

IDENTIFICATION OF DAMAGE MODEL WITH CRACKS FROM RESULTS OF TENSILE TEST AND THREE POINT BENDING TEST

A. Kučerová^{*}, D. Brancherie[†], A. Ibrahimbegović[‡]

Summary: *During the three-point bending test, a concrete specimen is damaged by cracking. Brancherie and Ibrahimbegović are authors of a relatively simple model capable of describing the behavior of specimen weakened by distributed damage as well as macroscopic cracks. In this paper we discuss the identification method for model material parameters from measured data during the tensile loading test and three-point bending test. The emphasis is put on the formulation and solving of the minimization problem.*

1. Úvod

Beton je kvazikřehký materiál, který se při zatěžovací zkoušce v trojbodovém ohybu a tahu porušuje trhlinami. Brancherie a Ibrahimbegović jsou autoři relativně jednoduchého modelu, který je schopný zachytit chování betonových vzorků s rozptýlenými i lokalizovanými trhlinami [1]. Významnou výhodou tohoto modelu je jeho velmi malá závislost na hustotě použité sítě konečných prvků. Model popisuje tři fáze chování betonu při zatěžování v tahu: elastickou, plastickou (včetně zpevnění a změkčení) a poškození.

K popsání vlastností konkrétního typu betonu slouží šest parametrů, přičemž jednotlivé parametry se uplatňují v různých fázích zatěžování a jejich význam je možné geometricky interpretovat na křivce vztahu napětí a deformace. V elastické fázi zatěžování se uplatňují dva parametry: Youngův modul pružnosti E a Poissonův součinitel ν . Přechod do plastického zpevnění betonu je dán mezí kluzu σ_y . Fázi plastického zpevnění pak řídí zejména modul zpevnění K , její konec pak určuje mez pevnosti σ_u . Na závěr se po překročení meze pevnosti aktivuje parametr isotropního zpevnění β . Pro jednotlivé parametry byly autory modelu určeny široké meze jejich realistických hodnot, které jsou uvedeny v Tabulce 1.

Tabulka 1: Meze parametrů modelu

E	∈	(25.0, 50.0) GPa
ν	∈	(0.1, 0.4)
σ_y	∈	(1.0, 5.0) MPa
K	∈	(10.0, 10000.0) MPa
σ_u	∈	(σ_y , 6.0) MPa
β	∈	(0.1, 10.0)

^{*} Anna Kučerová: Katedra mechaniky, Fakulta stavební, České Vysoké Učení Technické v Praze; Thákurova 7; 166 29 Praha 6 – Dejvice; tel: +420 224 354 375, fax: +420 224 310 775; e-mail: anicka@cml.fsv.cvut.cz

[†] Delphine Brancherie: Université de Technologie de Compiègne, Compiègne, France

[‡] A. Ibrahimbegović: Laboratoire de mécanique et technologie, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France

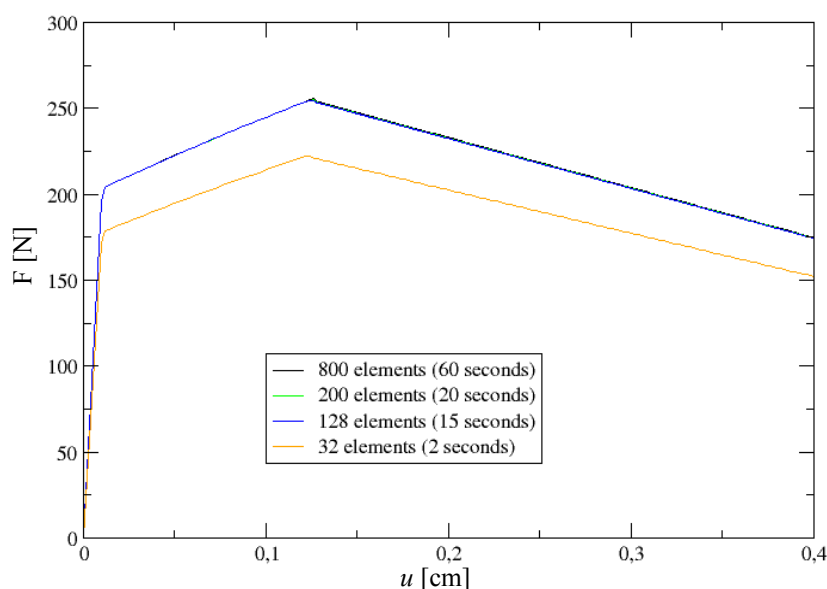
Při zatěžovací zkoušce v jednoosém tahu je po vzniku trhliny narušeno homogenní pole napětí, a proto celková odezva získaná z měření koncového posunu a zatěžovací síly neodpovídá přesně křivce vztahu napětí a deformace pro materiálový bod. Identifikace parametrů modelu z výsledků zatěžovací zkoušky v tahu nepřináší velké nesnáze. Nevýhodou je ovšem fakt, že tahová zkouška je mnohem náročnější na praktickou realizaci.

