

## ALONG WIND RANDOM VIBRATIONS OF A SLENDER STRUCTURE - MODELLING BY CONTINUOUS ELEMENTS

J. Náprstek, S. Pospíšil\*

**Summary:** *Along wind random vibration of a slender structure represents one of the most important aeroelastic effects resulting from wind - structure interaction. The theoretical model being based on one-dimensional elements with continuously distributed mass and stiffness has been introduced in this paper. The system has been considered to be self-adjoint and with strongly non-proportional viscose damping with respect to materials of individual parts of the structure and due to vibration dampers. The random excitation of the linear system is gaussian and of additive type, therefore the response is gaussian as well. Consequently, mathematical mean value and correlation function are satisfactory for the full description of the generalized solution of the respective PDE in the stochastic meaning. The stationary solution has been obtained in generalized coordinates providing transparent results and very fast convergency. Using this procedure, the general results can be obtained in the form of analytical formulae for many important cases of input spectral densities.*

### 1. Úvod

Analýza náhodného kmitání štíhlých konstrukcí byla v minulosti často zatížena řadou předpokladů, které byly mlčky přijaty, široce používány, avšak často vzdáleny realitě. Výsledky tak byly poznamenány mnoha kvalitativními i kvantitativními nedostatky. Jedním z typických nedostatků byla např. všeobecně přijímaná hypotéza o proporcionálním útlumu, která je zcela mimo realitu, jakmile se konstrukce vybaví tlumičem kmitání jakéhokoli typu. Dalším předpokladem, který je obtížné akceptovat, je nezávislost jednotlivých vlastních tvarů kmitání. Při stochastickém typu buzení je tento předpoklad splněn jen zřídka pro velmi speciální konfigurace buzení. Na druhé straně je přijat předpoklad o lineárním přenosu mezi flukтуаční složkou rychlosti větru a dynamickou složkou tlaku, který působí ve směru větru. V podmínkách vysoké zástavby není ani tento předpoklad splněn a je třeba respektovat nelineární strukturu tohoto vztahu. Tomuto efektu jsou věnovány speciální studie, viz např. Náprstek (1975), Grigoriu (1988), dále Muscolino (1995) a další.

Z výsledků měření a ze zkušeností vyplývá, že rychlost větru je veličina proměnná v prostoru i v času. V daném bodě ji v dostatečně dlouhém časovém úseku můžeme považovat za stacionární. Dá se formulovat jako součet konstantní statické složky a náhodně proměnné složky dynamické. Popisu obou těchto složek bylo věnováno v minulých desetiletích veliké množství prací. Přehled těchto poznatků je publikován v řadě monografií (Koloušek et al. 1983, Simiu & Scanlan 1996),

\* Ing. Jiří Náprstek, DrSc., Ing. Stanislav Pospíšil, PhD.

Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR; Prosecká 76, 190 00 Praha 9  
naprstek@itam.cas.cz

norem a dalších pramenů. Také dílčím problémům dynamiky konstrukcí buzených flukтуаční složkou větru byla v téže době věnována značná pozornost, a to jak na experimentální, tak na teoretické úrovni, viz např. Davenport (1967, 1967a), Dyrbye & Hansen (1996), Fischer & Pirner (1986). Zdá se však, že stále chybí určitý systematický pohled na tento problém jako celek, který by se pokusil oprostít od fenomenologického přístupu vycházejícího z okamžité potřeby vyřešit problém konkrétní konstrukce a zasadil tuto důležitou úlohu do celkového kontextu stochastické dynamiky.

Řešení je možné založit na různých typech matematického modelu konstrukce. Dá se říci, že v úvahu přicházejí dvě skupiny modelů, i když existuje řada jejich dalších variant. První z nich je model založený na diskretizaci konstrukce na soustavu diskretních hmot spojených pružnými a disipativními členy, případně založený na diskretizaci metodou konečných prvků. Matematicky je tedy popsán soustavou obyčejných diferenciálních rovnic v času, viz Náprstek & Pospíšil (2006). Druhým typem jsou modely, které vycházejí ze spojité povahy hlavních prvků konstrukce a jsou tudíž popsány parciálními diferenciálními rovnicemi. Každý z těchto dvou modelů má jisté přednosti z hlediska možností fyzikální interpretace výsledků. Jejich přímé porovnávání tedy nemá smysl. Finální numerické výsledky však poskytují oba stejné. V této studii budeme pracovat s modelem, který se skládá z jednorozměrných prvků se spojitě rozloženou hmotou.

## 2. Účinek obecného dynamického zatížení

Podmínky, ve kterých jsou umístěny různé typy štíhlých konstrukcí s kruhovým průřezem určených pro telekomunikační účely, většinou umožňují při analýze kmitání konstrukce ve směru větru pracovat s lineárním modelem. Je-li základem modelu prvek se spojitě rozloženou hmotou, vyjdeme ze známé pohybové rovnice přímého prutu se statickou podélnou silou:

$$(EJ(x)u''(x, t))'' + (N(x)u'(x, t))' + 2b(x) \dot{u}(x, t) + \mu(x) \ddot{u}(x, t) = p(x, t) \quad (1)$$

$EJ(x), N(x)$  - ohybová tuhost, resp. podélná statická síla působící v těžišti průřezu

$b(x), \mu(x)$  - viskozní útlum, resp. hmotnost na jednotku délky

$p(x, t)$  - vnější zatížení na jednotku délky

Soustředíme-li se na závěr zdlouhavějších úvah, můžeme řešení rovnice (1) psát ve tvaru:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^n u_j(x) \cdot f_j(\theta_j t); \quad n \rightarrow \infty \quad (2)$$

kde  $u_j(x), \theta_j$  jsou vlastní funkce, resp. vlastní čísla operátoru  $\mathbf{L}\{\cdot\}$  vzhledem k  $\mu(x)$  plynoucí z rovnice:

