

ANALYSIS OF TEMPERATURES IN THE SURFACE LAYER OF A SOLID IN SHORT-TERM HEATING FOLLOWED BY COOLING

J. Menčík*, L. Beneš*

Summary: *The development of temperatures in a surface layer of a massive body during short-term heating and the following free cooling can be modelled as unidirectional heat flow in a semiinfinite solid. For the heating of bodies with uniformly distributed temperature, analytical solutions exist, while for the cooling (starting from nonuniform temperature distribution), a numerical procedure must be used. The paper brings formulae for various conditions of heating and for the numerical solution of the heat flow equation. Their use is illustrated on a model of heating caused by mutual sliding of a railway wheel and a rail, and of the following cooling by free convection into air and conduction into the body.*

1. Úvod

V technické praxi se často setkáváme s intenzívním krátkodobým ohřevem následovaným volným chladnutím. Příkladem je kování za tepla nebo lisování skloviny, ale také smýkání železničního kola po kolejnici při brzdění nebo rozjezdu. Představu o vývoji teplot při těchto procesech je možno získat z modelu založeného na jednorozměrném toku tepla. Předpoklad, že i v tělesech složitějších tvarů nebo při lokálním ohřevu se teplo šíří pouze ve směru kolmém k povrchu, je přijatelný pro tak dlouhé trvání procesu, dokud tloušťka tepelně ovlivněné oblasti je malá ve srovnání s její šířkou a s tloušťkou tělesa ve směru toku tepla. Jednorozměrný tok tepla v pevném tělese se řídí parciální diferenciální rovnicí

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1)$$

kde T je teplota, t je čas, x je hloubka pod povrchem, a $a = \lambda/(\rho c)$ je teplotní vodivost materiálu tělesa, λ je jeho tepelná vodivost, ρ je hustota, a c je měrná tepelná kapacita.

Pokud má těleso na počátku v celém objemu konstantní teplotu, můžeme teploty při ohřevu počítat pomocí analytických vztahů. Při následujícím chladnutí je nutno diferenciální rovnici (1) řešit numericky, např. tak, že ji nahradíme rovnicí diferenční, a počítáme postupný vývoj teplot v jednotlivých časových krocích. V příspěvku naznačíme řešení pro oba případy. Všechny materiálové parametry budeme uvažovat konstantní, i když při numerickém řešení by bylo možné uvažovat jejich změny s teplotou.

* Prof. Ing. Jaroslav Menčík, CSc., Doc. Dr. Ing. Libor Beneš: Dopravní fakulta Jana Pernera, Univerzita Pardubice, Studentská 95; 532 10 Pardubice; e-mail: jaroslav.mencik@upce.cz; libor.benes@upce.cz

2. Ohřev

Uvedeme zde vztahy pro čtyři důležité případy, kdy je však řešení velmi jednoduché. Ve všech případech půjde o polonekonečné těleso, které má na počátku v celém objemu teplotu T_0 . Analytické vztahy jsou převzaty z monografie Lykov (1967). Poznamenejme, že i když zde budeme hovořit o ohřevu, bylo by možné vztahy pro případy 2.1, 2.2 a 2.4 užít i v případě, kdy by vyšetřované těleso bylo ochlazováno.

2.1 Náhlá změna teploty povrchu

V čase $t = 0$ se teplota povrchu změní skokem na hodnotu T_s , a je dále udržována na této hodnotě. Teploty v tělese se s časem mění podle vztahu

$$T(x, t) = T_s + (T_0 - T_s) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \quad (2)$$

kde x je hloubka pod povrchem, a je teplotní vodivost materiálu tělesa, t je čas, a $\operatorname{erf}(u)$ je tzv. chybová funkce (Gaussův integrál chyb) argumentu u , v tomto případě výrazu $u = x/[2\sqrt{(at)}]$.