Zatěžovací zkoušku v trojbodovém ohybu je naproti tomu mnohem snazší realizovat. Vzorek je při ní podroben heterogennímu poli napětí od počátku zatěžování. Globální odezva reprezentovaná naměřenou křivkou vztahu síly na posunu tedy zahrnuje příspěvky posunů od různě namáhaných částí, a proto z takové křivky není možné snadno odečíst hodnoty parametrů modelu.

Hlavním cílem naší práce bylo navržení postupu, jak identifikovat materiálové parametry modelu z výsledků konkrétní zatěžovací zkoušky a doporučit měření, která jsou nutná pro identifikaci všech materiálových parametrů. Z tohoto důvodu jsme zvolili tzv. přímý postup identifikace, kdy je vhodným optimalizačním algoritmem minimalizována funkce rozdílu mezi naměřenými výsledky a výsledky simulace.

2. Identifikace parametrů z výsledků tahové zkoušky

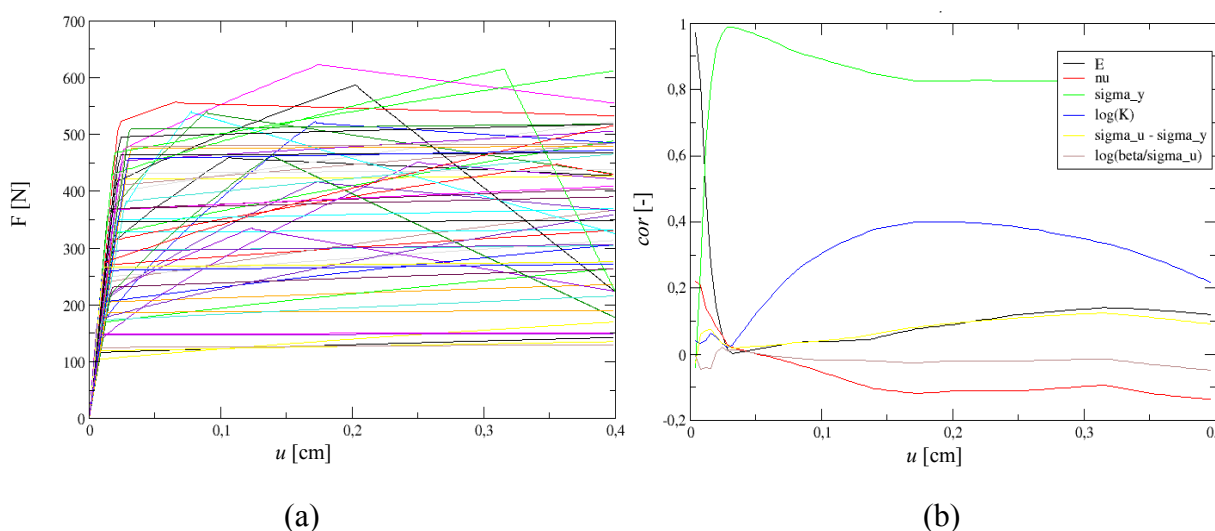
Jak už bylo zmíněno výše, globální odezva betonového vzorku při jednoosé tahové zkoušce se velice blíží chování materiálu v jediném materiálovém bodě. Proto bylo prvním cílem identifikovat materiálové parametry modelu z výsledků této zkoušky. Pro výpočty byla konkrétně použita implementace modelu v softwaru FEAP [4], který umožňuje simulaci tahové zkoušky pouze pomocí dvojrozměrného modelu. Vzhledem k dočasné nedostupnosti experimentálních výsledků byla nejprve provedena jedna simulace tahové zkoušky s jemnou sítí konečných prvků o 800 prvcích, která sloužila místo naměřených dat. To mělo pro návrh metody identifikace parametrů modelu i tu výhodu, že bylo známé optimální řešení a tím mohla být věrohodněji posouzena úspěšnost identifikační metody. Další simulace zkoušky během identifikace jsou prováděny na hrubší síti o 128 prvcích. Na Obrázku 1 je ovšem možné vidět, že výsledné pracovní diagramy pro tyto různé husté sítě se téměř neliší.