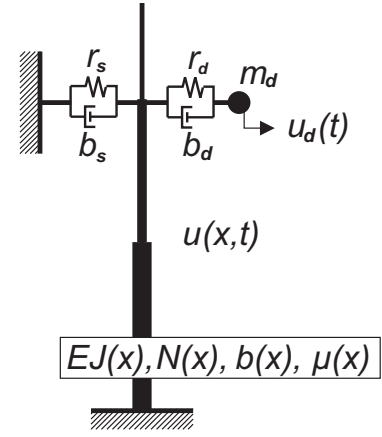
$$\mathbf{L}\{u_j(x)\} + \theta_j^2 \mu(x) \cdot u_j(x) = 0; \quad \mathbf{L}\{u(x)\} \equiv (EJ(x)u''(x))'' + (N(x)u'(x))' \quad (3)$$

s okrajovými podmínkami:

$$\text{- vrchol konstrukce: } u_j''(l) = 0; \quad (EJ(x)u_j''(x))' + N(x)u_j'(x) \Big|_{x=l} = 0 \quad (4)$$

$$\text{- pata konstrukce: } u_j(0) = u_j'(0) = 0; \quad \text{resp. } u_j(0) = u_j''(0) = 0 \quad (5)$$

Okrajové podmínky se formulují obvyklým způsobem pro volný, vetknutý či kloubový okraj prutu. Konfigurace okrajových podmínek ani skladba parametrů konstrukce nikdy nevyžadují v reálném případě zvláštní pozornost z hlediska existence jednoznačného řešení. Vystačíme-li s modelem podle rovnice (1), můžeme touto rovnicí popsat chování konstrukce o libovolné topologické struktuře, pokud je kinematicky určitá a upevněná bez možnosti pohybu jakožto tuhého tělesa. V uzlech konstrukce, resp. bodech nespojitosti koeficientů musí být zajištěna spojitost základních veličin (v daném případě posuvu a pootočení) a rovnováha silových veličin (ohybových momentů a posouvajících sil), abychom se dopracovali jednoznačného řešení.



Obrázek 1: Matematický model soustavy

Existence diskrétního spektra vlastních čísel  $\theta_j$  je zajištěna pozitivní definitností operátoru  $\mathbf{L}\{\cdot\}$ . Ke každému vlastnímu číslu  $\theta_j$  existuje za daných podmínek jediná vlastní funkce  $u_j(x)$ . Funkce  $u_j(x)$  jsou ortogonální vzhledem k symetrii operátoru, tvoří úplnou soustavu a jsou spojitě. Apriori splňují všechny okrajové podmínky. Operátor  $\mathbf{L}\{\cdot\}$  vzhledem k  $\mu(x)$  je podobný operátoru původní rovnice (1). Dá se dokázat, že soustava vlastních funkcí  $u_j(x)$  operátoru  $\mathbf{L}\{\cdot\}$  se dá použít jako galerkinovská báze pro variační řešení rovnice (1), viz např. (Michlin, 1975), neboť splňuje a priori nejen hlavní, ale i přirozené okrajové podmínky. Použití takové báze umožňuje předem vyloučit některé problémy numerické nestability. Takto lze na příklad dosáhnout bodové konvergence při  $n \rightarrow \infty$  místo pouhé konvergence v průměru, která je nedostatečná z hlediska inženýrských aplikací. Podrobnější vlastnosti konvergence závisí na míře podobnosti obou operátorů, čemuž by bylo vhodné věnovat samostatnou studii. Nicméně operátor (2) zachovává detailně tuhosti a hmotnosti podle rovnice (1) včetně nespojitostí v uzlech. Tato míra podobnosti vede k absolutní konvergenci v jednotlivých bodech soustavy pro jakékoli vnější buzení integrovatelné v čase a v prostoru.

Rozvoj (2) dosadíme do (1), vynásobíme  $u_k(x)$  a integrujeme po celé konstrukci. Vzhledem k předpokládané nespojitosti koeficientů v rovnici (1) chápeme tuto integraci ve Stieltjesově smyslu:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_S u_k(x) \mathbf{L}\{u_j(x)\} f_j(t) dx + \int_S u_k(x) [2b(x)u_j(x)\dot{f}_j(t) + \mu u_j(x)\ddot{f}_j(t)] dx \right\} = \int_S p(x,t)u_k(x) dx \quad (6)$$

Z rovnice (2) s přihlédnutím k okrajovým podmínkám (4), (5) vyplývá:

$$\int_S u_{ko}(x) \mathbf{L}\{u_{jo}(x)\} dx = \begin{cases} 0 \\ \theta_j^2 \end{cases}; \quad \int_S \mu(x)u_{ko}(x)u_{jo}(x) dx = \begin{cases} 0; & j \neq k \\ 1; & j = k \end{cases} \quad (7)$$

kde  $u_{jo}(x)$  jsou normalisované vlastní funkce ve smyslu:

$$\mathbf{u}_o(x) = [u_{jo}(x)] = [u_j(x)/\sqrt{M_j}]; \quad M_j = \int_S \mu(x)u_j^2(x) dx \quad (8)$$

S odvoláním na (7), (8) dostaneme úpravou rovnice (6):

$$\Theta^2 \cdot \mathbf{f}(t) + 2\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{f}}(t) + \mathbf{I} \cdot \ddot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (9)$$

$$\Theta^2 = \text{diag}[\theta_1^2, \dots, \theta_n^2]; \quad \mathbf{f}(t) = [f_1(t), \dots, f_n(t)]^T; \quad \mathbf{I} - \text{jednotková čtvercová matice} \\ \mathbf{B} = \left[ \int_S b(x) u_{ko}(x) u_{jo}(x) dx \right]; \quad \mathbf{p}(t) = \left[ \int_S p(x, t) u_{ko}(x) dx \right]; \quad j, k = 1, \dots, n \quad (10)$$

Pohyb spojitě soustavy je nyní popsán v zobecněných souřadnicích, které tvoří ortonormované vlastní funkce  $u_{jo}(x)$  operátoru (2). Vlastní funkce  $u_{jo}(x)$  i vlastní čísla  $\theta_k$  jsou reálná. Odpovídají vlastnímu kmitání netlumené soustavy a dají se bez potíží určit například deformační metodou.

