

STRESS FIELD ANALYSIS NEAR THE SEMI-INFINITE CRACK TIP TERMINATING PERPENDICULAR TO THE INTERFACE BETWEEN TWO ORTHOTROPIC MATERIALS

T. Profant*, M. Kotoul**, O. Ševeček***

Summary: *The study of the stress and displacement field near the semi-infinite crack tip terminating perpendicular to the interface between two orthotropic materials is considered in this paper. Using an anisotropic complex method, the present analysis gives singularity exponents δ and $-\delta$ as the solution of an eigenvalue problem and as the root of some nonlinear equation. This leads to a closed-form expression for stresses and displacements. The matrix of the eigenvalue problem depends on the number of layers at the singular point, their relative elastic properties and the boundary conditions such as free surface or bonded interface close to the crack tip. While the δ is associated to the singular solution of the semi-infinite crack problem, the $-\delta$ is associated to the auxiliary solution. The auxiliary solution features stronger singularity and can be used to determination of the generalized intensity factor by the ψ -integral.*

1. Úvod

Nejstarším a v inženýrských problémech používanějším formalismem popisu rovinné deformace anizotropních prostředí je formalismus Lechnického, viz. Lechnický (1950, 1957). Lechnického formalismus je v podstatě zobecněním Muschelišviliho teorie, viz. Muschelišvili (1953) komplexních potenciálů rovinné izotropní pružnosti a vychází z předpokladu, že napětí závisí pouze na souřadnicích x_1 a x_2 . Z tohoto důvodu, ve vztazích vycházející z Lechnického teorie vystupují prvky redukované matice poddajnosti. Naopak je tomu u Strohova formalismu, který vychází z prací Eshelby, Read & Shockley (1953). Strohův formalismus vychází z předpokladu, že posuvy u_i , kde $i = 1, 2, 3$ závisí na souřadnicích x_1 a x_2 a tudíž místo prvků matice poddajnosti, vystupují ve vztazích vycházející ze Strohova formalismu prvky matice tuhosti. Výhodou Strohova formalismu je jeho matematická elegance a potenciál v řešení dvourozměrných anizotropních elastických problémů.

V případě obecné rovinné anizotropní pružnosti je nutné uvažovat všechny složky tenzoru napětí a deformace. Každý anizotropní materiál je charakterizován třemi komplexními čísly μ_i ,

* Ing. Tomáš Profant, Ph.D., Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT v Brně, Technická 2896/2, 616 69 Brno, tel.: +420 5 4114 2891, e-mail: profant@fme.vutbr.cz

** Prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc., Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT v Brně, Technická 2896/2, 616 69 Brno, tel.: +420 5 4114 2889, e-mail: kotoul@fme.vutbr.cz

*** Ing. Oldřich Ševeček, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT v Brně, Technická 2896/2, 616 69 Brno, tel.: +420 5 4114 2871, e-mail: sevecek@seznam.cz

kde $i = 1, 2, 3$, a jejich komplexně sdruženými protějšky. Čísla μ_i jsou vlastní čísla matice typu 3×3 , jejíž prvky závisí na elastických konstantách materiálu. K zjednodušení dochází, jakmile matice tuhosti příp. poddajnosti vykazuje roviny symetrie, jak je tomu např. u ortotropních materiálů. V takovém případě se počet charakteristických čísel materiálu sníží na dvě a nenulové složky tenzoru napětí příp. deformace se sníží pouze na σ_{ij} resp. ε_{ij} , kde $i, j = 1, 2$.

Singulární pole napětí a posuvů v okolí vrcholu trhliny je výhodné vyjádřit jako funkce polárních souřadnic r a θ

$$u_i = hr^\delta g_i(\theta), \quad \sigma_i = hr^{\delta-1} F_i(\theta),$$

kde exponent singularity δ je řešením problému vlastních čísel matice A_{ij} ($i, j = 1, 2$), jejíž prvky závisí na okrajových podmínkách v okolí vrcholu trhliny a zobecněný koeficient intenzity napětí h závisí na vnějším zatížení a geometrii tělesa. Kromě jiného, je znalost singulární části pole napětí a posuvů nutná při lomově mechanických výpočtech pomocí MKP, vzhledem k obtížnému posouzení koncentrace napětí v blízkém okolí čela trhliny. Naopak, analytické řešení nabízí jen omezené možnosti v popisu vlivů geometrie a zatížení tělesa. Jako optimální možnost získání přesných hodnot napětí a deformací před čelem trhliny se jeví využití kombinace obou metod.