Obrázek 1: Porovnání pracovních diagramů získaných ze simulací pro různě husté sítě konečných prvků.

2.1 Citlivostní analýza

Dalším krokem identifikace bylo provedení analýzy citlivosti průběhu pracovních diagramů pro tahovou zkoušku na hodnoty jednotlivých parametrů. Pro její výpočet bylo nejprve vybráno 60 různých variací parametrů modelu. Hodnoty jednotlivých parametrů byly vybrány tak, aby byly v pravidelných intervalech rovnoměrně rozmístěny mezi jejich danými mezními hodnotami (připomeňme Tabulku 1). Pro sestavení šestičlenných variací parametrů pak byla použita metoda simulovaného žhání, která zajistila co největší pokrytí prostoru ohraničeném mezemi jednotlivých parametrů. Pět simulací ovšem nebylo dokončeno kvůli nestabilitě výpočtu pro jejich hodnoty parametrů. Výsledné křivky závislosti tahové síly na krajním posunu jsou uvedeny na Obrázku 2a.



Obrázek 2: Citlivostní analýza pracovních diagramů tahové zkoušky: (a) Pracovní diagramy pro 55 simulací tahové zkoušky. (b) Průběhy hodnot korelačního koeficientu pro jednotlivé parametry.

Ze získaných pracovních diagramů bylo vybráno 100 diskrétních hodnot posunu a v nich byla spočítána hodnota Pearsonova korelačního koeficientu cor podle vzorce:

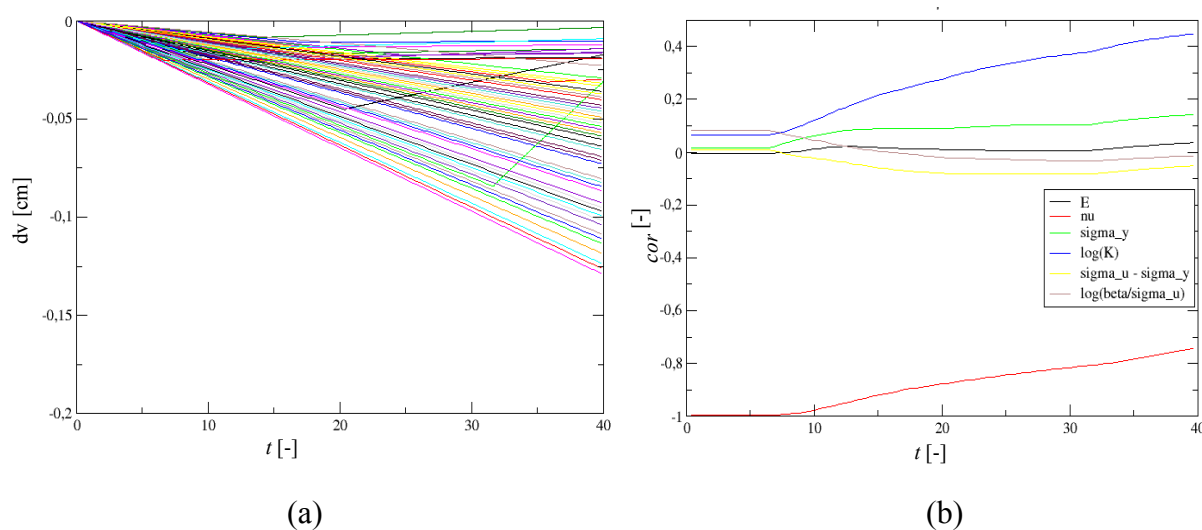
$$cor = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (1)$$

kde x_i představují hodnotu silového zatížení odpovídající danému posunu a y_i představují hodnotu parametru, pro kterou bylo zatížení x_i dosaženo. \bar{x} a \bar{y} jsou průměrné hodnoty zmíněných veličin. Výsledné průběhy hodnot korelačního koeficientu pro jednotlivé parametry jsou uvedeny na Obrázku 2b.