Z tvaru rovnice (9) je zřetelné, že spolupůsobení funkcí  $u_{jo}(x)$  při stanovení vlastních tvarů původní soustavy (1), anebo při analýze odezvy na vnější buzení, je dáno neproporcionálním útlumem, který vede k plně čtvercové matici  $\mathbf{B}$ . Z proporcionálního útlumu by vyplývala diagonální matice  $\mathbf{B}$ , a tudíž funkce  $u_{jo}(x)$ , resp.  $f_j(t)$  by se chovaly nezávisle a daly by se považovat přímo za vlastní tvary původní soustavy, resp. za časový popis jejich uplatnění. Na základě matice  $\mathbf{B}$ , resp. rychlosti zániku mimodiagonálních členů se vzdáleností od hlavní diagonály lze tedy přibližně posuzovat oprávněnost zanedbání neproporcionality útlumu v případě, že konstrukce je podrobena deterministickému buzení. Je však třeba si uvědomit, že v případě náhodného buzení je obecně dalším možným zdrojem spolupůsobení funkcí  $u_{jo}(x)$ , popř. vlastních tvarů jejich stochastická interakce, která vyplývá z prostorové korelace vnějšího buzení. Z toho důvodu je třeba soustavu (9) analyzovat v plné šíři.

Soustavu (9) přepíšeme v normálním tvaru:

$$\dot{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}(t) + \mathbf{P}(t) \quad (11)$$

kde jsme označili:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(t) \\ \mathbf{f}_2(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}_1(t) = \mathbf{f}(t); \quad \mathbf{f}_2(t) = \dot{\mathbf{f}}(t); \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & ; & \mathbf{I} \\ \Theta^2 & ; & 2\mathbf{B} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}(t) = \mathbf{H}\mathbf{p}(t); \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (12)$$

přičemž  $\mathbf{p}(t)$  je vektor  $n$  nezávislých náhodných procesů působících na jednotlivé souřadnice  $u_{jo}(x)$  podle (2), resp. (8).

### 3. Řešení náhodné odezvy metodou spektrálních rozkladů

Vstupní i výstupní procesy jsou v našem případě spojitě. Dá se dokázat, že je možné je psát ve tvaru, který je založen na spektrálních diferenciálech vstupních procesů:

$$\mathbf{p}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\Phi(\omega); \quad \mathbf{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}^*(\omega, t) d\Phi(\omega) \quad (13)$$

$d\Phi(\omega)$  - vektor ( $n$  prvků) spektrálních diferenciálů procesů  $\mathbf{p}(t)$ ;  $d\Phi_j(\omega)$  jsou procesy v proměnné  $\omega$  typu bílého šumu; jejich korelace se řídí Wiener-Chinčinovým vztahem, viz např. Bolotin (1979):

$$\mathbf{E}\{d\Phi(\omega) \cdot \overline{d\Phi^T(\omega')}\} = \delta(\omega' - \omega) \mathbf{S}_p(\omega) d\omega d\omega' \quad (14)$$

$\mathbf{E}\{\cdot\}$  - operátor matematického středu podle gaussovské hustoty pravděpodobnosti;

$\delta(\cdot)$  - Diracova funkce;

$\mathbf{F}^*(\omega, t)$  - matice ( $2n \times n$  prvků) neznámých deterministických funkcí, které popisují transformaci náhodného buzení v zobecněných souřadnicích do složek náhodné odezvy v čase.

$\mathbf{S}_p(\omega)$  - matice ( $n \times n$ ) spektrálních hustot procesů  $\mathbf{p}(t)$ .

Výrazy (13) dosadíme do výrazů (12) a do soustavy (11). Vzniklou relaci vynásobíme vektorem  $d\Phi^T(\omega)$  zprava a potom uplatníme operátor matematického středu. Vstupní procesy  $\mathbf{p}(t)$  jsou spojité a spektrální diferenciály  $d\Phi(\omega)$  libovolné, nezávislé a nenulové skoro všude. Můžeme tedy zaměnit pořadí aplikace operátoru integrace a matematického středu. Odtud plyne:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\dot{\mathbf{F}}^*(\omega, t) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^*(\omega, t)) \cdot \mathbf{S}_p(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 2\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_p(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (15)$$

Relace (15) musí být splněna pro každé  $t$ . To je možné s ohledem na to, že matice  $\mathbf{S}_p(\omega)$  je pozitivně definitní pouze tehdy, když platí:

$$\dot{\mathbf{F}}^*(\omega, t) = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^*(\omega, t) + 2\mathbf{H} \cdot \exp(i\omega t) \quad (16)$$

s počátečními podmínkami:

$$\mathbf{F}^*(\omega, t)|_{t=0} = 0 \quad (17)$$

Formulace odezvy ve tvaru (13) má jednoduchou fyzikální interpretaci. Náhodnou odezvu  $\mathbf{F}(t)$  podle (11) lze chápat jako superpozici odezvy na elementární harmonická buzení popsána vždy funkcí  $\exp(i\omega t)$  a násobená amplitudou, která je dána náhodným koeficientem  $d\Phi_j(\omega)$ . Náhodná část řešení je tedy součtem, resp. integrálem všech řešení platných pro jednotlivá  $\omega$  v (13). Vyřešíme-li tedy soustavu (16) pro jednotková  $d\Phi_j(\omega)$ , získáme matici  $\mathbf{F}^*(t)$ , kde  $j$ -tý sloupec znamená odezvu na jednotkové buzení v  $j$ -té zobecněné souřadnici. Řešení účinku náhodné části buzení je tedy založeno na znalosti jisté zobecněné frekvenční charakteristiky. V praktickém případě se dá předpokládat, že soustava (1), resp. (4) jakožto mechanický systém bude vždy stabilní, a proto po odeznění počáteční přechodové fáze dostane  $\mathbf{F}^*(\omega, t)$  význam běžné přenosové matice.

