



INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

MECHANICAL ACTION IN THE BODIES OF TEXTILE WINDINGS

P.Ursíny*

Summary: *This paper describes the mechanical structure of the yarn package body. Based on the theory of elasticity and strength the study has resulted in an original solution and deduction of the individual components of the internal mechanical structure of the cylindrical body of a crosswound yarn package. The approach is characterised by an internal anisotropy of the mechanical properties of the yarn package body. Thus the basic solution has been extended by the solution based on the elasticity and strength of an anisotropic body.*

1. Úvod

V textilní technologii se používá mnoho forem návínů. Pokud jde o délkové textilie (např. příze) používají se válcové nebo kuželové návínů s křížovým navinutím, které jsou předmětem následující analýzy. Tvorbou těchto návínů probíhá za působení určité navíjecí tahové síly v přízi a to spolu s postupem tvorby a charakteristickou geometrickou strukturou finálního návínů vytváří určitou vnitřní mechanickou strukturu finálního návínů. Tuto mechanickou strukturu chápeme jako vnitřní silové působení v tělese návínů v radiálním, obvodovém a axiálním směru v závislosti na vnitřním poloměru návínů.

Význam této vnitřní silové struktury spočívá v tom, že působí na uloženou délkovou textili (přízi) a ovlivňuje zejména její deformační vlastnosti. Z tohoto hlediska má největší význam silové působení v obvodovém směru. Celkově vnitřní silové působení může způsobit i jistou axiální deformaci návínů.

2. Teoretické řešení vnitřního silového působení v tělese návínů.

Problematika vnitřního silového působení v tělese návínů byla řešena různými autory, kteří vycházeli z geometrické struktury navinutých a zatížených nití v návínů a řešením silové rovnováhy určovali radiální tlakové síly. Další forma řešení vycházela z pojetí tělesa návínů jako pružného kompaktního tělesa vyznačujícího se izotropií mechanických vlastností. Zmíněný předpoklad izotropního tělesa však neodpovídá realitě přízových návínů, které se naopak vyznačují anizotropií. Rozdíly v mechanických vlastnostech v radiálním a obvodovém

směru lze obecně vyjádřit mírou anizotropie $k = \sqrt{\frac{E_t}{E_r}}$. Předložené řešení významně

* Prof. Ing. Petr Ursíny, DrSc., Katedra textilních technologií, Technická univerzita v Liberci, 46117 Liberec, Hálkova 6; tel.: +420 485 353 120, fax.: +420 485 353 542, e-mail: petr.ursiny@vslib.cz

zpřesňuje výsledné radiální průběhy radiálního a obvodového napětí. V této souvislosti zároveň uvedme, že silové působení budeme vyjadřovat formou napětí (tahového, tlakového), což v textilní problematice není obvyklé. Vychází to však z pojetí daného tělesa návínu jako pružného tělesa s vřícovou anizotropií a vlastní řešení představuje aplikaci teorie pružnosti a pevnosti anizotropního tělesa. Následně je prezentováno teoretické řešení, respektující zmíněný předpoklad anizotropního pružného vřícového tělesa přičemž okrajové podmínky jsou použity v souladu s dosavadními postupy řešení.