2.2 Dokonalý kontakt dvou těles o různých teplotách

Polonekonečné těleso o počáteční teplotě $T_{1,0}$ je v čase $t = 0$ přivedeno do těsného kontaktu s druhým masivním tělesem, jehož počáteční teplota v celém objemu je $T_{2,0}$. (Situace se vzdáleně podobá styku zápustky se žhavým výkovkem nebo sklářské formy se sklovinou.) V tomto případě se ve styčné rovině obou těles okamžitě ustaví teplota T_s , která zůstává nadále konstantní. Tato teplota bude blíže k počáteční teplotě toho z těles, které má vyšší tepelnou akumulaci schopnost $E = \sqrt{(\lambda\rho c)}$, v souladu s relací

$$\frac{T_{1,0} - T_s}{T_s - T_{2,0}} = \frac{E_2}{E_1} = \varepsilon; \quad (3)$$

λ_i je tepelná vodivost, ρ_i je hustota a c_i je měrná tepelná kapacita materiálu i -tého tělesa ($i = 1, 2$). Úpravou vztahu (2) dostaneme teplotu styčné roviny

$$T_s = \frac{T_{1,0} + \varepsilon T_{2,0}}{1 + \varepsilon}. \quad (4)$$

Teploty pod povrchem jakéhokoliv z těles se vyvíjejí v čase opět podle vztahu (2), do něhož za T_s dosadíme teplotu (4) a za a , T_0 dosadíme jeho teplotní vodivost a počáteční teplotu.

2.3 Ohřev tělesa zdrojem o konstantním výkonu

Povrch polonekonečného tělesa (které má v celém objemu teplotu T_0) je od okamžiku $t = 0$ ohříván zdrojem o konstantním měrném tepelném toku q (Wm^{-2}). Sem patří například ohřev laserem, ale také vzájemným třením dvou těles. V posledním případě je

$$q = (Nf v) \eta / A, \quad (5)$$

kde N je normálová složka kontaktní síly, f je součinitel smykového tření, v je rychlost vzájemného smýkání, A je kontaktní ploška, a konstanta η vyjadřuje, jaká část generovaného tepla proudí do vyšetřovaného tělesa. Teplota v hloubce x a čase t je dána vztahem

$$T(x,t) = T_0 + 2q \frac{\sqrt{at}}{\lambda} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \quad (6)$$

kde $\operatorname{ierfc}(u)$ je integrál z chybové funkce $\operatorname{erfc}(u)$ v mezích $(0; \infty)$; lze jej počítat podle vztahu

$$\operatorname{ierfc}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) - u \operatorname{erfc}(u) ; \quad (7)$$

přičemž platí $\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u)$.

2.4 Nedokonalý styk tělesa s prostředím o odlišné teplotě

V čase $t = 0$ je polonekonečné těleso o konstantní teplotě T_0 ponořeno do kapalného nebo plynného prostředí o teplotě T_e , přičemž přestup tepla je řízen vztahem

$$q(t) = \alpha [T(0, t) - T_e] ; \quad (8)$$

kde α je součinitel přestupu tepla, q je hustota tepelného toku, a $T(0, t)$ je okamžitá teplota povrchu tělesa. Pro neměnnící se teplotu okolního prostředí a konstantní α je možno počítat teplotu tělesa (v povrchové vrstvě) podle vztahu [...]

$$T(x, t) = T_e + (T_0 - T_e)\Phi , \quad (9)$$

kde

$$\Phi = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(Hx + H^2 at) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + H\sqrt{at}\right), \quad H = \alpha/\lambda . \quad (10)$$

2.5 Další případy

Technicky důležitý je také případ nedokonalého kontaktu dvou těles, mezi nimiž je tenká vrstvička o součiniteli přestupu tepla α . Teploty obou těles se postupně blíží k hodnotě T_s dané vztahem (3). Příslušné analytické vztahy publikoval Menčík (1979, 1980).

Všechny uvedené úlohy lze snadno modelovat v Excelu, který má zabudované funkce $\operatorname{erf}(u)$ a $\operatorname{erfc}(u)$. Při známých materiálových konstantách, počátečních teplotách a podmínkách přestupu tepla můžeme vypočítat teplotu v tělese pro libovolný čas a (malou) hloubku, nebo sestavit jejich tabulku či graf. Obměňováním vstupních hodnot můžeme zkoumat vliv různých činitelů. Pomocí jednoduchého makra lze také vývoj teplot v čase animovat. Rovněž je možné počítat časy, při kterých teplota v určité hloubce dosáhne zvolené hodnoty.