Řešení rovnice (16) naznačíme ve tvaru Laplaceova obrazu ( $t \rightarrow \xi$ ). Podle předpokladu je matice  $(\mathbf{Q} + \mathbf{I} \cdot \xi)$  regulární a existuje tedy její inverzní matice. Pokud matice  $\mathbf{Q}$  má pouze jednoduchá vlastní čísla, výraz lze dále upravit ve tvaru sumace:

$$\mathbf{F}_L^*(\omega, \xi) = (\mathbf{Q} + \mathbf{I} \cdot \xi)^{-1} \frac{2\mathbf{H}}{\xi - i\omega} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\mathbf{Z}_k \mathbf{H}}{i\omega - \xi_k} \left( \frac{1}{\xi - i\omega} - \frac{1}{\xi - \xi_k} \right) \quad (18)$$

$\mathbf{Z}_k$  -  $k$ -tá komponentní matice ( $2n \times 2n$ ), viz např. Lancaster (1969); pokud matice  $\mathbf{Q}$  má  $2n$  jednoduchých vlastních čísel, matice  $\mathbf{Z}_k$  se dá vyjádřit ve tvaru diadického součinu:

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{q}_k \cdot \overline{\mathbf{q}_k^T} \quad (19)$$

$\mathbf{q}_k$  -  $k$ -tý normalizovaný vlastní vektor ( $2n$  prvků) matice  $\mathbf{Q}$ ;

$\xi_k$  -  $k$ -té vlastní číslo matice  $\mathbf{Q}$ ; podle předpokladu jsou všechna vlastní čísla jednoduchá; matice  $\mathbf{B}$  je symetrická, matice  $\mathbf{\Theta}, \mathbf{I}$  jsou diagonální, odtud plyne, že vlastní čísla tvoří  $n$  komplexně sdružených dvojic  $\xi_{2k} = \overline{\xi_{2k+1}}$  ( $k = 1, n$ ); dá se dokázat, že z pozitivní definitnosti těchto matic zároveň plyne negativní hodnota reálné části všech vlastních čísel a tudíž dynamická stabilita soustavy (1). Při malém útlumu jsou hodnoty  $|\xi_k|$  blízké hodnotám  $|\theta_k|$ .

Zpětnou transformací výrazu (18) dostaneme řešení rovnice (16):

$$\mathbf{F}^*(\omega, t) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\mathbf{Z}_k\mathbf{H}}{i\omega - \xi_k} (\exp(i\omega t) - \exp(\xi_k t)) \quad (20)$$

Korelační matice odezvy, tj. čtvercová matice  $\mathbf{K}_F(t_1, t_2)$  o rozměrech  $(2n \times 2n)$  se dá získat přímo z definice použitím  $\mathbf{F}(\omega, t)$ , viz např. Bolotin (1979). Ze stejných důvodů jako prve můžeme zaměnit pořadí aplikace operátoru integrace a operátoru matematického středu. Přihlédneme-li k tomu, že  $\mathbf{u}(t)$  jsou centrované procesy, můžeme psát:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_F(t_1, t_2) &= \mathbf{E}\{\mathbf{F}(t_1)\overline{\mathbf{F}^T(t_2)}\} = \mathbf{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}^*(\omega_1, t_1) d\Phi(\omega_1) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{d\Phi^T(\omega_2)} \mathbf{F}^{*T}(\omega_2, t_2)\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}^*(\omega, t_1) \mathbf{S}_p(\omega) \overline{\mathbf{F}^{*T}(\omega, t_2)} d\omega \end{aligned} \quad (21)$$

Spolu s nulovým matematickým středem se výraz (21) dá považovat za zobecněné řešení rovnice (11) ve stochastickém smyslu. Ze struktury výrazu (20) je zřejmé, že první sčítanec popisuje stacionární část odezvy, zatímco druhý sčítanec vliv přechodového děje, který nastane po zahájení buzení vlivem homogenních počátečních podmínek. Vzhledem k negativní reálné části vlastních čísel druhý sčítanec s rostoucím časem postupně zanikne. To znamená, že pokud se zabýváme pouze stacionárním stavem, můžeme druhý sčítanec ve vzorci (20) pominout. To nám umožní detailní zápis výrazu (21), který je v tomto případě funkcí pouze rozdílu  $t = t_1 - t_2$  a nikoli obou časových souřadnic samostatně:

$$\mathbf{K}_F(t) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{2n} \exp(i\omega t) \frac{\mathbf{Z}_k\mathbf{H}\mathbf{S}_p(\omega)\overline{\mathbf{H}^T\mathbf{Z}_l^T}}{(i\omega - \xi_k)(-i\omega - \overline{\xi_l})} d\omega \quad (22)$$

z čehož okamžitě vyplývá matice disperzí:

$$\mathbf{K}_F(0) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{2n} \frac{\mathbf{Z}_k\mathbf{H}\mathbf{S}_p(\omega)\overline{\mathbf{H}^T\mathbf{Z}_l^T}}{(i\omega - \xi_k)(-i\omega - \overline{\xi_l})} d\omega \quad (23)$$

kteřá se obvykle pokládá (zejména její diagonála, resp. odmocniny jejích prvků) za směrodatný údaj o rozsahu odezvy na náhodné buzení lineární soustavy gaussovskými procesy.

