



# INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

---

## NEW METHOD FOR ANALYSIS OF RHEOLOGY OF CONCRETE STRUCTURES

R. Zídek <sup>1</sup>, L. Brdečko <sup>2</sup>

**Summary:** *For static analysis of hybrid concrete structures the method and computational software including the concrete rheology analyses, the influence of step by step construction and the geometric nonlinearity were developed. Beam element with the gravity axis not identical with the reference axis developed by author was applied. It enables to analyze composite beams constructed step by step. Proposed paper deals with some problems of this method.*

### 1. Úvod

Rozvoj betonových konstrukcí klade stále vyšší nároky na výstižnost statických výpočtů. To je dáno jednak stále sofistikovanějšími konstrukčními systémy a jednak způsoby výstavby. Hlavní nosné prvky – nosníky, oblouky, kabely se budují v předstihu a slouží jako podporující prvky pro ostatní prvky nosné konstrukce. Kombinují se ocelové nebo prefabrikované prvky tak, aby bylo co nejlépe využito vlastností použitých materiálů a současně byla redukována plocha povrchu konstrukce, kterou je nutno zabetonovat.

Pro analýzu betonových konstrukcí byla navržena metoda a podle ní výpočetní program, který umožňuje řešit rovinný prutový model geometricky nelineárně, a který umožňuje analyzovat vliv postupné výstavby a reologie betonu.

Metoda byla primárně navržena pro analýzu dotvarování konstrukcí z předpjatého pásu, ale je použitelná pro všechny konstrukce, u kterých je přípustná aproximace rovinným prutovým modelem. Použitý prvek umožňuje analýzu postupně budovaných spřažených průřezů.

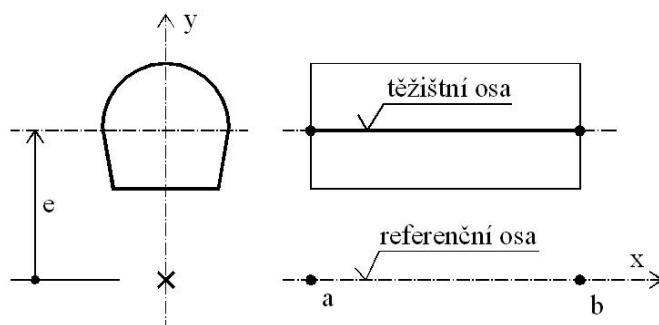
### 2. Prutový prvek na excentricitě

Pro novou metodu byl autorem odvozen rovinný prutový prvek na excentricitě. Základní myšlenka spočívá v oddělení těžištní a referenční osy prvku. To umožňuje modelování postupně vytvářených průřezů. Jeho odvození metodou přenosových matic bylo publikováno v disertační práci autora (Zídek, 2003) včetně odvození statických, geometrických a fyzikálních podmínek. Základní uspořádání je na obrázku 1.

---

<sup>1</sup>Ing. Rostislav Zídek, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební VUT v Brně, Veveří 95, 662 37 Brno; tel.: +420 541 147 368, fax: +420 541 240 994; e-mail: zidek.r@fce.vutbr.cz

<sup>2</sup>Ing. Luděk Brdečko, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební VUT v Brně, Veveří 95, 662 37 Brno; tel.: +420 541 147 368, fax: +420 541 240 994; e-mail: brdecko.l@fce.vutbr.cz



Obrázek 1: Prutový prvek na excentricitě – základní uspořádání

Odvozený prvek poskytuje, v rámci zjednodušení přijatých pro pruty, přesné řešení. Ukázalo se, že je schopen efektivně řešit spřažené konstrukce. Smršťování a dotvarování se zadává vynuceným délkovým poměrným přetvořením referenční osy prutu a vynuceným poměrným pootočením průřezu (křivostí).

### 3. Geometricky nelineární analýza

U stavebních konstrukcí se neočekávají velká poměrná přetvoření, proto se uvažují velké pouze posuny a pootočení. Byly testovány různé metody geometricky nelineární analýzy a implementována byla metoda rovnováhy na přetvořené konstrukci. V tomto pojetí splývá geometricky nelineární analýza s teorií druhého řádu.