Z průběhů citlivostních křivek je zřetelný velký význam Youngova modulu pružnosti a meze kluzu v počátcích zatěžování. Zhruba uprostřed zatěžování ještě modrá křivka na Obrázku 2b ukazuje nemalý význam modulu zpevnění. Ostatní parametry podle citlivostní analýzy vykazují malý účinek na průběh pracovních diagramů, což je do jisté míry proti očekávání. Vysvětlením může být fakt, že z 55ti simulací pouze během 13ti z nich byla překročena mez pevnosti, jejíž účinek tudíž v těchto případech nebyl aktivován, stejně tak

jako účinek parametru β . Důvodem této nepříjemnosti stejně jako nepříliš velkých hodnot korelačního koeficientu u modulu zpevnění jsou pravděpodobně příliš široké krajní meze jednotlivých parametrů a tudíž i veliký rozptyl v průbězích pracovních diagramů.

Malé hodnoty korelačního koeficientu u Poissonova součinitele nejsou už tolik překvapivé. Pro identifikaci tohoto parametru je pravděpodobně nutné měření bočních posunů. Proto byly z výsledků simulací vybrány ještě data odpovídající bočním posunům na bocích vzorku uprostřed jeho délky. Křivky závislosti rozdílu bočních posunů na tzv. časovém kroku zatěžování jsou ukázány na Obrázku 3a a příslušné citlivostní křivky jsou uvedeny na Obrázku 3b. Z obrázku 3b je už vidět veliký význam Poissonova součinitele v začátcích zatěžování.



Obrázek 3: Citlivostní analýza křivek v závislosti na časovém kroku zatěžování pro tahovou zkoušku: (a) Časové průběhy bočního zkrácení pro 55 simulací. (b) Odpovídající průběhy hodnot korelačního koeficientu pro jednotlivé parametry.

2.2. Formulace optimalizačního problému

Citlivostní analýza ukázala, že v daných mezích parametrů dojde jen ve 23.6% případů k překročení meze pevnosti materiálu a k rozvoji trhlin. Důsledkem toho ve většině simulací chybí informace o mezi pevnosti i parametru β a proto je tyto parametry těžké identifikovat společně s ostatními. Dále je důležitý také fakt, že výpočet elastické fáze zatěžování není výpočetně náročný, zatímco konečná fáze po překročení meze pevnosti je výpočetně mnohonásobně dražší. Tyto dva důvody ukazují, že výhodnější postup by mohla být postupná identifikace parametrů. Výhodou daného modelu a tahové zkoušky je také fakt, že účinky některých parametrů se začínají projevovat až později během zatěžování, takže zatímco jsou například identifikovány první dva parametry, mohou se hodnoty ostatních volit jako náhodná čísla, aniž by tím byla objektivní funkce významně poškozena.

Postupná identifikace byla konkrétně rozdělena do tří fází. V první fázi byl identifikován Youngův modul pružnosti E současně s Poissonovým součinitelem ν a zvolená objektivní funkce[§] F_I je dána výrazem

[§] Všechny objektivní funkce jsou formulovány tak, aby jejich hodnoty byly záporné a optimalizační problém vedl na maximalizaci hodnoty těchto funkcí.[0]

$$F_1 = -\alpha_1 (f_{\text{exp}}(u = 0.004) - f_{\text{sim}}(u = 0.004))^2 - \alpha_2 (dv_{\text{exp}}(t = 0.2) - dv_{\text{sim}}(t = 0.2))^2 \quad (2)$$

kde f_{exp} a f_{sim} jsou hodnoty silového zatížení z výsledků simulace, resp. experimentu v okamžiku, kdy krajní posun dosáhl hodnoty $u = 0.004$ cm. Podobně dv_{exp} a dv_{sim} jsou hodnoty silového zatížení z výsledků simulace, resp. experimentu v okamžiku, kdy krok zatěžování byl $t = 0.2$. Výpočty simulací v průběhu identifikace tedy byly zastaveny po dosažení krajního posunu $u = 0.005$ cm, což znamenalo, že každý výpočet trval jen několik vteřin. Parametry α_1 a α_2 jsou určeny tak, aby oba výrazy, které násobí, výsledně nabývaly řádově stejných hodnot. Nejprve jsou nejprve tyto výrazy vyhodnoceny na vzorcích použitých při citlivostní analýze a parametry a jsou pak nastaveny tak, aby průměrná hodnota výrazů na těchto vzorcích byla rovna 1.