Při řešení průběhu mechanické struktury návínu za předpokladu tělesa návínu jako tělesa anizotropního, vycházíme ze základních poznatků teorie pružnosti a pevnosti anizotropního tělesa. Podobně jako v základním řešení uvažujeme tři základní směry, ve kterých sledujeme mechanické veličiny vřícového návínu: radiální směr (r), obvodový směr (t) a axiální směr (a). Rozdíly mezi deformačními závislostmi v jednotlivých výše uvedených směrech určují vřícovou anizotropii tělesa návínu. Vlastní řešení se opírá o vztahy (1),(2) platné pro vřícové, pružné těleso podle schématu na obr.1. Výše uvedený předpoklad anizotropie deformačních vlastností je dán charakteristickou vlastností vřícových návínů s křížovým vinutím. V teorii pružnosti a pevnosti anizotropního tělesa je použit pojem vřícové anizotropie pro případ odlišných mechanických vlastností v radiálním a obvodovém směru u vřícových silnostěnných nádob. Právě tato varianta je typická pro vřícové těleso s křížovým vinutím, kde v radiálním směru jsou určující mechanické vlastnosti přízové vrstvy v příčném směru, kdežto v obvodovém směru jsou určující mechanické vlastnosti přízové vrstvy v podélném směru. Přímá měření odpovídajících modulů pružnosti E_r a E_t tento předpoklad anizotropie plně potvrdila měřením povrchových deformací vřícových návínů v radiálním směru tělesa návínu a měřením modulu pružnosti v tahu v obvodovém směru. Cílem teoretické části řešení je určení radiálních průběhů poměrného radiálního a obvodového napětí v tělese návínu. Vycházíme z tedy následujících vztahů [2]:

$$\sigma_r = \frac{pr_1^{k+1} - q_v r_2^{k+1}}{r_2^{2k} - r_1^{2k}} r^{k-1} + \frac{q_v r_1^{k-1} - pr_2^{k-1}}{r_2^{2k} - r_1^{2k}} r_1^{k+1} r_2^{k+1} r^{k-1} \quad (1)$$

$$\sigma_t = \frac{pr_1^{k+1} - q_v r_2^{k+1}}{r_1^{2k} - r_2^{2k}} k r^{k-1} - \frac{q_v r_1^{k-1} - pr_2^{k-1}}{r_2^{2k} - r_1^{2k}} k r_1^{k+1} r_2^{k+1} r^{-k-1} \quad (2)$$

kde σ_r - radiální napětí

σ_t - obvodové napětí

r_1 - vnitřní poloměr tělesa návínu

r_2 - vnější poloměr tělesa návínu

r - obecný poloměr tělesa návínu

p - vnitřní tlak na poloměru r_1

q_v - vnější tlak na poloměru r_2

k - $k = \sqrt{(E_t / E_r)}$ míra anizotropie

E_t - modul pružnosti v obvodovém směru

E_r - modul pružnosti v radiálním směru

Výchozí vztahy (1),(2) dále upravíme tím, že použijeme konstantu:

$$C = \frac{r_1}{r_2} \quad (3)$$

Po konečné úpravě obdržíme

$$\sigma_r = \frac{pC^{k+1} - q_v}{1 - C^{2k}} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{k-1} - \frac{p - q_v C^{k-1}}{1 - C^{2k}} C^{k+1} \left(\frac{r_2}{r} \right)^{k+1} \quad (4)$$

Pro $k = 1$ $q_v = 0$

$$\sigma_r = \frac{pC^2}{1 - C^2} - \frac{pr_1^2}{1 - C^2} \frac{1}{r^2} \quad (5)$$

$$\sigma_r = A - B \frac{1}{r^2} \quad (6)$$

$$\text{kde } A = \frac{pC^2}{1 - C^2} \quad B = \frac{pr_1^2}{1 - C^2}$$

Podobně:

$$\sigma_t = \frac{pC^{k+1} - q_v}{1 - C^{2k}} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{k-1} k + \frac{p - q_v C^{k-1}}{1 - C^{2k}} k \cdot \left(\frac{r_1}{r} \right)^{k+1} \quad (7)$$

Pro $k = 1$ $q_v = 0$

$$\sigma_t = \frac{pC^2}{1 - C^2} + \frac{pr_1^2}{1 - C^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (8)$$

$$\sigma_t = A + B \frac{1}{r^2} \quad (9)$$

Obecné vztahy, jako základ pro řešení průběhu napětí v návinu, vyplývají ze vztahů (4) a (7) za podmínky nulového vnějšího tlaku.