U metody konečných prvků je rovnováha uvnitř prvků apriori splněna, rovnováha v uzlech je splněna u geometricky lineárního řešení. U geometricky nelineárního řešení dojde vlivem změněné geometrie k nerovnováze. Požadavek rovnováhy v  $i$ -tém uzlu je

$$\{F\}_a - \sum_{k=1}^n \{R\}_{ka} = \{0\}, \quad (1)$$

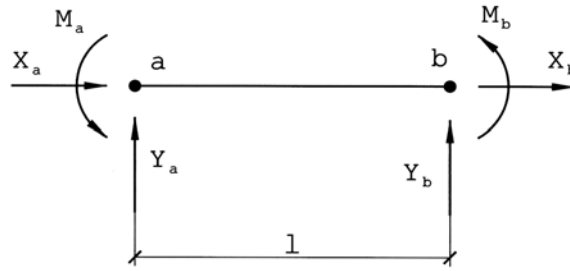
kde

$\{F\}_a$  – vektor zatěžovacích impulsů a reakcí v uzlu  $a$ ,

$\{R\}_{ka}$  – vektor uzlových sil  $k$ -tého prvku v uzlu  $a$  v globálních souřadnicích, přičemž uzlové síly mají smysl působení uzlů na prvek.

U prutové konstrukce v rovině se rovnice (1) vyjádří konkrétněji. V každém styčnicku se stýká  $n$  prutů. Do rovnice rovnováhy (1) pak vstupují uzlové síly prutů dosažené v daném zatěžovacím kroku ( $\{R\}_{ka}$ ) a uzlové síly, jichž bylo dosaženo v předchozích zatěžovacích krocích ( $\{\bar{R}\}_{ka}$ ). Vektor uzlových sil se dá rozepsat

$$\{R\}_k = \{X_a, Y_a, M_a, X_b, Y_b, M_b\}^T = \{\{R\}_{ka}, \{R\}_{kb}\}^T. \quad (2)$$



Obrázek 2: Uzlové síly na prutu

Za předpokladu, že uzlové síly jsou představovány účinky styčnicku na prvek a zavedením značení podle rovnice (2) se rovnice (1) napíše

$$\{F\}_a - \sum_{k=1}^n \{R\}_{ka} - \sum_{k=1}^n \{\bar{R}\}_{ka} = \{Q\}_a. \quad (3)$$

Vektor  $\{Q\}_a$  na pravé straně představuje nepřenesené účinky, kterými se konstrukce zatěžuje v další iteraci. V případě nalezení ideální rovnováhy je vektor  $\{Q\}_a$  nulový, v praktické implementaci se kontroluje jeho norma a výpočet je ukončen, je-li menší než předem definovaná hodnota.

### Omezení řešeného podílu zatížení

Při praktických výpočtech se ukázala nutnost omezit podíl zatížení řešený v jednom zatěžovacím kroku. Prvky MKP jsou odvozeny za předpokladu platnosti rovnováhy na nepřetvořené konstrukci. V geometricky nelineárním výpočtu tento předpoklad nebývá splněn. Je-li prvek zatížen a přetvoří se, bude opět v rovnováze. Poloha vnitřních sil však nebude totožná se situací před začátkem deformace. Z toho plyne, že chyba řešení se bude zvětšovat se vzrůstajícími přemístěními. Ta musí být při praktickém řešení omezena tak, aby během jednoho zatěžovacího kroku nedošlo k příliš velké změně směru uzlových sil, a tedy k výraznému porušení rovnováhy. Změna směru uzlových sil se realizuje skokem v dalším zatěžovacím kroku, na jehož začátku je prvek opět v rovnováze.

Dojde-li k posunu počátečního a koncového uzlu ve směru  $x$  o nestejnou hodnotu, poruší se momentová rovnováha na prvku – posouvající síla již nepracuje na rameni rovném původní délce prutu, ale na nové délce prutu. Ve stavebních konstrukcích jsou poměrná délková přetvoření maximálně v řádu promilí, to znamená, že chyba v momentech vzniklá protažením prutu je ve stejném řádu. Tato chyba je nezávislá na dělení konstrukce na prvky.

Shodný posun obou uzlů ve směru obou os nevyvolá žádné vnitřní síly. Rozdílný posun ve směru osy  $y$ , jehož výsledkem je naklonění (pokud se nejedná o přemístění tělesa jako tuhého celku) vyvolá vznik vnitřních sil. Tyto síly však sledují osu prutu, jejich směr tedy odporuje výchozímu stavu, ze kterého byly odvozeny statické a geometrické podmínky. Právě změna směru vnitřních sil omezuje maximální pootočení dosažené v jednom zatěžovacím kroku.