V následující fázi byla identifikována mez kluzu σ_y a modul zpevnění K . Do předpisu objektivní funkce F_1 byly přidány další dva výrazy, vyjadřující rozdíl mezi naměřenou a simulovanou hodnotou zatížení ve chvílích, kdy krajní posun vzorku dosáhl hodnoty $u = 0.028$ cm, resp. $u = 0.12$ cm. Nová objektivní funkce F_2 má tedy předpis:

$$F_2 = F_1 - \alpha_3 (f_{\text{exp}}(u = 0.028) - f_{\text{sim}}(u = 0.028))^2 - \alpha_4 (f_{\text{exp}}(u = 0.12) - f_{\text{sim}}(u = 0.12))^2 \quad (3)$$

Výpočet simulací v průběhu identifikace byl tentokrát zastavován při dosažení krajního posunu $u = 0.13$ cm a jeho trvání bylo stále do jedné minuty.

V poslední fázi byla identifikována mez pevnosti σ_u současně s parametrem isotropního zpevnění β . Do předpisu objektivní funkce F_2 byl tentokrát přidán jeden výraz, vyjadřující rozdíl mezi naměřenou a simulovanou hodnotou zatížení v okamžiku, kdy krajní posun vzorku dosáhl hodnoty $u = 0.17$ cm, tj. kdy měřený vzorek byl již ve fázi změkčení. Objektivní funkce F_3 měla tedy podobu:

$$F_3 = F_2 - \alpha_5 (f_{\text{exp}}(u = 0.14) - f_{\text{sim}}(u = 0.14))^2 - \alpha_6 (f_{\text{exp}}(u = 0.16) - f_{\text{sim}}(u = 0.16))^2 \quad (4)$$

Tentokrát se délka výpočtu pohybovala už kolem minuty. Největší rozdíl nastává až u výpočtu do posunu $u = 0.4$ cm, kdy doba trvání dosahuje několika minut a někdy až desítek minut. Následující poznámky k postupu identifikace ukáží, že výpočty až do této hodnoty posunu nebyly nutné.

Zejména pro potřeby stochastické optimalizační metody jsou přípustné intervaly hodnot jednotlivých proměnných přepočítány na intervaly $\bar{x}_i \in \langle 0,1 \rangle$ a optimalizační proces proběhl v těchto nových mezích. U některých proměnných tento přepočet nebyl lineární a proto je uveden mezi výrazy (5) - (6).

$$\bar{K} = (\log(K) - 1) / 3 \quad (5)$$

$$\bar{\beta} = (\log(\beta) + 1) / 2 \quad (6)$$

2.2. Řešení deterministickou metodou

První použitou metodou byla metoda největšího spádu. Jako počáteční bod \mathbf{x}_0 byl vybrán jeden vzorek ze simulací pro citlivostní analýzu, jehož hodnota objektivní funkce F_i byla největší. Řešení v následujícím kroku \mathbf{x}_{k+1} bylo získáno dle předpisu:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - F_i(\mathbf{x}_k) \frac{\nabla F_i(\mathbf{x}_k)}{\nabla F_i(\mathbf{x}_k)^T \nabla F_i(\mathbf{x}_k)} \quad (7)$$

Jelikož gradient žádné objektivní funkce $\nabla F_i(\mathbf{x}_k)$ nedokážeme vyjádřit analyticky, bylo nutné vypočítat jeho hodnotu numericky podle vztahu:

$$\frac{\partial F_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} \cong (F_i((x_{1,t-1}), \dots, (x_{1,t-1} + \Delta x_j), \dots, (x_{n,t-1}))) - F_i((x_{1,t-1}), \dots, (x_{1,t-1} - \Delta x_j), \dots, (x_{n,t-1}))) / 2\Delta x_j. \quad (8)$$

Délka kroku Δx_j byla nastavena jako jedna setina rozpětí mezních hodnot pro danou proměnnou x_j .