Radiální napětí:

$$\sigma_r = \frac{pC^{k+1}}{1 - C^{2k}} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{k-1} - \frac{p}{1 - C^{2k}} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{k+1} \quad (10)$$

Obvodové napětí:

$$\sigma_t = \frac{pC^{k+1}}{1 - C^{2k}} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{k-1} k + \frac{p}{1 - C^{2k}} k \left(\frac{r_1}{r} \right)^{k+1} \quad (11)$$

Vztahy (10), (11) upravíme tímto způsobem:

$$\sigma_r = \underbrace{\frac{pC^{k+1}}{(1-C^{2k})r_2^{k-1}}}_{C_1} r^{k-1} - \underbrace{\frac{pr_1^{k+1}}{1-C^{2k}}}_{C_2} \frac{1}{r^{k+1}}$$

$$\sigma_t = \underbrace{\frac{pC^{k+1}k}{(1-C^{2k})r_2^{k-1}}}_{C_1 k} r^{k-1} + \underbrace{\frac{pkr_1^{k+1}}{1-C^{2k}}}_{C_2 k} \frac{1}{r^{k+1}}$$

tj. pro danou hodnotu k označíme konstanty:

$$C_1 = \frac{pC^{k+1}}{(1-C^{2k})r_2^{k-1}} \quad (12)$$

$$C_2 = \frac{pr_1^{k+1}}{1-C^{2k}} \quad (13)$$

takže vztahy (10) a (11) nabývají tvaru

$$\sigma_r = C_1 r^{k-1} - C_2 \frac{1}{r^{k+1}} \quad (14)$$

$$\sigma_t = C_1 k r^{k-1} + k C_2 \frac{1}{r^{k+1}} \quad (15)$$

pro k = 1 bychom získali známé vztahy

$$\sigma_r = C_1 - C_2 \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_t = C_1 + C_2 \frac{1}{r^2}$$

$$\text{kde } C_1 = \frac{pC^2}{1-C^2} \quad C_2 = \frac{pr_1^2}{1-C^2}$$

$$\text{tj. } \sigma_r = \frac{pC^2}{1-C^2} - \frac{pr_1^2}{1-C^2} \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_t = \frac{pC^2}{1-C^2} + \frac{pr_1^2}{1-C^2} \frac{1}{r^2}$$

což jsou vztahy totožné se vztahy (5), (8), a (6), (9) a v tomto případě konstanty $C_1 = A$ a $C_2 = B$. Následuje odvození vztahů pro průběh radiálního a obvodového napětí v tělese návinu.

Radiální napětí

Vycházíme z okrajových podmínek pro určení konstant C_1 a C_2 .

I. podmínka:

Předpokládáme, že deformace dutinky (na poloměru r_1) je nulová a zároveň uvažujeme

$\sigma_a = 0$ (axiální napětí). pro poměrné prodloužení ve směru obvodovém ε_t platí známý vztah $\varepsilon_t = \frac{u}{r}$ (16)

u – absolutní radiální posuv vlákna na poloměru r . Dále použijeme rovnici vyjadřující obecný Hookův zákon aplikovaný na případ anizotropního tělesa s úvahou výše uvedených podmínek

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_t} - \frac{\mu_{rt}}{E_r} \sigma_r \quad (17)$$

μ_{rt} - Poissonovo číslo charakterizující zkrácení ve směru t (obvodovém) při protažení ve směru r (radiálním). Na vnitřním poloměru r_1 bude platit:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta r_1}{r_1} = 0 \quad (18)$$

$$\text{tzn., že } \frac{\sigma_t}{E_t} - \frac{\mu_{rt} \sigma_r}{E_r} = 0 \quad (19)$$

Za σ_r a σ_t dosadíme ze vztahu (14), (15)

$$\frac{1}{E_t} \left(C_1 k r_1^{k-1} + k C_2 \frac{1}{r_1^{k+1}} \right) - \frac{\mu_{rt}}{E_r} \left(C_1 r_1^{k-1} - C_2 \frac{1}{r_1^{k+1}} \right) = 0$$

Po úpravě odvodíme vztah mezi konstantami C_1 a C_2 .

$$C_1 = - \frac{C_2 \frac{k}{E_t} + \frac{\mu_{rt}}{E_r}}{r_1^{2k} \frac{k}{E_t} - \frac{\mu_{rt}}{E_r}} \quad (20)$$