3. Ochlazování

Předpokládáme volné chladnutí. Z předchozího ohřevu existuje v tělese rozložení teplot $T(x, 0)$; pro jednoduchost přesuneme nyní počátek odečítání času do začátku chladnutí. Teplo z povrchové vrstvy tělesa je odváděno jednak do okolí a jednak do chladnějšího vnitřku tělesa. Tok tepla do okolí je řízen rovnicí (8), a pro tok tepla uvnitř tělesa platí rovnice (1).

Protože počáteční rozložení teplot je nehomogenní, je diferenciální rovnici (1) nutno řešit numericky. V dalším popíšeme jednoduchou proceduru řešení diferenciální rovnice pro jednorozměrné neustálené vedení tepla podle knihy Steidl a kol. (1975).

V tělese vytvoříme n vrstev; první o tloušťce $\Delta x/2$, ostatní o tloušťce Δx (obr. 1). Zvolíme délku časového kroku Δt a postupně počítáme teploty ve všech vrstvách v jednotlivých

časových krocích. Teplota určité vrstvy se počítá z teplot sousedních vrstev v předchozím kroku. Vzorce pro výpočet jsou nejjednodušší, jestliže délka časového kroku je přesně rovna

$$\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{2a} \quad (11)$$

V tomto případě je teplota j -té vrstvy ($j \geq 2$) v časovém kroku $(k+1)$ dána vztahem

$$T_{j,k+1} = \frac{T_{j-1,k} + T_{j+1,k}}{2} \quad (12)$$

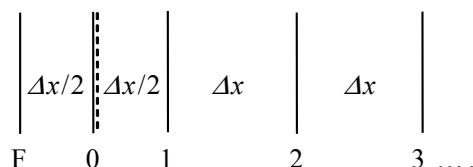
Aby bylo možno stejným způsobem počítat i teplotu první vrstvy (o tloušťce $\Delta x/2$), zavádí se ještě vně tělesa fiktivní vrstva F o tloušťce $\Delta x/2$. Na základě nahrazení konvektivního tepelného toku (8) z tělesa konduktivním tokem v této fiktivní vrstvě dostaneme teplotu fiktivní vrstvy v k -tém časovém kroku

$$T_{F,k} = \frac{N}{2}(T_e - T_{0,k}) + T_{0,k} \quad , \quad N = (\alpha/\lambda)\Delta x \quad (13)$$

kde T_e je teplota okolí a $T_{0,k}$ je teplota povrchu, a λ je tepelná vodivost materiálu tělesa (předpokládána konstantní). Potom teplotu v první vrstvě ($T_{1,k}$) dostaneme podle vztahu (11), kam za $T_{j-1,k}$ dosadíme $T_{F,k}$, a za $T_{j+1,k}$ dosadíme $T_{2,k}$. Teplotu povrchu v následujícím časovém kroku vypočítáme podle vztahu

$$T_{0,k+1} = \frac{NT_e + 2T_{1,k}}{N + 2} \quad (14)$$

Aby byla zajištěna numerická stabilita řešení, musí být $N < 2$, což při velmi intenzivním přestupu tepla (vysoké α) může znamenat omezení tloušťky vrstev Δx ; viz vztah (13).



Obr. 1 Značení vrstev v tělese. F – fiktivní rovina, 0 – povrch, 1,2,3... vrstvy pod povrchem.

Poznámka. Stejnou proceduru by šlo použít i pro řešení ohřevu, například kdyby bylo nutno uvažovat závislost materiálových parametrů nebo koeficientu α na teplotě.