## Dělení na prvky

V předchozích textu je popsána rovnováha na přetvořené konstrukci, kde se předpokládá, že prut zůstává i po deformaci přímý. Uplatněním tohoto předpokladu dojde k chybě (ve skutečnosti se prut zakříví a v důsledku toho dojde i k pootočení uzlových sil). Tato chyba se potom projeví na rovnováze sil v uzlu na styku prvků, protože hladká křivka příčného posunu se aproximuje polynomem. Například normálové síly na nezatíženém styku dvou prvků v jedné řadě mají nulovou výslednici. Avšak díky vzájemnému pootočení prvků jsou i normálové síly vzájemně pootočený a tudíž generují nenulovou výslednici. V případě posouvajících sil dochází k podobnému jevu.

Chyba tedy vzniká díky nepravdivému předpokladu o přímosti prvku po deformaci a projeví se porušením rovnováhy na styku dvou prvků. Tato chyba se účinně potlačí hustotou dělení na prvky.

## Matice počátečních napětí

Od jisté úrovně zatížení přestává být výše popsaná metoda funkční. Výpočet se stává nestabilní i při extrémním zmenšení zatěžovacích kroků. Tento jev je způsoben změnou směru počátečních uzlových sil po deformaci v iteraci nelineárního výpočtu (v rámci jednoho zatěžovacího kroku). Nacházíme-li se v rovnovážném bodě zatěžovací dráhy, je dosaženo rovnováhy mezi uzlovými silami prutů vcházejících do uzlu a zatížením v uzlu. Přiložením další části zatížení jsou vypočteny nová přemístění a uzlové síly. Vypočte se rovnováha ve styčnicku podle rovnice (3). Vlivem pootočení prutu bude vektor nepřenesených sil  $\{Q\}$  nenulový. Po sestavení zatěžovacího vektoru a analýze dostaneme jiné hodnoty přemístění. Vypočtou-li se opět nepřenesené síly, od jisté úrovně deformace nedochází k jejich konvergenci k nule. Je to dáno uzlovými silami, které vlivem pootočení prutu výrazně mění svůj směr a tím i transformovanou velikost. To způsobuje velké změny ve vektoru  $\{Q\}$ .

Výše popsaný jev je možno do jisté míry omezit pomocí tečné matice tuhosti, která se vyjádří jako součet tří matic

$$[K]_t = [K] + [K]_{GY} + [K]_{GX} = [K] + [K]_G, \quad (4)$$

kde

$[K]$  – matice tuhosti prvku,

$[K]_G$  – matice počátečních napětí,

$[K]_{GY}$  – matice počátečních napětí závislá na silách  $Y_a$  a  $Y_b$ ,

$[K]_{GX}$  – matice počátečních napětí závislá na silách  $X_a$  a  $X_b$ .

Matice počátečních napětí vyjadřuje síly, kterými se doplní již přenesené uzlové síly tak, aby byla zajištěna rovnováha po deformaci prutu jako tuhého celku, při zachování velikosti a směru již přenesených uzlových sil.

Předpokládají-li se přemístění v jednom zatěžovacím kroku jako malá oproti délce prvku, vyjádří se matice  $[K]_{GY}$  jako

$$[K]_{GY} = \frac{M_a + M_b}{l^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Matice počátečních napětí  $[K]_{GX}$  má tvar

$$[K]_{GX} = \frac{X_b}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Použití takto odvozené tečné matice má velmi dobré výsledky. Výpočtově je dosáhováno značných přemístění – v reálné konstrukci nedosažitelných.

Nelineární výpočet byl samozřejmě testován na příkladech a srovnáván jak s výsledky experimentu, tak s výsledky z jiných výpočetních programů a bylo dosaženo velmi dobré shody (Zídek, 2003).

#### 4. Reologie betonu

Přetvoření betonového prvku je možno vyjádřit rovnicí:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_p(t) + \varepsilon_c(t) + \varepsilon_s(t) + \varepsilon_t(t) = \varepsilon_m(t) + \varepsilon_{nm}(t). \quad (7)$$

Přetvoření betonového prvku se dá vyjádřit jako součet přetvoření okamžitých (elastických –  $\varepsilon_e$  a plastických –  $\varepsilon_p$ ), přetvoření dotvarováním (creep –  $\varepsilon_c$ ), smršťováním (shrinkage –  $\varepsilon_s$ ) a přetvoření změnou teploty ( $\varepsilon_t$ ). Přetvoření lze rozdělit na mechanická ( $\varepsilon_m$  – závislá na napětí), tj. přetvoření okamžitá a dotvarováním betonu a napětí nemechanická ( $\varepsilon_{nm}$ ), tj. smršťování a změna teploty.