Vzorce (21)-(23) mají poměrně širokou použitelnost. Matici  $\mathbf{F}^*(\omega, t)$  lze získat nejen analyticky, viz (20), ale i numericky nebo experimentálně. To do jisté míry předurčuje metodu provedení naznačené integrace podle  $\omega$ . Je možné ji dovést do konce ve formě vzorců v uzavřeném tvaru pro řadu jednodušších případů spektrálních hustot buzení. To je např. tehdy, když spektrální hustoty  $\mathbf{S}_p(\omega)$  je možné vyjádřit ve tvaru rýze lomené racionální funkce a integraci

provést pomocí reziduové věty. Při vyčíslení integrálu lze tedy různým způsobem kombinovat analytické a numerické postupy v závislosti na struktuře zadání. Doplňme ještě, že integrál v (21)-(23) je možné chápat v Stieltjesově smyslu, čímž lze obsloužit i různé kombinace spojitých spekter a výrazných diskrétních harmonických složek s pevně určenou frekvencí a amplitudou.

Povšimněme si jednoho detailu. Pokud by procesy  $\mathbf{v}_d(t)$  měly charakter nezávislých bílých šumů bez vzájemné korelace, bude matice  $\mathbf{S}_p(\omega)$  konstantní a diagonální, viz závěr 4. kapitoly, výraz (37). V takovém případě s přihlédnutím k (19) můžeme psát ( $\mathbf{H}_s = \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_v^{1/2}$ ):

$$\mathbf{Z}_k \mathbf{H} \mathbf{S}_p(\omega) \overline{\mathbf{H}^T \mathbf{Z}_l^T} = \mathbf{u}_k \cdot \overline{\mathbf{u}_k^T} \mathbf{H} \mathbf{S}_p \mathbf{H}^T \mathbf{u}_l \cdot \overline{\mathbf{u}_l^T} = \mathbf{H}_s^T \overline{\mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k^T \cdot \overline{\mathbf{u}_l} \mathbf{u}_l^T \mathbf{H}_s \quad (24)$$

Vzhledem k tomu, že vlastní vektory jsou ortonormální, dostaneme po úpravě:

$$\mathbf{Z}_k \mathbf{H} \mathbf{S}_p(\omega) \overline{\mathbf{H}^T \mathbf{Z}_l^T} = \begin{cases} 0; & k \neq l \\ \mathbf{H}_s^T \overline{\mathbf{Z}_k} \mathbf{H}_s; & k = l \end{cases} \quad (25)$$

V takovém případě by dvojitá sumace v (22) degenerovala na jednoduchou. Tento stav odpovídá nekorelovaným pravým stranám v původní soustavě (1), resp. (4). V obecném případě však matice  $\mathbf{S}_p(\omega)$  není diagonální a vzájemná korelace vlastních vektorů není zanedbatelná. Je však zjevné, že rychle klesá s rozdílem  $(k - l)$ .

Vraťme se nyní k výrazům (2), (8), (10). Vzhledem ke gaussovské povaze odezvy popisuje stochastickou část odezvy korelační funkce:

$$K_u(x_1, x_2, t_1, t_2) = \mathbf{E} \left\{ u(x_1, t_1) \overline{u(x_2, t_2)} \right\}$$

Vzhledem k (2) a (8) můžeme psát:

$$K_u(x_1, x_2, t_1, t_2) = \sum_{ij=1}^n u_{io}(x_1) \overline{u_{jo}(x_2)} \mathbf{E} \left\{ f_i(\theta_i t_1) \overline{f_j(\theta_j t_2)} \right\} = \mathbf{u}_o^T(x_1) \mathbf{K}_{f11}(t_1, t_2) \overline{\mathbf{u}_o(x_2)} \quad (26)$$

přičemž  $\mathbf{K}_{f11}(t_1, t_2)$  je matice  $(n \times n)$  vzájemných korelačních funkcí časových složek  $\mathbf{f}_1(t) = [f_i(\theta_i t)]$ , viz (12), příslušejících vlastním funkcím  $u_{io}(x)$ . Opět s přihlédnutím k (12) můžeme dále říci, že  $\mathbf{K}_{f11}(t_1, t_2)$  je levá horní čtvrtina matice  $\mathbf{K}_F(t_1, t_2)$  podle (21), jak odpovídá schématu:

$$\mathbf{K}_F(t_1, t_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{K}_{f11}(t_1, t_2); & \mathbf{K}_{f12}(t_1, t_2) \\ \mathbf{K}_{f21}(t_1, t_2); & \mathbf{K}_{f22}(t_1, t_2) \end{vmatrix} \quad (27)$$

Podobně submatici  $\mathbf{K}_{f22}(t_1, t_2)$  odpovídají korelace rychlostí  $\mathbf{f}_2(t)$ , atd. Pro stacionární případ k (26) přiřadíme (22), popř. (23):

$$K_u(x_1, x_2, t) = \mathbf{u}_o^T(x_1) \mathbf{K}_{f11}(t) \overline{\mathbf{u}_o(x_2)} \quad (26)$$

Výraz (26), resp. (28) převádí vzájemné korelace složek pohybu v zobecněných souřadnicích  $\mathbf{u}_o(x)$  na korelace v podélné souřadnici konstrukce.

#### 4. Účinky flukтуаční složky rychlosti větru

Matici  $\mathbf{S}_p(\omega)$ , která v (21) až (23) reprezentuje vnější náhodné buzení, sestrojíme s využitím předpokladu o stacionární povaze fluktuací tlaku  $p(x, t)$  na základě posledního z výrazů (10):

$$\mathbf{K}_p(t) = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{p}(\tau) \overline{\mathbf{p}^T(\tau + t)} \right\} = \mathbf{E} \left\{ \int_S \mathbf{u}_o(x_1) p(x_1, t) dx_1 \int_S \overline{\mathbf{u}_o^T(x_2) p(x_2, t + \tau)} dx_2 \right\} \quad (29)$$

Dvojitá integrace se dá v daném případě přepsat ve tvaru dvojného integrálu. S ohledem na lineární povahu jsou operátory integrace a matematického středu záměnné. Z toho vyplývá:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p(t) &= \int_S \int_S \mathbf{u}_o(x_1) \overline{\mathbf{u}_o^T(x_2)} \mathbf{E} \left\{ p(x_1, \tau) \overline{p(x_2, \tau + t)} \right\} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_S \int_S \mathbf{u}_o(x_1) \overline{\mathbf{u}_o^T(x_2)} K_{px}(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (30)$$

kde jsme označili:  $K_{px}(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{E} \left\{ p(x_1, \tau) \overline{p(x_2, \tau + t)} \right\}$ , to jest vzájemnou korelaci flukтуаční složky tlaku v bodech  $x_1, x_2$  závislou na časovém rozdílu  $t$ .