K popsání numerického řešení lze použít i „všudypřítomný“ Excel (což samozřejmě nevylučuje užití jiných, účinnějších nástrojů). V tomto případě se řešení vytvoří ve formě tabulky, kde sloupce odpovídají jednotlivým vrstvám ($F, 0, 1, 2, \dots$), a řádky jednotlivým časovým krokům. První řádek (rozložení teplot v tělese na konci předchozího ohřevu) dostaneme vložením hodnot získaných analytickým řešením příslušné úlohy (viz výše). Při ohřevu tedy musí být počítány teploty pro hloubky, odpovídající tloušťkám vrstev v diferenční rovnici. Vývoj teplot v různých hloubkách je vhodné znázornit graficky. Při malých tloušťkách vrstev vycházejí časové kroky velmi krátké, a celá tabulka může obsahovat velký počet čísel. Pro zmenšení nároků na paměť lze vytvořit makro, které vždy po spuštění vygeneruje tabulku řádek po řádku, což netrvá déle než několik sekund. Potom je možné v paměti počítače uchovávat pouze tabulku obsahující první dva řádky s algoritmem řešení.

4. Praktická část

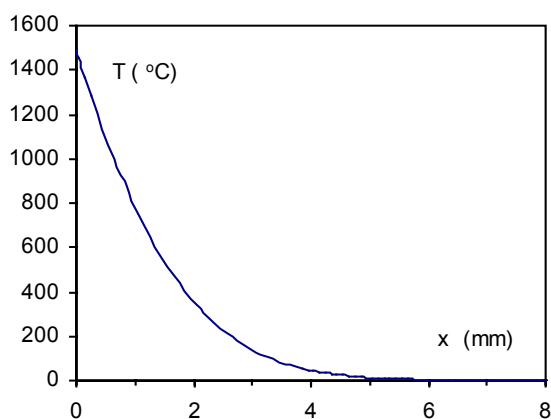
V rámci výzkumu příčin vzniku tvrdých lokálních oblastí v povrchové vrstvě železničních kol a kolejnic (tzv. white etching layers, WEL) byly vyšetřovány teploty vznikající při smýkání kola po kolejnici, např. při brzdění nebo rozjezdu (protáčení kola při stojícím vlaku) a během následujícího chladnutí. K tomuto účelu byly vytvořeny jednoduché programy v Excelu s užitím vztahů uvedených výše. Byl modelován krátkodobý ohřev povrchovým zdrojem o konstantním výkonu (případ 2.3, analytické vztahy (5) – (7)), a následující ochlazování s volným odvodem tepla z ohřáté povrchové vrstvy do chladnějšího vnitřku kola nebo kolejnice a do okolí (okrajová podmínka (8)). Zde bylo použito numerické řešení (vztahy (11) – (14)).

Sledování tvrdých oblastí (WEL) v povrchové vrstvě železničních kol a kolejnic ukázalo, že jejich tloušťka se pohybuje od několika setin do několika desetín milimetru; šířka bývá až do 10 mm. Poměr hloubky a šířky se tedy pohybuje v rozmezí 1: 100 až 1:10, což opravňuje použití jednorozměrného modelu, tím spíše, že ohřev při prokluzu trvá nanejvýš několik desetín sekundy.

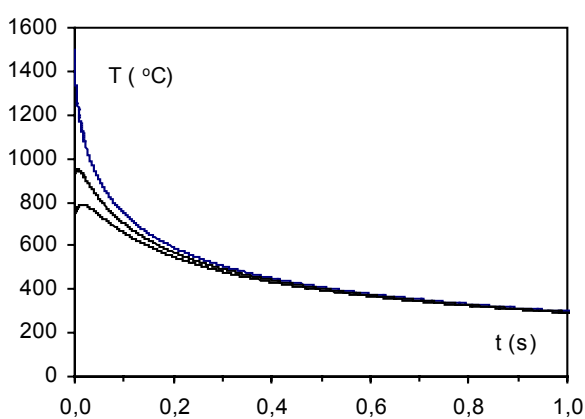
Základní parametry uvažované při výpočtech byly: $N = 100$ kN, $v = 0.7$ m/s, $f = 0.1$, $A = 1.0$ cm², $\eta = 0.5$ (50% generovaného tepla do kola a 50% do kolejnice), hustota tepelného toku do kolejnice $q = 3.5 \times 10^7$ W/m², $\lambda = 40$ WK⁻¹ m⁻¹, $\rho = 7850$ kg/m³, $c = 400$ Jkg⁻¹K⁻¹, $a = 1.27 \times 10^{-5}$ m²/s, počáteční teplota $T(x, 0) = 0^\circ\text{C}$. Materiálové parametry byly uvažovány konstantní, nezávislé na teplotě. Při následujícím chladnutí byla uvažována volná konvekce ($\alpha = 100$ Wm⁻²K⁻¹) do vzduchu o teplotě $T_e = 0^\circ\text{C}$ a vedení tepla do vnitřku kolejnice. Tloušťka vrstev v diferenční rovnici byla $\Delta x = 0.10$ mm, a časový krok $\Delta t = 3.9250 \times 10^{-4}$ s.