Dotvarování je závislé na dosaženém napětí v betonu. Pro jeho řešení je třeba zavést zjednodušující předpoklady:

- závislost mezi napětím a přetvořením od dotvarování je lineární,
- platí princip superpozice pro přetvoření způsobená napětím aplikovaným v různých časech,
- vlivem stárnutí dochází ke změně modulu pružnosti.

Princip linearity mezi napětím a přetvořením od dotvarování platí pouze za podmínky, že působící napětí nepřekročí 40 % pevnosti betonu a že nenastanou náhlé významné změny vlhkosti betonu.

Mechanická přetvoření je možno vyjádřit

$$\varepsilon_m(t) = \frac{\sigma(\tau_1)}{E(\tau_1)} + \frac{\sigma(\tau_1)}{E(\tau_1)} \varphi(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \frac{d\sigma(\tau_2)}{d\tau_2} \left[ \frac{1}{E(\tau_2)} + \frac{\varphi(t, \tau_2)}{E(\tau_2)} \right] d\tau, \quad (8)$$

kde

$\varepsilon_t$  – mechanická přetvoření v čase  $t$ ,

$\sigma(\tau_1), \sigma(\tau_2)$  – napětí, které se vložilo na prvek v čase  $\tau_1, \tau_2$  ( $\tau_2 > \tau_1$ ),

$E(\tau_1), E(\tau_2)$  – modul pružnosti v čase  $\tau_1, \tau_2$ ,

$\varphi(t, \tau_1), \varphi(t, \tau_2)$  – součinitel dotvarování, které proběhlo v intervalu  $\langle \tau_1, t \rangle, \langle \tau_2, t \rangle$ .

Nemechanická přetvoření, tj. smršťování a změna teploty se vyjádří klasickými postupy stavební mechaniky jako zatížení vynuceným přetvořením. Jejich vyjádření nečiní potíže.

Rovnice (8) není ve většině případů řešitelná v uzavřeném tvaru a je třeba použít přibližnou metodu. Byla zvolena **metoda časové diskretizace**. Integrál v rovnici (7) se pomocí složeného obdelníkového pravidla převede na sumaci.

$$\varepsilon_m(t) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\Delta\sigma(\tau_i)}{E(\tau_i)} + \frac{\Delta\sigma(\tau_i)}{E(\tau_i)} \varphi(t, \tau_i) \right), \quad (9)$$

kde

$\Delta\sigma(\tau_i)$  – změna napětí v čase  $\tau_i$ ,

$E(\tau_i)$  – modul pružnosti v čase  $\tau_i$ ,

$\varphi(t, \tau_i)$  – součinitel dotvarování za čas  $\langle \tau_i, t \rangle$ .

Při praktickém řešení se časový úsek, pro který má být dotvarování vyčísleno, rozdělí na intervaly. Hranice intervalů musí být ve všech časech, ve kterých dochází ke změnám na konstrukci (mění se zatížení, přidávají se nebo odebírají konstrukční prvky, mění se okrajové podmínky). Na hranicích intervalů (v časových uzlech) se vyčíslí přetvoření vyvolaná dotvarováním ode všech změn napětí dosažených ve všech předchozích časových uzlech. Vyčíslí se rovněž přetvoření smrštěním a změnou teploty. Provede se statický výpočet a přejde se do dalšího časového uzlu.

## 5. Postupná výstavba

Postupná výstavba zahrnuje přidávání a odebírání prvků, zatížení a okrajových podmínek a změnu průřezu v hybridních konstrukcích, což je umožněno implementací prvku na excentricitě.

Aby bylo možno obsáhnout různé postupy výstavby jsou data v programu organizována databázovým způsobem (Zidek, 2003). Aby bylo možno zohlednit předchozí stavy konstrukce, zadávají se do statické analýzy počáteční vnitřní síly ve formě uzlových sil, které mají povahu nekonzervativního zatížení – jejich směr sleduje změnu polohy prutu v geometricky nelineárním výpočtu.