Pro $k = 1$

$$C_1 = - \frac{C_2 \frac{1+\mu}{r_1^2}}{1-\mu}$$

II. podmínka:

Na okamžitém poloměru r_x platí následující vztah:

$$\Delta S(r_x) = q(r_x) \frac{\Delta r_x}{r_x} \quad (21)$$

kde

$\Delta S(r_x)$ - radiální napětí ve vzdálenosti Δr_x od povrchu působící na povrchový element

$q(r_x)$ - střední hodnota navíjecího napětí při navíjení na poloměru r_x

Δr_x - elementární tloušťka vrstvy na poloměru r_x

V souladu s rozbořem napjatosti platí

$$\sigma'_r(r_x) = -\Delta S(r_x) \quad (22)$$

kde

$\sigma'_r(r_x)$ - radiální napětí působící na poloměru r_x (ve vzdálenosti Δr_x od povrchu).

Použijeme-li rovnici (14), můžeme s přihlédnutím k rovnicím(21) a (22) napsat následující vztah:

$$C_1 r_x^{k-1} - C_2 \frac{1}{r_x^{k+1}} = -q(r_x) \frac{\Delta r_x}{r_x} \quad (23)$$

Použijeme již odvozený vztah konstant (20), který nejprve zjednodušíme:

$$C_1 = -\frac{C_2}{r_1^{2k}} \frac{k + k^2 \mu_{rt}}{k - k^2 \mu_{rt}} \quad (24)$$

$$\text{Jestliže konstanta } A_k^2 = r_1^{2k} \frac{1 - k\mu_{rt}}{1 + k\mu_{rt}} \quad (25)$$

$$\text{potom } C_1 = -\frac{C_2}{A_k^2} \quad (26)$$

Dosazením výrazu pro konstantu C_1 podle (26) do vztahu (23) obdržíme výsledné vyjádření pro konstanty C_1 a C_2 .

$$C_2 = \frac{r_x^k A_k^2 q(r_x)}{r_x^{2k} + A_k^2} \Delta r_x \quad (27)$$

$$C_1 = -\frac{r_x^k q(r_x)}{r_x^{2k} + A_k^2} \Delta r_x \quad (28)$$

Konstanty podle vztahů (27),(28) jsou výsledky řešení pomocí obou podmínek a je možno je dosadit do rovnic (14) a (15) za účelem získání konečných vztahů pro radiální průběh poměrného radiálního a obvodového napětí v návinu.

$$\sigma'_r(r) = -\frac{r_x^k q(r_x)}{r_x^{2k} + A_k^2} \Delta r_x r^{k-1} - \frac{r_x^k A_k^2 q(r_x)}{r_x^{2k} + A_k^2} \Delta r_x \frac{1}{r^{k+1}} \quad (29)$$

$$\sigma'_t(r) = -\frac{r_x^k q(r_x)}{r_x^{2k} + A_k^2} \Delta r_x k r^{k-1} + \frac{r_x^k A_k^2 q(r_x)}{r_x^{2k} + A_k^2} \Delta r_x k \frac{1}{r^{k+1}} \quad (30)$$

V dalším postupu zjednodušíme příslušné vztahy předpokladem

$$q(r_x) = q \quad (31)$$

tj. úvahou konstantního navíjecího napětí.

Při stanovení výsledných vztahů pro radiální průběhy poměrného radiálního a obvodového napětí vycházíme ze vztahu (29), (30). Řešení dokončíme integrací v mezích od obecného po vnější poloměr. Výsledné vztahy jsou:

$$\frac{\sigma_r(r)}{q} = -\frac{r^{2k} + A_k^2}{r^{k+1}} \int_{r_x=r}^{r_2} \frac{r_x^k}{r_x^{2k} + A_k^2} dr_x \quad (32)$$