Singulární popis pole napětí a posuvů se získá pomocí anizotropních komplexních potenciálů zobecněné rovinné pružnosti. Problém vlastních čísel matice A_{ij} , kde $i, j = 1, 2$, vede na řešení nelineární rovnice, jejíž nejmenší kladný kořen je exponent singularity δ . Zobecněný součinitel intenzity napětí h se může určit např. pomocí tzv. ψ -integrálu, kdy se využívá jeho nezávislosti na integrační cestě. Avšak k vyjádření hodnoty ψ -integrálu je nutná znalost tzv. pomocného řešení charakterizované exponentem singularity $-\delta$. Podobně jako exponent singularity δ , je také exponent singularity pomocného řešení $-\delta$ kořenem výše zmíněné nelineární rovnice, viz. Babuska & Miler (1984).

2. Formulace a řešení problému

Příspěvek si klade za cíl analýzu napjatosti v okolí vrcholu polonekonečné trhliny kolmé na rozhraní dvou ortotropních materiálů (viz. obr. 1). Souřadnicový systém je zvolen tak, že materiál obsahující trhlínu se nachází v oblasti $x_2 < 0$. Oba materiály jsou homogenní a lineárně elastické a pro napětí a deformace platí Hookův zákon

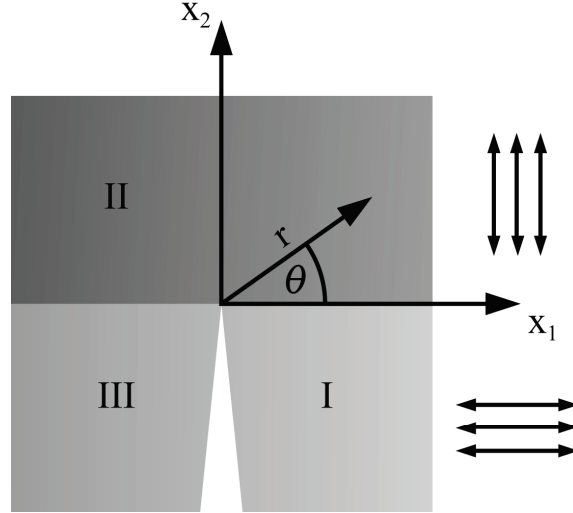
$$\varepsilon_i = \sum_{j=1,2,6} s_{ij} \sigma_j, \quad (i = 1, 2, 6), \quad (1)$$

kde bylo použito pravidlo zkráceného indexování tenzorů

$$1 \leftrightarrow 11, \quad 2 \leftrightarrow 22, \quad 6 \leftrightarrow 12 \leftrightarrow 21$$

a kde s_{ij} je matice poddajnosti. Vztah (1) platí pro případ rovinné napjatosti. V případě rovinné deformace je nutné provést přepočty prvků matice poddajnosti podle vztahu

$$s'_{ij} = s_{ij} - \frac{s_{i3}s_{j3}}{s_{33}}, \quad (i, j = 1, 2, 6). \quad (2)$$



Obrázek. 1: Polonekonečná trhlina kolmá k rozhraní dvou ortotropních materiálů.

Oba ortotropní materiály jsou charakterizovány vlastními komplexními čísly μ_i , $\text{Im}(\mu_i) > 0$, kde $i = 1, 2$ a $\text{Im}(\cdot)$ značí imaginární část komplexního čísla. Čísla μ_i závisí na materiálových charakteristikách a jsou kořeny rovnice čtvrtého řádu

$$\lambda\mu^4 + 2\rho\lambda^{1/2}\mu^2 + 1 = 0, \quad (3)$$

kde

$$\lambda = \frac{s_{11}}{s_{22}}, \quad \rho = \frac{2s_{12} + s_{66}}{2\sqrt{s_{11}s_{22}}}. \quad (4)$$

Rovnice (3) je zvláštním případem charakteristické rovnice šestého řádu danou Lechnickým (1950). Pro kořeny μ_i charakteristické rovnice (3) se může psát

$$\mu_1 = i\lambda^{-1/4}(n+m), \quad \mu_2 = i\lambda^{-1/4}(n-m) \quad \text{pro } 1 < \rho < \infty, \quad (5a)$$

$$\mu_1 = \lambda^{-1/4}(in+m), \quad \mu_2 = \lambda^{-1/4}(in-m) \quad \text{pro } -1 < \rho < 1, \quad (5b)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = i\lambda^{-1/4} \quad \text{pro } \rho = 1, \quad (5c)$$

kde

$$n = \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}, \quad m = \sqrt{\left|\frac{1-\rho}{2}\right|}. \quad (5d)$$