Vyhodnocení gradientu představuje výpočetně nejnáročnější operaci této metody. Při optimalizaci dvou proměnných jsou nutná čtyři vyhodnocení objektivní funkce. V Tabulce 2 jsou uvedeny výsledky identifikace parametrů E , ν , σ_y a K touto metodou.

Tabulka 2: Výsledky identifikace gradientní metodou.

Parametr	Počáteční hodnota x_0	Konečná hodnota x_k	Optimální hodnota	Konečná hodnota F_i	Počet iterací	Celkový počet vyhodnocení F_i
E	0.525	0.51965	0.52	-4.377e-06	5	26
ν	0.29167	0.26758	0.26667			
σ_y	0.39167	0.251923	0.25	-1.87556e-05	26	131
K	0.275	0.66357	0.66667			

Při optimalizaci objektivních funkcí F_1 a F_2 byly také vybírány startovací body ze sady simulací pro citlivostní analýzu. Hodnoty parametrů optimalizovaných v předchozích fázích identifikace však byly opraveny na hodnoty získané identifikací.

Mez pevnosti σ_u a parametr isotropního zpevnění β se touto metodou identifikovat nepodařilo. Důvodem byl pravděpodobně fakt, že optimální hodnota meze pevnosti σ_u byla rovna právě 0. Startovací hodnotou bylo číslo 0.33, ale této hodnotě odpovídal nulový gradient objektivní funkce. Pro vyšší hodnoty σ_u totiž zůstávala hodnota $f_{sim}(u = 0.14)$ konstantní.

S cílem snížit nutný počet iterací byla také vyzkoušena metoda sdružených gradientů, ta ale zrychlení optimalizace nepřinesla.

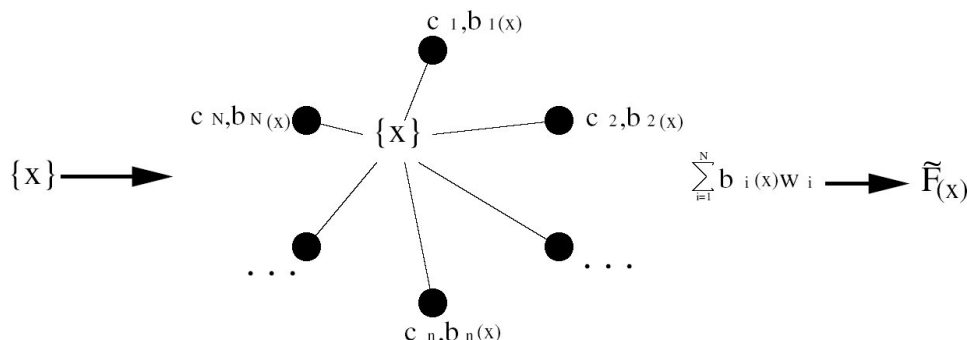
2.3. Řešení pomocí evolučního algoritmu a aproximace RADIAL BASIS FUNCTION NETWORK

Algoritmus použitý k výpočtům prezentovaným v této práci je založen na kombinaci neuronové sítě, konkrétně typu RADIAL BASIS FUNCTION NETWORK (RBFN) [5, 6], a genetického algoritmu GRADE [7, 8]. Principem algoritmu je nahrazení vyšetřované funkce aproximací neuronovou sítí a hledání maxima na této aproximaci pomocí genetického algoritmu. Pro zlepšení aproximace následuje přidání určitých bodů, například maxima nalezeného genetickým algoritmem, jako nových neuronů do neuronové sítě.

Výhodou této metody je fakt, že genetický algoritmus při hledání maxima nevyhodnocuje výpočtově náročnou objektivní funkci, ale pouze její aproximaci. Objektivní

funkce je vyhodnocována pouze při přidávání neuronů do neuronové sítě. Klíčovým bodem pro efektivitu a chování celé metody je tedy výběr bodů, které mají být přidávány.