$$\frac{\sigma_t(r)}{q} = 1 - \frac{r^{2k} - A_k^2}{r^{k+1}} \cdot k \int_{r_x=r}^{r_2} \frac{r_x^k}{r_x^{2k} + A_k^2} dr_x \quad (33)$$

$$\text{kde } A_k^2 = r_1^{2k} \cdot \frac{1 - k\mu_{rt}}{1 + k\mu_{rt}}$$

pro případ izotropního tělesa(k=1)

$$\frac{\sigma_r(r)}{q} = -\frac{r^2 + A_1^2}{r^2} \int_{r_x=r}^{r_2} \frac{r_x}{r_x^2 + A_1^2} dr_x \quad (34)$$

$$\frac{\sigma_t(r)}{q} = 1 - \frac{r^2 - A_1^2}{r^2} \int_{r_x=r}^{r_2} \frac{r_x}{r_x^2 + A_1^2} dr_x \quad (35)$$

$$\text{kde } A_1^2 = r_1^2 \frac{1 - \mu}{1 + \mu}$$

což je v souladu s výsledky úvodní fáze řešení .

Výrazy (32) a (33) jsou konečnými vztahy. Pro určení velikosti konstanty A_k^2 je nutno znát Youngův modul pružnosti návinu v radiálním směru E_r a v obvodovém směru E_t .

3. Poznátky o vlivu silového působení na deformační vlastnosti navinuté nitě.

Na základě zjištěného radiálního průběhu obvodového napětí byly sledovány deformační vlastnosti navinuté délkové textilie z různých poloměrů návinu. Velmi citlivě, v závislosti na obvodovém napětí se měnilo poměrné protažení při dané napínací síle u tvarované nitě. Obecně je známo, že tvarovaná nit je významně ovlivňována ve svých deformačních vlastnostech stavem předběžné délkové deformace. V tělese návinu (válcová nebo kuželová cívka s křížovým vinutím) se tvarovaná nit nachází ve stavu délkové deformace v závislosti na radiální poloze. Délkovou deformaci realizuje obvodové napětí, které je funkcí poloměru. Typický průběh poměrného obvodového napětí v závislosti na poloměru je uveden na obr.2. Z průběhu je zřejmé, že může existovat i rozpětí poloměrů, kde navinutá nit je prakticky bez napětí. To je prakticky pozorovatelné na čelech cívky.

Jak již bylo uvedeno délková textilie /vlákno, nit/ je ovlivňována ve svých deformačních vlastnostech stavem předběžné délkové deformace. Již elementární vlákno vykazuje odlišnou závislost prodloužení – napínací síla v případě nezatíženého a zatíženého vlákna/předběžné namáhání/. U předběžně zatíženého vlákna dochází k nižší hodnotě prodloužení než u předběžně nezatíženého vlákna při téže úrovni napínací síly. Záleží

samozřejmě na úrovni napínací síly při předběžném zatížení vlákna. Při grafickém zobrazení (obr.3) jsou zřejmé odlišné průběhy pro tvarovanou nit vyrobenou za stejných podmínek a odebranou ze stejných poloměrů návínů, je-li použita navíjecí síla odlišná. Je zřejmé, že stejné úrovni napínací síly/např. $F = 200\text{mN}$ / odpovídají v důsledku rozdílné předběžné napjatosti Q_i různá prodloužení ε_{pi} . Je-li např. $Q_1 < Q_2 < Q_3$; zjišťujeme vzájemný vztah odpovídajících si prodloužení $\varepsilon_{p1} > \varepsilon_{p2} > \varepsilon_{p3}$. Rozdíly v hodnotách ε_{pi} jsou tím podstatnější, čím větší jsou rozdíly v příslušné navíjecí síle. Tento případ slouží k objasnění souvislosti deformačních vlastností a úrovně předběžné délkové deformace. Z předchozího rozboru plyne, že tvarovaná nit uložená v návínu/válcová cívka s křížovým vinutím/ se nachází v závislosti na poloměru pod různým silovým působením. Na experimentálně připravených návínech s tvarovanou nití byl studován vliv mechanické struktury. Ze stanovených poloměrů byly odebrány vzorky tvarovaného hedvábí a na přístroji Instron zjištěny závislosti protažení na tahové síle. Z opakovaných měření byly stanoveny výsledné závislosti mezi průměrným protažením a tahovou silou a byly potvrzeny souvislosti mezi uvedenými deformačními vlastnostmi a vnitřní mechanickou strukturou. Porovnáme-li výsledný radiální průběh poměrného obvodového napětí a radiální průběh protažení při dané tahové síle, ukazuje se zřetelně vliv poměrného obvodového napětí v návínu. Konkrétní průběhy jsou uvedeny na obr.4. jako příklad. Obdobná tendence se projevila i v ostatních proměřovaných vzorcích. Na základě dosud provedených měření je možno konstatovat citlivost deformačních vlastností tvarované nití na mechanické poměry v návínu. Relativně vůči lineárnímu produktu ze staplového materiálu /např. bezvřetenová příze/ jeví se v případě tvarované nití uvedené v souvislosti výrazněji.