Případ $\rho = 1$ odpovídá materiálu s kubickou symetrií a případ $\lambda = \rho = 1$ odpovídá izotropnímu materiálu. Jde o tzv. degenerované případy anizotropie a jak bude z dalšího zřejmé, nelze na ně aplikovat Lechnického-Strohův formalismus. Jeden ze způsobů řešení problémů s materiálovou symetrií navrhl Suo *et al.* (1990). Ten je analogický Muschelišviliho metodě komplexních potenciálů. V dalším se však bude předpokládat, že $\rho \neq 1$.

Pro posuvy u_i , napětí σ_{ij} a výslednou sílu T_i podél polopřímky vedoucí z počátku souřadnic

se může psát

$$u_i = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 A_{ij} f_j(z_j) \right\}, \quad T_i = -2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 L_{ij} f_j(z_j) \right\}, \quad (6a)$$

$$\sigma_{2i} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 L_{ij} f'_j(z_j) \right\}, \quad \sigma_{1i} = -2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 L_{ij} \mu_j f'_j(z_j) \right\}, \quad (6b)$$

kde $(\cdot)'$ značí derivaci podle z_j a pro matice A_{ij} a L_{ij} platí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_{11}\mu_1^2 + s_{12} & s_{11}\mu_2^2 + s_{12} \\ s_{12}\mu_1 + s_{22}/\mu_1 & s_{12}\mu_2 + s_{22}/\mu_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Napětí v okolí vrcholu trhliny jsou úměrná výrazu $r^{\delta-1}$ a posuvy výrazu r^δ , kde r je vzdálenost od čela trhliny a δ je u trhliny kolmé k rozhraní dvou materiálů reálné číslo. Aby deformační energie byla kladná, musí být také $\delta > 0$. Aby měla napětí singulární charakter, musí dále platit, že $\delta < 1$. Exponent δ závisí na lokální geometrii (tj. na charakteru zatížení povrchů trhliny a rozhraní obou materiálů) a na materiálových charakteristikách bimateriálu. Neznámý potenciál $f_j(z_j)$ z (6) se hledá ve tvaru

$$f_j^J(z_j^J) = \phi_j^J (z_j^J)^\delta, \quad (j = 1, 2, J = I, II, III), \quad (8)$$

kde ϕ_j^J je vektor komplexních koeficientů, horní index značí příslušnost k jednotlivým oblastem bimateriálu a z_j se uvažuje v polárních souřadnicích (viz. obr. 1)

$$z_j^J = r (\cos \theta + \mu_j^J \sin \theta). \quad (9)$$

V okolí vrcholu trhliny musí být splněny následující okrajové podmínky

$$T_i = 0 \quad \text{pro } \theta = -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad (10a)$$

$$u_i^I = u_i^{II}, \quad T_i^I = T_i^{II} \quad \text{pro } \theta = 0, \quad (10b)$$

$$u_i^{II} = u_i^{III}, \quad T_i^{II} = T_i^{III} \quad \text{pro } \theta = \pi. \quad (10c)$$

Jejich splněním pomocí vztahů (6a) se dostane soustava algebraických rovnic

$$\mathbf{K}(\delta) \mathbf{v}^I = \mathbf{0}, \quad (11)$$

kde 0_{ij} značí nulovou matici 2×2 a v_i^I značí dvourozměrný vlastní vektor matice K_{ij} . Ten je určen až na multiplikativní konstantu a může být definován jako

$$\mathbf{v}^I = \frac{1}{h} \mathbf{L}^I \Phi^I. \quad (12)$$

Matice K_{ij} má složitou strukturu a nebude zde uvedena. Aby soustava (11) měla řešení, musí platit

$$\det(\mathbf{K}(\delta)) = 0. \quad (13)$$

Výraz (13) vede na nelineární rovnici, jejíž nejmenší kladné řešení δ_0 je hledaný exponent singularity. Jak již bylo zmíněno výše, dalším řešením rovnice (13) je také hodnota $-\delta_0$ pomocí níž se vyjádří tzv. pomocné řešení.