Neuronová síť nahrazuje objektivní funkci $F(x)$ aproximací $\tilde{F}(x)$ danou součtem hodnot bazových funkcí přenásobených vahami výstupů z jednotlivých neuronů, viz obrázek 4,



Obrázek 4: Aproximace neuronovou sítí typu RBFN.

neboli

$$F(x) \approx \tilde{F}(x) = \sum_{i=1}^N b_i(x)w_i, \quad (9)$$

kde x je vektor proměnných, $b_i(x)$ bazová funkce i -tého neuronu, w_i váha výstupu i -tého neuronu a N je celkový počet neuronů tvořících síť. Jednotlivé bazové funkce b_i mají tvar

$$b_i(x) = e^{-\|x-c_i\|^2/r}, \quad (10)$$

kde c_i je vektor souřadnic centra bazové funkce i -tého neuronu a r je norma. Normování zaručuje, že bazové funkce budou nabývat podobných hodnot pro podobné rozložení bodů v různě "velkých" definičních oborech. Normu r získáme ze vztahu

$$r = \frac{d_{\max}}{\sqrt{\dim N}}, \quad (11)$$

kde d_{\max} je maximální vzdálenost přes definiční obor, \dim dimenze problému a N počet neuronů.

Váhy jednotlivých neuronů získáme z podmínky (12), že ve všech neuronech se má funkční hodnota neuronové sítě rovnat hodnotě objektivní funkce

$$F(c_i) = \tilde{F}(c_i). \quad (12)$$

Tato podmínka vede na minimalizační problém (13)

$$\min E = \min \sum_{i=1}^N \left[\left(F(c_i) - \sum_{j=1}^N b_j(c_i)w_j \right)^2 + \lambda_i w_i^2 \right]. \quad (13)$$

kde hodnota λ_i zaručuje regulárnost lineární soustavy rovnic (14) na jejíž řešení problém (13) vede. Hodnota λ_i je nastavena na $\lambda_i = 10^{-7}$.

$$\frac{\partial E}{\partial w_i} = 2 \sum_{i=1}^N \left[\left(F(c_i) - \sum_{j=1}^N b_j(c_i)w_j \right) b_i(c_i) + \lambda_i w_i \right] = 0 \quad (14)$$

Vyřešením soustavy rovnic (14) získáme vektor synaptických vah w_i .

Po nalezení aproximace RBFN je použit evoluční algoritmus GRADE k nalezení jejího maxima. V nalezeném maximu vyhodnotíme i objektivní funkci $F(x)$ a pokud s její hodnotou nejsme spokojeni, přikročíme k fázi vylepšení aproximace. Konkrétně přidáme do neuronové sítě tři nové neurony: nalezené maximum, náhodný bod a bod ve směru gradientu určeného dvěma naposledy získanými maximy, což je vyjádřeno vztahem (15).

$$c_{new} = c_j + \text{sign}(F(c_j) - F(c_{j-1}))(c_j - c_{j-1}) \quad (15)$$

Na nové aproximaci opět vyhledáme maximum a tak dále cyklus opakujeme, dokud nejsme hodnotou nalezeného maxima spokojeni. Během dřívější práce [3] byly testovány i další metody přidávání bodů do neuronové sítě a uvedená metoda se ukázala jako nejvíce efektivní.

Stejnou metodou byla provedena rovněž optimalizace všech tří objektivních funkcí. Na funkcích F_1 a F_2 potřebovala metoda podstatně více vyhodnocení objektivní funkce než gradientní metoda. Hlavním přínosem se ovšem ukázala při optimalizaci objektivní funkce F_3 . Při této optimalizaci bylo navázáno na výsledky gradientní metody s odtamtud známými hodnotami parametrů E , ν , σ_y a K . Výsledky optimalizace parametrů σ_u a β jsou uvedeny v Tabulce 3.

Tabulka 3: Výsledky identifikace stochastickou metodou.

Parametr	Konečná hodnota x	Optimální hodnota	Konečná hodnota F_i	Počet iterací	Celkový počet vyhodnocení F_i
σ_u	0.0	0.0	-1.037e-04	~10	~35
β	0.50971	0.5			

3. Závěr

V této práci byl vyzkoušen postup identifikace materiálových parametrů modelu pro beton s popisem trhlin z výsledků jednoosé tahové zkoušky. Bylo ukázáno, že při této zkoušce postačí měření globální odezvy vzorku zachycené v pracovním diagramu, doplněné o měření bočních posunů pro identifikaci Poissonova součinitele.