4.Závěr:

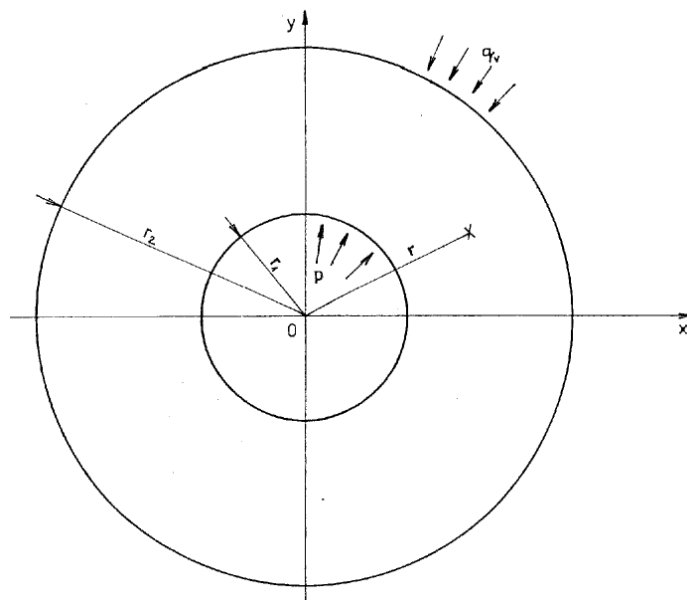
Výsledky analýzy ukazují na značnou složitost vnitřního silového působení v daném tělese návínu. Jak již bylo uvedeno, má toto silové působení značný vliv na deformační vlastnosti příze i na deformaci samotného tělesa návínu. Dosažené výsledky jsou podkladem pro stanovení radiálního průběhu navíjecí tahové síly, která by odpovídala podmínkám, za nichž by vnitřní silové působení vykazovalo vyšší rovnoměrnost v radiálním směru (zejména pokud jde o obvodovou sílu), což vytvoří příznivé podmínky pro zachování vyšší rovnoměrnosti deformačních vlastností navinuté příze a bude zamezeno deformaci tělesa návínu.

5.Poděkování:

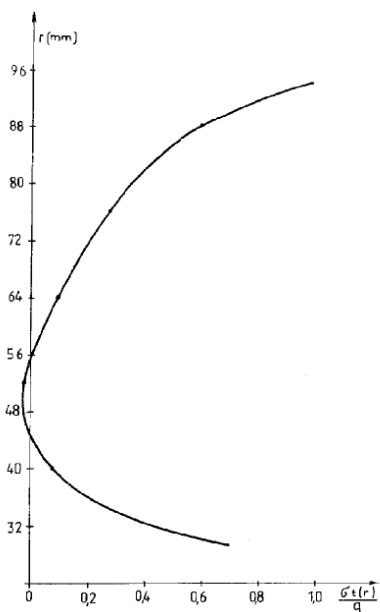
Tato práce byla podpořena grantem GAČR 101/03/0990.