Dosazením δ_0 zpět do (11) se nalezne vlastní vektor v_i^I , který odpovídá nulovému vlastnímu číslu matice K_{ij} a danému exponentu δ_0 . Podobně to platí i pro $-\delta_0$. Ze znalosti vlastního vektoru v_i^I a jemu odpovídajícího exponentu δ_0 se dosazením do (8) pro oblast I dostane

$$\mathbf{f}^I = h(\mathbf{Z}^I)^\delta (\mathbf{L}^I)^{-1} \mathbf{v}^I, \quad (14)$$

kde

$$\mathbf{Z}^I = \text{diag}\left[r(\cos\theta + \mu_1^I \sin\theta), r(\cos\theta + \mu_2^I \sin\theta)\right], \quad \text{pro } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0. \quad (15)$$

Pomocí v_i^I a vztahů (6a), (10b) a (10c) se postupně dostanou potenciály \mathbf{f}^{II} a \mathbf{f}^{III} .

Poznámka: Nulové vlastní číslo dané matice K_{ij} a odpovídajícího exponentu δ_0 může být dvojnásobné. Potom v hledání vlastních vektorů odpovídajících danému vlastnímu číslu matice mohou nastat dva případy. V prvním případě jsou nalezeny dva lineárně nezávislé vektory $(v_i^I)^a$ a $(v_i^I)^b$, jejichž libovolná lineární kombinace tvoří hledaný vektor v_i^I . Ve druhém případě může být nalezen pouze jeden vlastní vektor v_i^I , přičemž kromě řešení (14) je nutné uvažovat také řešení ve tvaru, Panagiotis *et al.* (1995)

$$\mathbf{f}^I = h \ln \left[r \mathbf{Z}^I (\mathbf{L}^I)^{-1} \mathbf{v}^I + \frac{d}{d\delta} \left(\mathbf{Z}^I (\mathbf{L}^I)^{-1} \mathbf{v}^I \right) \Big|_{\delta=\delta_0} \right].$$

2. Výpočet zobecněného součinitele intenzity napětí - ψ -integrál

Na základě Bettiho recipročního teorému platí

$$\int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij} n_j \tilde{u}_i - \tilde{\sigma}_{ij} n_j u_i) dl = \int_{\Gamma_2} (\sigma_{ij} n_j \tilde{u}_i - \tilde{\sigma}_{ij} n_j u_i) dl, \quad (16)$$

kde Γ_1 , Γ_2 jsou libovolné dvě integrační cesty obklopující kořen trhliny, n_j je jejich vektor vnější normály, $\tilde{\sigma}_{ij}$ a \tilde{u}_i jsou pomocná pole napětí a posuvů, která vyhovují stejným lokálním okrajovým podmínkám a konstitutivním vztahům jako skutečná pole napětí a posuvů σ_{ij} a u_i . Integrál (16) se označuje jako ψ -integrál, viz Desmorat & Leckie (1998). Ze znalosti pomocného řešení $\tilde{\sigma}_{ij}$ a \tilde{u}_i , které se dostane dosazením $-\delta_0$ a odpovídajícího vlastního vektoru v_i^I do vztahů (6) a limitním přechodem jedné z cest k vrcholu trhliny, např. Γ_1 , jej lze použít pro výpočet zobecněného součinitele intenzity napětí h

$$h = \frac{1}{c_1 - c_2} \int_{\Gamma_2} (\sigma_{ij} n_j \tilde{u}_i - \tilde{\sigma}_{ij} n_j u_i) dl,$$

kde konstanty c_1 a c_2 plynou z příslušných substitucí a úprav, viz. Kotoul *et al.* (2006). Pomocné řešení $\tilde{\sigma}_{ij}$ a \tilde{u}_i je více singulární než řešení σ_{ij} a u_i popisující skutečný stav v okolí kořene trhliny. Proto je integrál při integraci podél infinitesimální cesty okolo kořene trhliny konečný.

3. Numerické výsledky

Pro ilustraci hodnot singularity pole napětí a posuvů byly vybrány dva vláknové kompozity s materiálovými charakteristikami uvedenými v tabulce 1. Zkoumané bimateriály byly sestaveny tak, že obě části bimateriálu, tj. oblast *I* a *III* obsahující trhlínu a oblast *II* bez trhliny, byly ze stejného materiálu, ale s vlákny vzájemně otočenými o úhel $\pi/2$ (viz obr. 1, kde je směr vláken označen řadou šipek v pravé části obrázku). V tabulce 1 jsou materiálové charakteristiky ve směru vláken označeny indexem *L*, ve směru kolmém na vlákna *T*, příp. *Z*. Kromě exponentu singularity jsou v tabulkách uvedeny také vlastní vektory příslušející danému exponentu. Vektory jsou normovány tak, že vektor v_i^I je jednotkový a zbývající vektory z něj následně dopočteny. Symbol $i = \sqrt{-1}$ značí imaginární jednotku komplexního čísla.

