 vlastních tvarů každé substruktury. Tímto bude redukovaný model popisovat soustavu složenou z nepoddajných bloků navzájem propojených pružnými prvky. Jestliže se daná mechanická soustava vhodně rozdělí na dostatečný počet substruktur, je možno získat dobrý odhad vlastních frekvencí a vlastních tvarů již při velikosti redukovaného modelu n*6, kde n je počet substruktur.

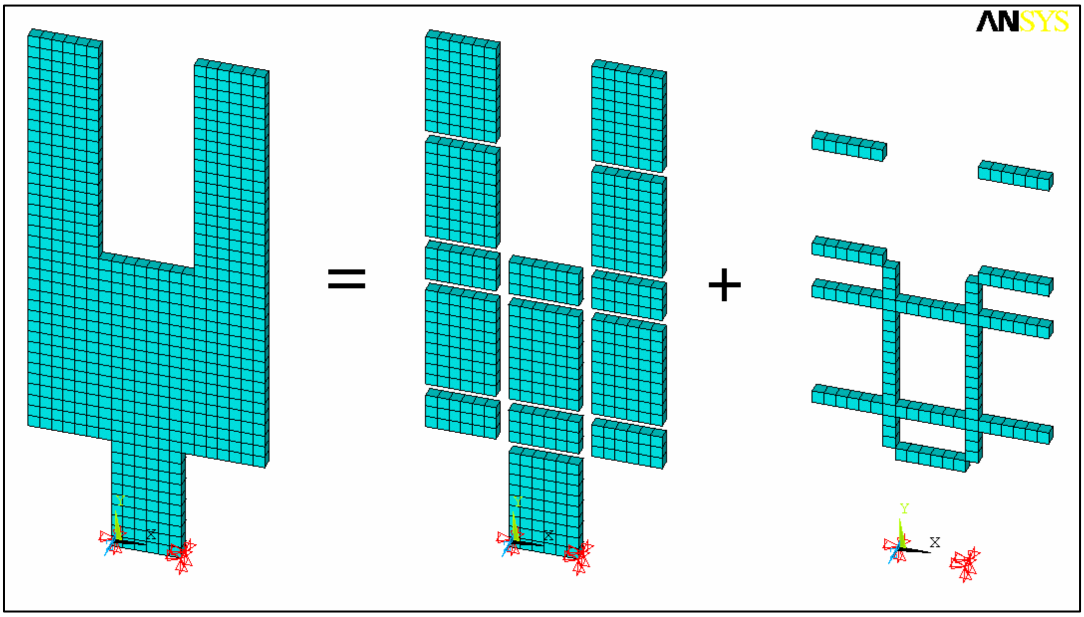
Na takto redukované soustavě je možno provádět požadované výpočty. V tomto příspěvku je ukázka odhadu vlastních frekvencí a tvarů plynoucí z následujícího vztahu

$$\left(\widetilde{K}-\Omega_{R}^{2}\cdot\widetilde{M}\right)\cdot V_{R}=0\,. \qquad (8)$$

Ve strojírenské praxi se nejčastěji požaduje znalost nejnižších vlastních frekvencí a tvarů. Redukční metodu lze ovšem použít také k odhadu vlastních frekvencí a tvarů v určitém rozmezí nikoli 0 až $\Omega_{\max}$, ale v rozmezí mezi dvěmi zvolenými hodnotami $\Omega_{\min}$ až $\Omega_{\max}$. K tomuto postačí zvolit správný výběr vlastních tvarů vyplývající z rovnice (5) a použít je k sestavení rovnice (7).

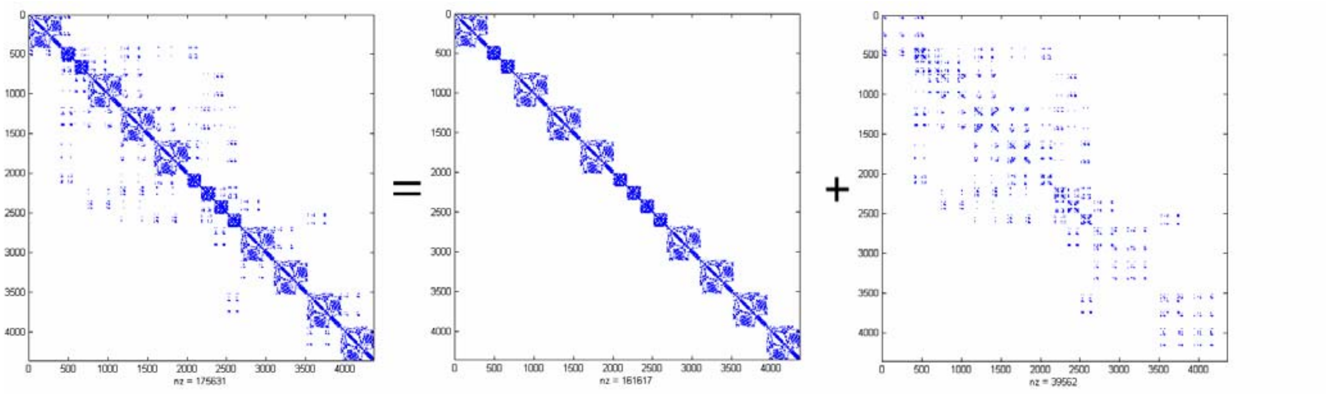
3.2. Příklad použití zobecněné metody modální syntézy