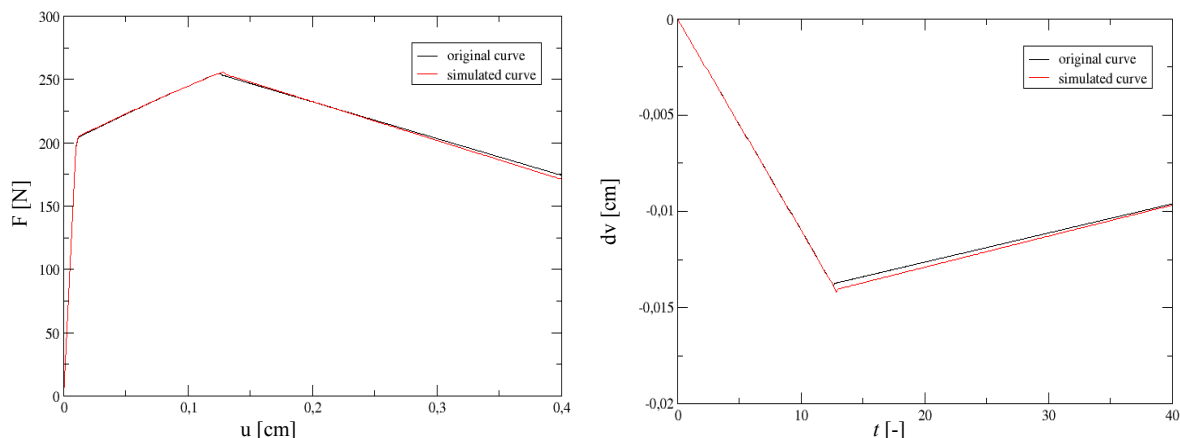
Identifikační problém byl formulován jako optimalizační úloha a k jejímu řešení byla použita deterministická metoda největšího spádu a stochastická metoda založená na postupné aproximace objektivní funkce neuronovou sítí označovanou jako RBFN. Optimalizační úloha byla rozdělena na několik fází, což posloužilo ke snížení výpočtové náročnosti optimalizace. Nejvýhodnější se ukázalo kombinovat obě optimalizační metody.

Pracovní diagram a křivku časového vývoje bočních posunů pro výsledné parametry získané optimalizací je možné porovnat s originálními křivkami na Obrázku 5.

Mezi slabé stránky prezentovaného postupu patří určitá nespolehlivost stochastické optimalizační metody. Na jejím propracování se ovšem i nadále pracuje. Dalším krokem naší práce pak bude identifikace parametrů z výsledků zatěžovací zkoušky v trojbodovém ohybu a otestování prezentované metody při identifikaci parametrů ze skutečných reálných experimentů.

4. Poděkování

Autoři by rádi poděkovali za finanční podporu grantem Ministerstva školství a tělovýchovy České Republiky, číslo MSM 6840770003.



Obrázek 5: Porovnání křivek pro výsledné nalezené parametry a jejich originálních předloh.
 (a) Pracovní diagram závislosti zatěžovací síly a krajního osového posunu. (b) Průběhy závislosti bočního vzájemného posunu na časovém kroku zatěžování.

5. Literatura

- [1] A. Ibrahimbegovic, D. Brancherie, Combined hardening and softening constitutive model of plasticity: precursor to shear slip line failure, *Comp. Mechanics*, 31, (2003), 88-100.
- [2] D. Claire, F. Hild¹, and S. Roux, A finite element formulation to identify damage fields: the equilibrium gap method, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2004; 61:189–208
- [3] A. Kučerová, M. Lepš, and J. Skoček, Large black-box functions optimization using radial basis function networks. In B. H. V. Topping, editor, *Proceedings of Eighth International conference on the Application of Artificial Intelligence to Civil, Structural and Environmental Engineering*, pages on CD-ROM, Stirling, United Kingdom, 2005. Civil-Comp Press.
- [4] Details and downloads of a Finite Element Analysis Program (FEAP), <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feap/>.
- [5] H. Nakayama, K. Inoue and Y. Yoshimori, Approximate optimization using computational intelligence and its application to reinforcement of cable-stayed bridges, *ECCOMAS*, 2004
- [6] M. K. Karakasis and K. C. Giannakoglou, On the use of surrogate evaluation models in multi-objective evolutionary algorithms, *ECCOMAS*, 2004
- [7] A. Kučerová, Optimální návrh a optimální řízení konstrukcí v oboru velkých deformací, Diplomová práce, 2004
- [8] Ibrahimbegović, A., Knopf-Lenoir, C., Kučerová, A., Villon, P., Optimal design and optimal control of elastic structures undergoing finite rotations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003