Tabulka 1a: Materiálové charakteristiky, exponent singularity a vlastní vektory skutečného a pomocného řešení pro trhlínu kolmou na rozhraní dvou ortotropních materiálů

$E_L = 137 \text{ GPa}$ $E_T = E_Z = 10,8 \text{ GPa}$ $G_{ZT} = 3,36 \text{ GPa}$ $G_{ZL} = G_{TL} = 5,65 \text{ GPa}$ $\nu_{TZ} = 0,49$ $\nu_{ZL} = \nu_{TL} = 0,238$			
$\delta_0 / -\delta_0$	v^I	v^{II}	v^{III}
0.249542539	0.3790973052-0.9170852279i -0.1140869023-0.04716032573i	0.3790973051-0.1567081909i -0.1140869024-0.2759909215i	0.9159917920+0.3817317217i 0.04748805020-0.1139508776i
-0.249542539	0.3812897317+0.9223889892i -0.0570936837+0.0236009274i	0.3812897317+0.1576144783i -0.05709368374+0.138116979i	0.9212892381-0.3839393871i 0.0237649349+0.0570256117i

Tabulka 1b: Materiálové charakteristiky, exponent singularity a vlastní vektory skutečného a pomocného řešení pro trhlínu kolmou na rozhraní dvou ortotropních materiálů

$E_L = 225 \text{ GPa}$ $E_T = E_Z = 150 \text{ GPa}$ $G_{ZT} = 55 \text{ GPa}$ $G_{ZL} = G_{TL} = 56 \text{ GPa}$ $\nu_{TZ} = 0,31$ $\nu_{ZL} = \nu_{TL} = 0,28$			
$\delta_0 / -\delta_0$	v^I	v^{II}	v^{III}
0.4658839267	0.5263052556-0.5859684752i -0.4583969904-0.4117231145i	0.5263052557-0.4727169542i -0.4583969905-.05103619903i	0.6389069269-0.4606020109i -0.3603241255-0.4998102051i
-0.4658839267	0.6444758468+0.7175350461i -0.1965458537+0.1765334746i	0.6444758466+0.5788553402i -0.1965458537+0.2188266151i	0.7823598289+0.5640202618i -0.1544953676+0.2143024228i

4. Závěr

Byl popsán postup vedoucí k nalezení singulárního řešení pro pole napětí a posuvů v okolí kořene trhliny kolmé na rozhraní dvou ortotropních materiálů. Kromě skutečného řešení bylo popsáno tzv. pomocné řešení, pomocí něhož lze určit zobecněný koeficient intenzity napětí pomocí ψ -integrálu.

5. Poděkování

Příspěvek byl podpořen grantovými projekty GAČR 101/05/P290, GAČR 101/05/0320 a GAČR 106/05/H008.

6. Literatura

- Babuska, I., & Miller, A., (1984) The post-processing approach in the FEM, Part2: The calculation of stress intensity factors, *Int. Num. Meth. Engng.*, Vol. 20, p.1111–1129.
- Desmorat, R., & Leckie, F. A., (1998) Singularities in bi-materials: parametric study of an isotropic/anisotropic joint, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 17, p. 33–52.
- Eshelby, J. D., Read, W. T. & Shockley, W. (1953) Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory, *Acta Metall.*, 1, 251–259.
- Kotoul, M., Ševeček, O., Profant, T. (2006) Calculation of K-factor and T-stress for crack in anisotropic bimerials, in: *Proc. of 16th European Conf. of Fracture*, Alexandroupolis.
- Lechnickij, S. G., (1950) Těoria uprugosti anisotropnovo těla, Gostěchizdat, Moskva.
- Lekhnitskij, S. G., (1957) Anizotropnyje plastinki, Gostěchizdat, Moskva.
- Muschelišvili, N. I., (1953) Někotoryje osnovnyje zadači matěmatičeskoj těoriji uprugosti, Gostěchizdat, Moskva.
- Panagiotis, J. P. & Babuska, I., (1995) A numerical procedure for the determination of certain quantities related to the stress intensity factors in two-dimensional elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 122, 69–92.
- Suo, Z., Bao, G., Fan, B. & Wang, T. C., (1990) orthotropy rescaling and implications for fracture in composites, *Int. J. Solids Structures*, 28(2), 235–248.