Konečnoprvkový model se uměle rozdělí na substruktury popsané maticemi K^D, M^D, které jsou navzájem vázány maticemi K^V, M^V . Počet substruktur je 14, z toho 13 je popsáno singulárními maticemi K^D.



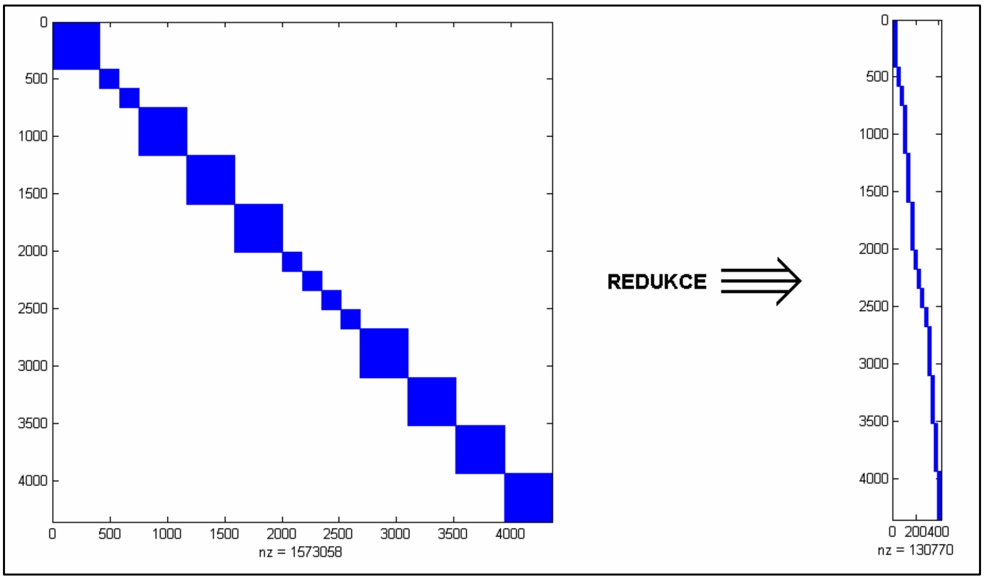
Obr.3 Vzhled MKP modelu a způsob rozdělení

Tomuto dělení odpovídají rozdělené matice hmot a tuhosti. Vzhled příslušných matic tuhosti je vidět na obrázku 4. Pro lepší názornost matice nebyly optimalizovány na šířku pásu. Dimenze neredukovaného modelu je 4359x4359. Struktura je uchycena ve spodní části. Na třech uzlech jsou odebrány všechny stupně volnosti.



Obr.4 Vzhled matic $K=K^D+K^V$

Na obrázku 5. vidíme vpravo neredukovanou matici V, vlevo tvar obdélníkové diagonálně blokové matice V po redukci. Tato matice obsahuje výběr vlastních vektorů jednotlivých podoblastí.

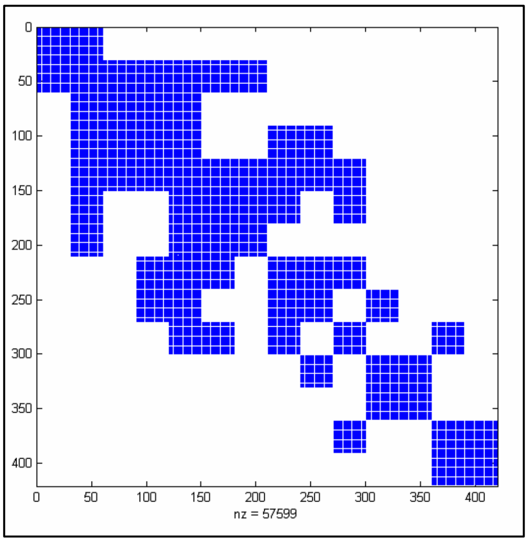


Obr.5 Vzhled matic V před a po redukci

Provedením operací naznačených v kapitole 3.1. získáme matice $\widetilde{K}$ a $\widetilde{M}$, na obrázku 6 vidíme matici tuhosti $\widetilde{K}$. Odpovídá stupni redukce 30.