Vývoj teplot při ohřevu a ochlazování byl sledován pro různé intenzity a trvání ohřevu. Pro parametry uvedené výše bylo při ohřevu dosaženo austenitizační teploty (723°C) na povrchu v čase $t = 0.042$ s, a v hloubce $x = 0.25$ mm při $t = 0.069$ s. Na obrázku 2a je rozložení teplot v povrchové vrstvě při ohřevu v čase $t = 0.18$ s; povrchová teplota dosáhla přibližně 1495°C, zatímco v hloubce $x = 0.25$ mm byla 1286°C.

Obrázek 2b ukazuje časový vývoj teplot v různých hloubkách během chladnutí. Povrchová teplota klesla ze 1495°C na 748°C během 0.1 s, na 593°C v čase 0.2 s, a na 298°C za 1 s. Teplota v hloubce 0.25 mm byla pro časy delší než 0.1s téměř totožná s povrchovou teplotou.



Obr. 2a. Ohřev při prokluzu kola po kolejnici. Rozložení teplot v čase $t = 0.18$ s.



Obr. 2b. Volné chladnutí. Vývoj teplot v hloubkách 0–0.25–0.75–1.05 mm.

Výsledky je nutno považovat pouze za přibližné, protože i vstupní a materiálové parametry byly pouze odhadnuty. Přesto ukázaly, že při krátkodobém intenzivním ohřevu mohou v povrchové vrstvě vzniknout dostatečné teploty pro austenitizaci a dostatečně velký spád teplot na to, aby při následujícím volném chladnutí došlo k samozakalení materiálu odvodem tepla do vnitřku tělesa, který byl mnohem intenzivnější než odvod tepla do vzduchu. Samozřejmě je nutno zkoumat také možnost vzniku austenitu i martenzitu nebo dalších struktur v podmínkách velmi rychlého (a krátkodobého) ohřevu a ochlazování. To bude předmětem dalšího výzkumu.

6. Shrnutí

V technické praxi se často setkáváme s intenzivním krátkodobým ohřevem následovaným volným chladnutím. V příspěvku byly uvedeny vztahy pro analytické řešení jednorozměrného toku tepla při čtyřech důležitých případech krátkodobého ohřevu masivního tělesa, a vzorce pro numerické řešení následujícího volného chladnutí. Použití naznačeného postupu bylo ilustrováno na příkladu modelování teplot při vzájemném prokluzu železničního kola po kolejnici. K tomuto účelu byly vytvořeny jednoduché programy v prostředí Excel. Výpočty ukázaly, že při prokluzu mohou v povrchové vrstvě vzniknout dostatečné teploty pro austenitizaci materiálu a dostatečně velký spád teplot na to, aby při následujícím chladnutí došlo k jeho samozakalení odvodem tepla do vnitřku tělesa.

7. Poděkování

Tato práce vznikla v rámci řešení grantu GAČR č. 101/04/0033.

8. Literatura

- Lykov, A. V. (1967) *Teorija teploprovodnosti*. Vysšaja škola, Moskva.
- Menčík, J. (1979) Příspěvek k analýze přestupu tepla mezi sklovinou a formou. *Sklář a keramik*, **29**, č. 5, s. 140 – 144.
- Menčík, J. (1980) Nestacionární teplotní pole při nedokonalém styku dvou polonekonečných těles. *Strojnícky časopis*, **31**, č. 3, s. 297 - 303.
- Steidl, H., Neužil, L., Fořt, I., Vlček, J. (1975) *Úvod do proudění tekutin a sdílení tepla*. Academia, Praha.