Fourierovou transformací relace (30) dostaneme:

$$\mathbf{S}_p(\omega) = \int_S \int_S \mathbf{u}_o(x_1) \overline{\mathbf{u}_o^T(x_2)} S_{px}(x_1, x_2, \omega) dx_1 dx_2 \quad (31)$$

Spektrální hustota  $S_{px}(x_1, x_2, \omega)$  popisuje skladbu fluktuací tlaku vyvolaných fluktuací rychlosti proudu vzduchu, přičemž myslíme pouze složku tlaku ve směru proudu, nikoli účinky působící kolmo k němu. Rychlost proudu je funkcí výšky nad terénem  $x$ . Do převodu z rychlosti na tlak vstupuje geometrie konstrukce a její aerodynamické charakteristiky, které jsou rovněž funkcí  $x$ . Přijímáme předpoklad, že konstrukce neovlivňuje zpětně proudové poměry ve svém okolí. Přenos mezi fluktuacemi rychlosti proudu a tlaku pokládáme za lineární, neboli dynamická složka tlaku je popsána pouze první mocninou rychlosti proudu a zanedbáváme vliv kvadratického účinku fluktuací rychlosti. Přibližně tedy můžeme tlak ve směru proudu na jednotku délky štíhlé konstrukce vyjádřit takto:

$$p(x, t) = 2\kappa(x)v_s(x)v_d(x, t) \quad (32)$$

$\kappa(x)$  - funkce polohy  $x$  nad terénem; zahrnuje vliv geometrie a aerodynamických vlastností průřezu, měrnou hmotnost vzduchu, atd.;

$v_s(x), v_d(x, t)$  - statická, resp. dynamická složka rychlosti proudu;  $v_s(x)$  je rychlostní gradient popisovaný v literatuře a zařazený do mnoha norem a dalších standardů.

Dynamická složka  $v_d(x, t)$  se pokládá za stacionární a je zpravidla prezentována formou výkonové spektrální hustoty tlaku při jednotkových parametrech  $\kappa(x), v_s(x)$ . Takto definovaná referenční spektrální hustota rychlosti proudu  $S_v(\omega)$  je nezávislá na  $x$ . Spektrální hustota v konkrétních podmínkách se stanoví přenásobením  $S_v(\omega)$  v souladu se vzorcem (32). Referenční spektrální hustota se zavádí podle různých autorů, nejčastěji podle Davenporta (1967a). Prostorová povaha fluktuací tlaku se zavádí přenásobením výkonové spektrální hustoty korelační funkcí  $K_r(x_1, x_2, \omega)$ , viz např. Davenport (1967), Koloušek et al. (1983, Dyrbye & Hansen (1996) a další. Závislostí na  $\omega$  se vyjadřuje klesající prostorová korelace fluktuací tlaku se



vzrůstající frekvencí. Matematicky není tento výraz zcela korektní, zavádí se až v závěru, kdy píšeme  $S_{px}(x_1, x_2, \omega)$  ve tvaru:

$$S_{px}(x_1, x_2, \omega) = \beta(x_1, x_2)K_v(x_1, x_2, \omega)S_v(\omega); \quad \beta(x_1, x_2) = 4\beta_0\kappa(x_1)v_s(x_1)\kappa(x_2)v_s(x_2) \quad (33)$$

Všechny výrazy na pravé straně (33) můžeme pokládat za známé, a tudíž  $S_{px}(x_1, x_2, \omega)$  podle (33) dosadit do (31), čímž získáme popis náhodného buzení v zobecněných souřadnicích  $u_{ko}$ . Je však třeba zdůraznit, že popsaná struktura náhodného buzení vyplývá bezprostředně z experimentálních měření a není výsledkem exaktní analýzy.

Rozsáhlá a dlouhodobá měření in situ, experimenty v laboratořích a různé teoretické úvahy vedly k všeobecně přijaté struktuře popisu flukтуаční složky rychlosti větru. Proces  $v_d(t)$  se zavádí jako nezávislý na prostorových souřadnicích. Do všech bodů  $x$  se vkládá proces se stejnými charakteristikami popsaný jedním vzorcem pro skalární spektrální hustotu. Pro spektrální hustotu flukтуаční složky větru je publikováno mnoho empirických vzorců. Nejlépe se osvědčila a do praxe pronikla Davenportova spektrální hustota, viz Davenport (1967a) a mnoho dalších prací, monografií, standardů a dalších publikací:

$$S_v(\omega) = \frac{\alpha_0|\omega|}{(a^2 + \omega^2)^{4/3}} \quad (34)$$

Prostorová povaha tohoto procesu se obvykle charakterizuje prostřednictvím korelační funkce, viz např. Davenport (1967) a řada dalších autorů:

$$K_v(x_1, x_2, \omega) = \beta(x_1, x_2) \exp(-\lambda|\omega||x_1 - x_2|) \quad (35)$$

Ve vzorcích (34), (35) jsou zavedeny rozměrové konstanty  $\alpha_0$ ,  $a$ ,  $\lambda$ . Jsou stanoveny experimentálně a upravují se zvlášť pro každou lokalitu. Představu o jejich povaze si lze učinit na základě literatury, např. Koloušek et al. (1983), Dyrbye & Hansen (1996) a další. Zabývají se jimi i některé normy. Zhruba se dají charakterizovat takto:

$\alpha_0$ - shrnuje koeficienty, které upravují vzorec s ohledem na náhodnou dynamickou povahu procesu a jeho ne zcela stacionární charakter;

$a^2$ - rozměrově frekvence; upravuje tvar spektrální hustoty a vyvažuje podíl nižšího a vyššího frekvenčního pásma;

$\lambda$ - upravuje míru prostorové korelace.