## 6. Stručný popis programů

Na základě výše naznačených teorií sestavil autor příspěvku počítačový program pro výpočet konstrukcí s vlivem dotvarování a smršťování betonu, geometrické nelinearity a postupné výstavby. Z praktických důvodů byl celý algoritmus rozdělen do samostatných celků – programů Asteres a Geom. Asteres je řídicí program výpočtu, Geom zajišťuje vlastní elastické řešení prutového modelu. Základní funkce programu Asteres se dají shrnout do následujících bodů:

- čtení a interpretace příkazů,
- správa dat (zadaných, mezivýsledných i výsledných),
- výpočet reologických účinků,
- volání programu Geom, předává mu zadání a zpracovává výsledky Geomem dodané.

V zadání se nadefinují všechny komponenty pro všechny časové uzly (elementy, zatížení i okrajové podmínky). Pro jednotlivé časové uzly se pomocí tohoto seznamu definuje aktuální konfigurace konstrukce. V každém časovém uzlu ji program Asteres zapíše do souboru, kam přidá již dosažené uzlové síly jednotlivých prvků. Z přírůstků přetvoření v předešlých časových uzlech se vypočte případné zatížení reologií a ve formě zatížení vynucenými přetvořeními se rovněž zapíše do souboru. Následuje výpočet programem Geom, který vrací výsledkový soubor. Program Asteres výsledky přečte a zapíše je do databáze mezivýsledků. Poté se vypočtou celkové výsledky pro daný časový uzel a přírůstky poměrných elastických přetvoření, které se použijí pro výpočet účinků dotvarování v dalších časových krocích (je-li výpočet požadován).

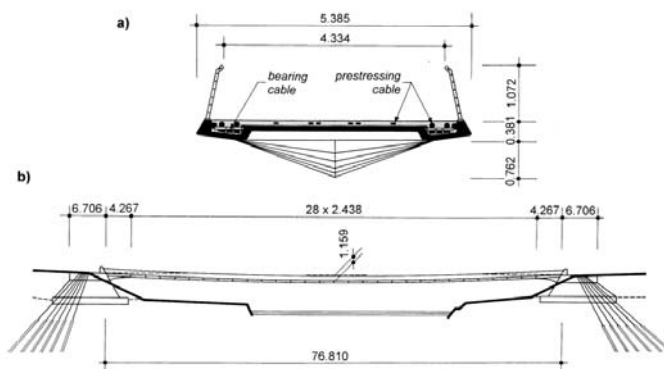
Popsaný postup analýzy umožňuje modelování prakticky jakéhokoliv způsobu výstavby a libovolného zatížení konstrukce v kterémkoliv čase, včetně aplikace nahodilých zatížení.

Program Geom řeší rovinné prutové konstrukce. Implementován je prutový prvek na excentricitě (kapitola 2). Program v současné době umožňuje:

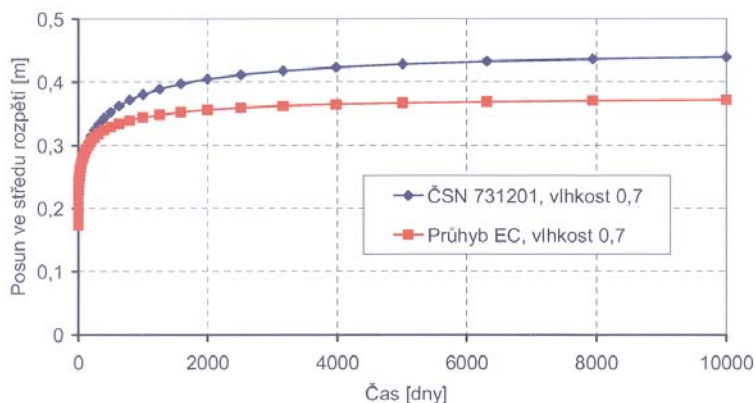
- lineární výpočet rovinné prutové úlohy,
- geometricky nelineární výpočet,
- zadání počátečních uzlových sil (tímto způsobem je zajištěna možnost výpočtu postupně budovaných konstrukcí),
- zadání závislých uzlů (kloubů),
- zadání silových (a momentových) zatížení uzlů,
- zadání silových i deformačních zatížení elementů,
- zadání homogenních deformačních okrajových podmínek.

## 7. Řešená konstrukce předpjatého pásu

Výše popsané programy byly verifikovány na řadě jednodušších konstrukcí. Hlavním účelem programů však je výpočet reologického chování konstrukcí, které je zároveň nutno řešit geometricky nelineárně, např. předpjatých pásů. Předpjatým pásem rozumíme konstrukci tvořenou štíhlým betonovým prvkem ve tvaru řetězovky, který je namáhán převážně normálovou silou. Předpjatý pás může být monolitický, nebo může být sestaven z prefabrikovaných prvků. Statické působení vychází ze způsobu montáže. Při montáži působí konstrukce jako dokonale ohebné vlákno, po vybetonování spár jako prvek namáhaný nejen normálovou silou, ale i ohybovým momentem. Aby konstrukce získala dostatečnou tuhost, je dodatečně předepnuta. Namáhání konstrukce v provozním stavu vychází ze stavu napjatosti na konci montáže.