6.Literatura

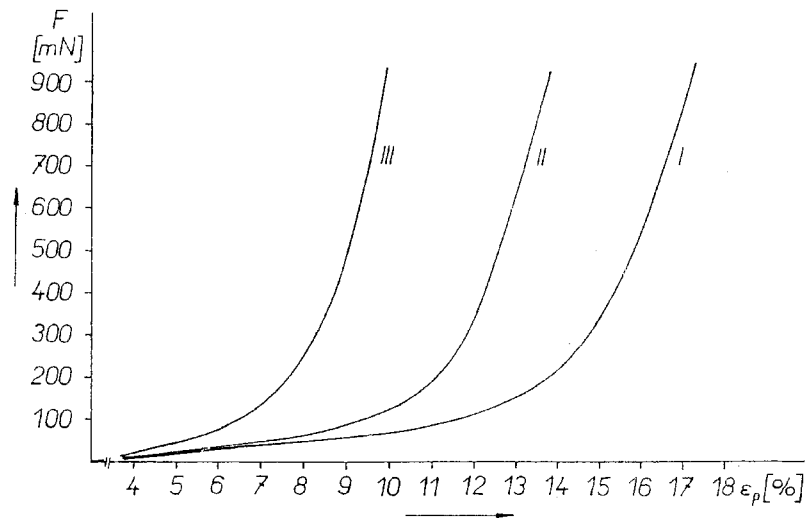
- [1] URSÍNY, P. – HES, L. – MÄGEL, M.: Vergleichmässigung des Spannungsaufbaues in Spulen. Melliland Textilbericht 76, (1995), 5, 314-315.
- [2] LECHNICKIJ, S.: Teorija uprugosti anizotropnogo tela. GITTL Moskva, 1950.



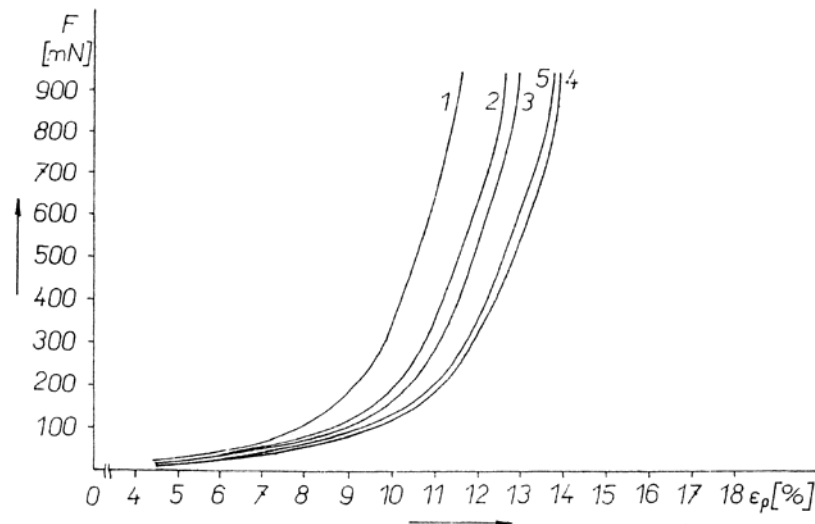
Obr. 1 – Schéma zatížení tělesa s válcovou anizotropií



Obr. 2 – Radiální průběh poměrného obvodového napětí a míry anizotropie návinu



Obr. 3 – Závislost mezi napínací silou F a průměrným poměrným protažením ϵ_p u tvarovaných nití, odebraných z poloměru $r=40\text{mm}$ válcového návínů s křížovým vinutím při použité navíjecí síle $Q_1 \dots I, Q_2 \dots II, Q_3 \dots III$ ($Q_1 < Q_2 < Q_3$).



Obr. 4 – Závislost mezi napínací silou F a průměrným poměrným protažením ϵ_p (%) u tvarovaných nití z poloměry: 1 – 80 mm, 2 – 70 mm, 3 – 60 mm, 4 – 50 mm, 5 – 40 mm.