Na řešeném příkladě byly provedeny následující výpočty. Bylo spočteno prvních 10 vlastních frekvencí pro čtyři různé úrovně redukce. Dále byla vyhodnocena procentuelní chyba výsledků dosažených na redukovaném modelu oproti řešení na neredukovaném modelu.

Úroveň redukce znamená, kolik vlastních vektorů každé substruktury je použito k redukci. Tabulka 3 uvádí prvních pět vlastních frekvencí spočtených na neredukovaném modelu a na čtyřech modelech s různou úrovní redukce.



Obr.6 Vzhled matice $\widetilde{K}$

Tab.3 Výsledky

Výsledky výpočtu vlastních frekvencí na redukovaném modelu										
Úroveň redukce	Přesné řešení	6		30		50		100		
Rozměr úlohy	4359	84		420		700		1400		
Číslo	f [Hz]	f_R[Hz]	Ch[%]	f_R[Hz]	Ch[%]	f_R[Hz]	Ch[%]	f_R[Hz]	Ch[%]	
1	3,99	4,30	7,9	4,06	1,7	4,04	1,3	4,02	0,7	
2	19,26	27,50	42,8	20,59	6,9	20,22	5,0	19,80	2,8	
3	24,57	33,40	35,9	25,49	3,7	25,17	2,4	24,85	1,1	
4	36,23	79,10	118,3	38,87	7,3	38,00	4,9	37,19	2,7	
5	44,64	108,40	142,8	47,75	7,0	46,80	4,8	45,81	2,6	

4. Závěr

Následující tabulka zobrazuje navržené zobecnění metody modální syntézy. Zobecnění spočívá v zavedení matice M^V . Tato matice zohledňuje hmoty prvků spojujících jednotlivé substruktury. Dále matice K^V je chápána obecněji, nežli je to u metody modální syntézy. V případě, že budeme modelovat mechanický systém, jehož díly jsou navzájem propojené pružnými členy a hmotnost spojovacích členů bude nulová, pak lze použít přímo vztahy uvedené v levém sloupci. Navržená metoda umožňuje provést nejen dekompozici rozsáhlého systému na jeho přirozené díly ale, také umožňuje každý přirozeně nedělitelný díl uměle rozdělit.

Tab.4 Porovnání

Modální syntéza	**Zobecněná modální syntéza**
$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = f^E$	$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = f^E$
$M^D \cdot \ddot{q} + \left[K^D + K^V\right] \cdot q = f^E$	$\left[M^D + M^V\right] \cdot \ddot{q} + \left[K^D + K^V\right] \cdot q = f^E$
$\widetilde{K} = \Lambda + V^T \cdot K^V \cdot V$	$\widetilde{K} = \Lambda + V^T \cdot K^V \cdot V$
$\widetilde{M} = I$	$\widetilde{M} = I + V^T \cdot M^V \cdot V$
$I \cdot \ddot{u} + \left[\Lambda + V^T \cdot K^V \cdot V\right] \cdot u = V^T \cdot f^E$	$\left[I + V^T \cdot M^V \cdot V\right] \cdot \ddot{u} + \left[\Lambda + V^T \cdot K^V \cdot V\right] \cdot u = V^T \cdot f^E$
$\widetilde{M} \cdot \ddot{u} + \widetilde{K} \cdot u = \widetilde{f}$	$\widetilde{M} \cdot \ddot{u} + \widetilde{K} \cdot u = \widetilde{f}$

Zobecněnou metodu modální syntézy lze využít jako metodu redukční a na redukované úloze lze řešit úlohy dynamiky soustav. Tento příspěvek ukazuje pouze řešení vlastních frekvencí a tvarů na redukovaném modelu. Metodu je však také možno použít jako předpodmínění pro (inverse free preconditioned Krylov subspace method) viz. (James, H., Money & Qiang, Ye), v programu MATLAB je tato metoda implementována jako funkce eigifp. Jako předpodmínění je možno zadat n vlastních vektorů vypočtených na redukovaném modelu. Algoritmus eigifp poté velmi rychle nalezne přesné hodnoty vlastních frekvencí a tvarů.

5. Seznam použité literatury

Ansys Analysis Guide, rev. 5.6, Swanson Analysis Systems Inc, Houston,(1998). USA

Doff, I., S. (1992) Users' Guide for the Harwell- Boeing Sparse Matrix, CERFACS, 42 Ave G. Coriolis, 31057 Toulouse Cadex, France.

James, H., Money & Qiang, Ye, A MATLAB program for solving large symmetric generalized eigenvalue problem, University of Kentucky.

Podešva, J. (1999) Dynamika rozsáhlých konstrukčních soustav, řešená metodou konečných prvků, redukce technikou rozkladu na substruktury, VŠB-TU Ostrava.

Slavík, J., Stejskal, V., Zeman, V. (1997) Základy dynamiky strojů, ČVUT Praha .