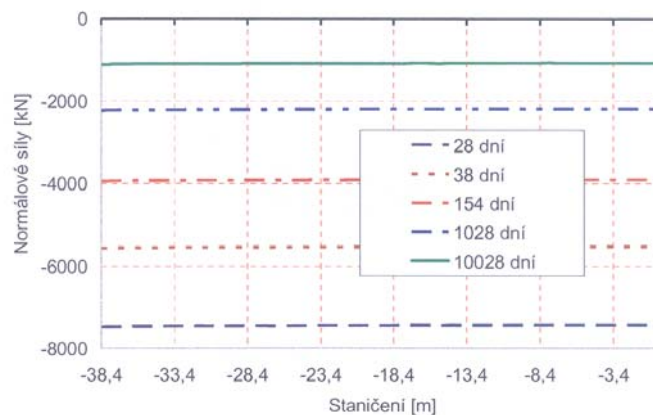
Obrázek 3: Lávka Blue River, základní geometrické charakteristiky



Obrázek 4: Svislé posuny uprostřed rozpětí

Programem Asteres byla analyzována konstrukce předpjatého pásu lávky pro pěší přes řeku Blue River, která byla postavena v Coloradu a jejímž autorem je profesor Stráský (Stráský, 2000). Základní charakteristiky konstrukce jsou na obr. 3. Rozpětí konstrukce je





Obrázek 5: Normálové síly v mostovce v čase (kóta -38,4 m je levá podpora, 0 m je střed rozpětí)

76,81 m, „průvės“ na začátku používání je 1,16 m, celková výška průřezu je 0,381 m. Protože se jednalo o studijní výpočet, byla konstrukce poněkud zjednodušena – neuvažovaly se náběhy a rozdělení průřezu na prefabrikát a dobetonávku. Aby bylo možno vystihnout působení konstrukce, byl předpjatý pás modelován souběžnými pruty zvláštními pro nosné kabely (bearing cables), předpínací kabely (prestressing cables) a betonové prvky. Délka prvků byla volena v rozmezí od 0,05 m v místě koncentrace napětí u podpory do 0,495 m uprostřed rozpětí. Vzhledem k tomu, že konstrukce i zatížení jsou symetrické, byla modelována pouze její levá polovina. Výpočet byl proveden jednak pro předpis dotvarování podle ČSN 73 12 01 a jednak pro předpis podle EC2. Srovnání posunů ve středu rozpětí pro obě normy je na obr. 4, (kladný posun vyjadřuje „průhyb“ směrem nahoru). Pro ilustraci jsou na obr. 5 normálové síly v mostovce ve vybraných časových uzlech (pro předpis dotvarování podle EC2).

## 8. Závěr

Navržená metoda umožňuje geometricky nelineární analýzu rovinných prutových modelů s vlivem reologie betonu a postupné výstavby. Některé atributy řešení jsou stručně popsány v předloženém příspěvku. Odvozené teorie byly implementovány do autorova počítačového programu a teorie i implementace byly ověřeny na jednodušších příkladech. První výpočty konstrukce předpjatého pásu ukázaly, že reologie betonu má nezanedbatelný vliv na chování takových konstrukcí. Další práce se soustředí na vylepšování stávajícího programu a na podrobné modelování zejména konstrukcí tvořených předpjatým pásem, kombinujícím prefabrikované části a dobetonávku.

## 9. Poděkování

Autoři děkují Grantové agentuře ČR za podporu (GAČR 103/03/P055 a GAČR 103/04/2092).

## 10. Literatura

Stráský J. (2000) Aplikace konstrukcí z předpjatého pásu v USA. Betonářské dny, Pardubice.

Šmerda Z. & Křístek V. (1988) Creep and Shrinkage of Concrete Elements and Structures, SNTL, Praha.

Zídek R. (2002) Nelineární geometrické podmínky?, Problémy modelování, komorní seminář, Ostrava.

Zídek R. (2003) Modelování betonových konstrukcí s vlivem geometrické nelinearity, reologie betonu a postupné výstavby, disertační práce, Brno.