Proces  $v_d(x, t)$  je podle (34), (35) charakterizován jako prostorově homogenní. Vzájemná korelace klesá pro danou vzdálenost bodů exponenciálně s rostoucí frekvencí. Výsledná spektrální hustota  $S_{px}(x_1, x_2, \omega)$  je však prostorově nehomogenní vlivem závislosti  $\kappa(x)$ ,  $v_s(x)$  na podélné souřadnici  $x$ .

Dosazením (35) do výrazu (33) dostaneme:

$$S_{px}(x_1, x_2, \omega) = \beta(x_1, x_2) \cdot \exp(-\lambda|\omega||x_1 - x_2|) \cdot \frac{\alpha_0|\omega|}{(a^2 + \omega^2)^{4/3}} \quad (36)$$

Doplňme poznámku (24), (25). Pokud procesy  $v_d(x, t)$  nebudou prostorově korelovány, bude se funkce  $K_v(x_1, x_2, \omega)$  chovat tak, jako bychom zavedli limitu  $\omega \rightarrow \infty$ . To znamená, že

exponenciála v (35) má hodnotu jedna na diagonále  $x_1 = x_2$  a všude jinde je nulová. Z téhož důvodu je nenulové také  $S_{px}(x_1, x_2, \omega)$  pouze pro  $x_1 = x_2$ . Dvojný integrál v (32) degeneruje na jednoduchý. Pokud by závislost spektrální hustoty na  $x$  zmizela úplně, jak by odpovídalo bílým šumům, uplatní se ortogonalita vlastních funkcí  $\mathbf{u}_o(x)$  a matice  $\mathbf{S}_p(\omega)$  se stane diagonální. Z provedené úvahy je cítit, že tato situace, která by vedla na stochastickou nezávislost vlastních funkcí, není ve skutečnosti příliš pravděpodobná. Klade si příliš mnoho podmínek, které jsou v praxi obtížně přijatelné i při značném zjednodušení.

## 5. Výpočet korelační funkce odezvy

Na základě dílčích výsledků z předchozích kapitol nyní krátce shrňme postup výpočtu hlavní charakteristiky náhodné části odezvy. Je popsána korelační funkcí podle vzorce (26), resp. (28). Abychom ji vyčíslili, musíme stanovit korelační funkci  $\mathbf{K}_F(t)$ , resp. její čtvrtinu  $\mathbf{K}_{f11}(t)$ . K této matici, která charakterizuje vzájemnou korelaci pohybu v zobecněných souřadnicích, se dostaneme použitím vzorce (22), popř. (23). Potřebnou matici spektrálních hustot  $\mathbf{S}_p(\omega)$  získáme ze vzorce (31), kam za spektrální hustotu  $S_{px}(x_1, x_2, \omega)$  dosadíme podle (36). Pokud jsou tedy dány konstanty popisující spektrální hustotu a prostorovou korelaci buzení a parametry konstrukce, můžeme vyčíslit korelační funkci odezvy jakožto funkci času a polohy na konstrukci, případně vzájemnou korelaci ve dvou bodech na svislé ose konstrukce.

Operace integrací podle  $x_1, x_2, \omega$  a sumací podle  $k, l$  můžeme v daném případě zaměnit. Práci s vyčíslením můžeme značně zjednodušit, provedeme-li jako první integraci podle  $\omega$ . Podkladem pro další kroky je stanovení integrálu:

$$I_{kl}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(x_1, x_2)}{(\omega + i\xi_k)(\omega - i\xi_l)} \frac{\alpha_0|\omega| \exp(-\lambda|\omega||\Delta x|)}{(a^2 + \omega^2)^{4/3}} d\omega ; \quad \Delta x = x_1 - x_2 \quad (37)$$

Jeden z činitelů ve jmenovateli integrandu (37) má racionální exponent, což je jistá komplikace pro další výpočet. Celočíslný exponent u zbývajících dvojitých členů ve jmenovateli by umožnil integraci v uzavřeném tvaru pomocí reziduové věty. Přibližně však můžeme takto postupovat i v tomto případě. Čítec je v Gaussově rovině rotačně symetrický podle počátku, je bez nulových a nevlastních bodů a exponenciálně se blíží k nule pro  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Vzhledem k tvaru jmenovatele se integrand pro rostoucí  $|\omega|$  blíží dostatečně rychle k nule. Z toho vyplývá, že integrál (37) je přibližně roven  $2\pi i$  násobku součtu reziduí nad reálnou osou, anebo pod osou, jak vyplývá z vlastností integrandu.

Integrand (37) má nad reálnou osou  $\omega$  dva singulární body:

$$\omega_1 = i\bar{\xi}_l ; \quad \omega_3 = ia \quad (38)$$

Chování výrazu (34) v okolí singulárního bodu  $\omega = ia$  je možné vystihnout přibližným vztahem:

$$S_v(\omega) = \frac{\alpha_0|\omega|}{(a^2 + \omega^2)^{4/3}} \approx \frac{\alpha_1|\omega|}{(a^2 + \omega^2)} \quad (39)$$

kde  $\alpha_1$  je konstanta volená tak, aby racionální funkce co nejlépe vystihovala průběh původní funkce (34) v okolí singulárního bodu. Stanoví se např. z rovnosti integrálů na intervalu  $\omega \in (-\infty, \infty)$  pro původní a náhradní integrand. Jinou možností je použití Laurentovy řady, výsledky jsou však méně stabilní.

Z předchozích úvah vyplývá následující výsledek:

$$I_{kl}(x_1, x_2) = \frac{2\pi\beta(x_1, x_2)}{\bar{\xi}_l + \xi_k} \cdot \frac{\alpha_0 |\bar{\xi}_l| \exp(-\lambda |\bar{\xi}_l| |\Delta x|)}{(a^2 - \bar{\xi}_l^2)^{4/3}} - \frac{\pi\beta(x_1, x_2)\alpha_1 \exp(-\lambda a |\Delta x|)}{(a + \xi_k)(a - \bar{\xi}_l)} \quad (40)$$

Vzorec (40) potvrzuje vzájemné spolupůsobení vlastních vektorů při náhodném buzení. Ze struktury (40) je na druhou stranu patrné, že hodnoty  $I_{kl}(x_1, x_2)$  klesají velmi rychle s rozdílem  $|x_1 - x_2|$ . V souvislosti se (17) je zřetelné, že význam spolupůsobení je závislý na míře neproporcionálnosti útlumu, a tedy na struktuře komponentních matic  $\mathbf{Z}_k$ , a dále na velikosti prostorové korelace buzení dané především koeficientem  $\lambda$ .

## 6. Závěr

Matematický model štíhlé vertikální konstrukce založený na soustavě jednorozměrných prvků se spojitě rozloženou hmotou a ohybovou tuhostí má řadu vlastností, kterými se odlišuje od modelů jiných typů. Nejpřirozenějším je srovnání s vlastnostmi modelu téže konstrukce, jenž je vytvořen na základě soustředěných hmot či tuhých těles propojených nehmotnými pružinami a tlumícími členy.

Oba modely mají řadu společných základních vlastností, které umožňují opustit řadu omezujících předpokladů neodpovídajících realitě. To se týká vlivu neproporcionálního tlumení konstrukce vybavené tlumičem, stochastické interakce vlastních tvarů (vektorů) kmitání zánikající exponenciálně s rostoucí vzdáleností bodů odezvy, prostorové korelace buzení i odezvy, atd. Na druhé straně se potvrdila v zobecněném měřítku řada heuristicky zavedených hypotéz v minulosti, jako např. gaussovská povaha odezvy, přijatelnost proporcionálního modelu na konstrukci bez tlumiče i v případě, že je sestavena z materiálů s různou mírou vnitřního útlumu. Vliv počátečních podmínek je krátkodobý a zaniká exponenciálně s rostoucím časem od zahájení buzení (stacionárního).

Předností modelu se spojitými prvky je analýza probíhající v zobecněných souřadnicích, které jsou blízké vlastním tvarům posuzované konstrukce. Energetická mohutnost jednotlivých vlastních funkcí obecně vzato klesá se vzrůstem jejich řádu. Z toho vyplývá možnost poměrně snadno omezit počet vlastních funkcí, což zejména u analýzy stochastického kmitání znamená citelné snížení pracnosti výpočtu. Výsledky jsou zároveň přehlednější a jejich rozbor je snáze proveditelný než v případě modelu se soustředěnými hmotami. Konvergence je zároveň mnohem rychlejší a vyššího typu.

Dodejme, že z kvantitativního rozboru vyplývá nutnost opatrně zacházet s předpokladem o lineárním vztahu mezi dynamickou složkou rychlosti větru a vyvolanou dynamickou složkou tlaku vyvozující samotné rozkmitání. Tento předpoklad je přijatelný v podmínkách volného terénu a nízké zástavby. V oblasti velkoměstského centra je velice sporný vzhledem k vysokému stupni turbulence, kdy amplitudy dynamické složky mohou být srovnatelné se složkou statickou.

## 7. Poděkování

Autor děkuje Grantové agentuře AVČR - A2071401, Grantové agentuře ČR - 103/06/0099 a výzkumnému záměru ÚTAM AV0 Z20710524, za jejichž podpory vznikla tato práce. Text byl pořízen procesorem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

**8. Literatura**

- Bolotin, V.V. (1979) *Random vibrations of elastic systems* (in Russian). Nauka, Moscow.
- Davenport, A.G. (1967) The dependence of wind Loads on Meteorological parameters, In: *Proc. International Research Seminar, Wind Effects on Buildings and Structures*, Toronto Press, Toronto, Canada, pp. 19-83.
- Davenport, A.G. (1967a) Gust loading factor. In: *Jour. Struct. Div. ASCE*, 93, pp.11-34.
- Dyrbye, C., Hansen, S.O. (1996) *Wind loads on structures*. Wiley and Sons, Chichester.
- Fischer, O., Pirner, M. (1987) *Dynamika kotvenych stozaru*. Academia, Praha.
- Grigoriu, M., Ariaratnam, S.T. (1988) Response of linear systems to polynomials of Gaussian processes. *Jour. Applied Mechanics ASME*, 55, pp.905-910.
- Koloušek, V., Pirner, M., Fischer, O., Náprstek, J. (1983) *Wind Effects on Civil Engineering Structures*. Academia - Elsevier, Praha.
- Lancaster, P. (1969) *Theory of Matrices*. Academic Press, New York - London.
- Michlin, S.G. (1975) *Variacionnyje metody v matematičeskoj fizike*. GITTL, Moskva.
- Muscolino, G. (1995) Linear systems excited by polynomial forms of non-Gaussian filtered processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 10, pp.35-44.
- Náprstek, J. (1975) On non-linear transfer between random variable velocity of fluid motion and frontal pressure on the bypassed cylindrical body. *Acta Technica ČSAV*, 4, pp.479-494.
- Náprstek, J., Pospíšil, S. (2006) Along wind random vibrations of a slender structure - modelling by concentrated masses. In: *Proc. Engineering Mechanics 2006* (J. Náprstek, C.Fischer eds). ITAM ASCR, Prague, 8 pgs, CD ROM.
- Simiu, E., Scanlan, R.H. (1996) *Wind Effects on Structures. Fundamentals and Applications to Design*. J. Wiley, New York.