

A CONSTRUCTION OF THE FUNDAMENTAL SOLUTION FOR THE DISLOCATION IN THE ANISOTROPIC BI-MATERIAL BODY BY FORCE OF THE FINITE ELEMENT METHOD

O. Ševeček*, M. Kotoul, T. Profant*****

Summary: *The work deals with a modelling of a crack terminating perpendicular to a bimaterial interface by means of Continuously Distributed Dislocations and finding of the fundamental solution for the dislocation. This technique is also used for the T-stress determination. The singular part of the fundamental solution is known and the regular part is constructed using the FEM and subsequently used in the integral equation. The integral equation is solved for the dislocation density that allows finding the T-stress.*

1. Úvod

Rostoucí používání vláknových kompozitů a jiných moderních materiálů, jejichž vlastnosti jsou anisotropní, vyvolává opět potřebu najít vhodnou a účinnou techniku pro analýzu trhlin a obecných vrubů u těchto materiálů. Situace se navíc často komplikuje přítomností nehomogenit, jako například materiálového rozhraní. Typickým případem může být například trhlina ve vrstvě laminátu (kolmá na vrstvu), případně trhliny v nějaké povrchové ochranné vrstvě, jež se rovněž začínají v současné době hojně používat. Všude budeme předpokládat trhliny končící na rozhraní dvou anisotropních materiálů.

Pro posouzení chování zmíněných trhlin je základním předpokladem dobrá znalost pole napětí v blízkosti kořene trhliny, jež o dalším chování tohoto koncentrátoru zásadně rozhoduje. Poměrně bez komplikací umožňuje klasická konečnoprvková analýza získat toto pole napětí pro trhliny či vruby v homogenních materiálech. Problém ovšem nastává, leží-li kořen na rozhraní dvou odlišných materiálů. Tradiční MKP analýza zde pro přesné určení pole napětí selhává a je proto nutné najít jiný prakticky použitelný způsob, jak jej určit.

S určením pole napětí (příp. deformací) dále úzce souvisí nalezení tzv. součinitele intenzity napětí, který toto pole charakterizuje, jelikož reprezentuje amplitudu převládajícího singulárního členu v asymptotickém rozvoji pole napětí.

* Ing. Oldřich Ševeček, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT v Brně, Technická 2896/2, 616 69 Brno, tel.: +4 20 5 4114 2871, e-mail: sevecek@seznam.cz
** Prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc., Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT v Brně, Technická 2896/2, 616 69 Brno, tel.: +420 5 4114 2889, e-mail: kotoul@fme.vutbr.cz
*** Ing. Tomáš Profant, Ph.D., Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT v Brně, Technická 2896/2, 616 69 Brno, tel.: +420 5 4114 2891, e-mail: profant@fme.vutbr.cz

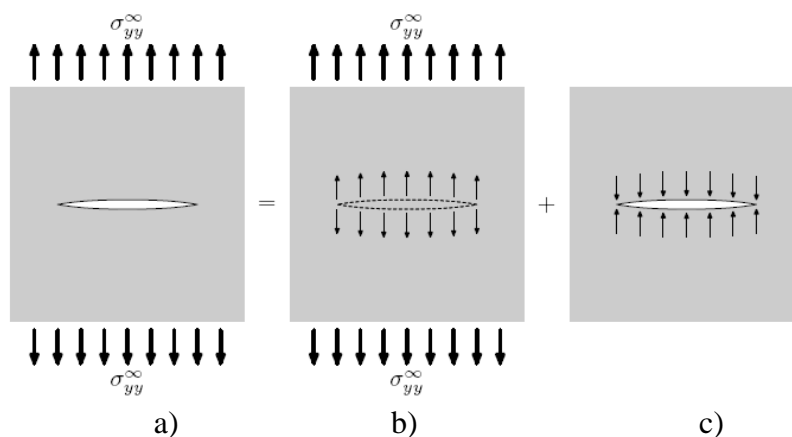
Další důležitou lomově-mechanickou charakteristikou je T-napětí, které také rozhoduje o velikosti plastické zóny v okolí singulárního bodu a tedy i o dalším chování koncentrátoru. Tento nesingulární člen Williamsova rozvoje pro napětí (nezávislý na vzdálenosti od singulárního bodu) bývá často opomíjen a zanedbáván. Je-li nicméně cílem co nejpřesněji popsat pole napětí v okolí kořene, jež bude co nejvíce odpovídat skutečnosti, měla by být T-napětí věnována stejná pozornost jako například faktorů intenzity napětí. Může totiž pole napětí silně ovlivnit. V některých případech může působit pozitivně, tzn. pomáhá trhlinu stabilizovat a skutečné lomové napětí součásti tak bude větší než které dostaneme například pomocí samotné K-koncepce. Může nastat ovšem i případ opačný, méně příznivý, tj., že bude přispívat ke ztrátě stability trhliny a skutečné lomové napětí tak může být nižší než které opět určíme pouze pomocí samotného součinitele intenzity napětí. Z těchto důvodů plyne i potřeba tomuto parametru věnovat patřičnou pozornost.

2. Formulace problémů a cílů

Hlavním cílem je v rámci rovinné anisotropní pružnosti zkonstruovat vhodný postup pro výpočet zobecněného součinitele intenzity napětí a T-napětí pro trhlinu kolmou k rozhraní dvou anisotropních materiálů, přičemž její vrchol bude ležet na tomto rozhraní. Vyřešení těchto problémů má velký význam pro lomově mechanickou analýzu vrstevnatých kompozitů tvořených anisotropními lamelami případně analýzu ochranných povrchových vrstev.

3. Technika spojitě rozložených dislokací

Trhliny lze modelovat pomocí techniky spojitě rozložených dislokací – pomocí rozložení deformačních jader různých druhů podél trhlín v jinak neporušených tělesech - viz Hills & Kelly (1996). Tato technika je založena na tzv. Buecknerově principu – viz Obrázek 1.



Obrázek 1. Buecknerův princip

Obrázek 1.a) ukazuje materiál s trhlinou zatížený dostatečně daleko od trhliny. Tento stav lze potom uvažovat jako superpozici stavu b) a c) – využitím zmíněného Buecknerova principu. Stav b) odpovídá zatíženému tělesu bez trhliny. V případě stavu c) je zatížení předepsáno pouze na lících trhliny tak, aby při superpozici se stavem b) byly povrchy nezatížené. Strategie, kterou použijeme k vytvoření korigujícího zatížení (viz Obrázek 1.c)) bude založena na již zmíněné technice spojitě rozložených dislokací, kterými simulujeme trhlinu – podrobněji viz Hills & Kelly (1996), Kotoul et al. (2006).

4. Singulární část řešení pro dislokaci

Podle Lekhniského (1963) je možné v případě rovinné deformace vyjádřit elastické pole pomocí komplexních potenciálových funkcí $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_2)$, $\Phi_3(z_3)$, které jsou holomorfními funkcemi svých argumentů $z_\alpha = x + p_\alpha y$. Zde, p_α jsou tři různé komplexní čísla s kladnou imaginární částí, a představují kořeny charakteristické rovnice:

$$\det \left[c_{i1k1} + p(c_{i1k2} + c_{i2k1}) + p^2 c_{i2k2} \right] = 0 \quad (1)$$

kde c_{ijkl} je tensor elastických konstant, tzn. $\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}$, se známými vlastnostmi symetrie:

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jikl} = c_{klij} \quad (2)$$

Reprezentace posuvů u_i a napětí σ_{ij} pomocí uvedených holomorfních funkcí je následující:

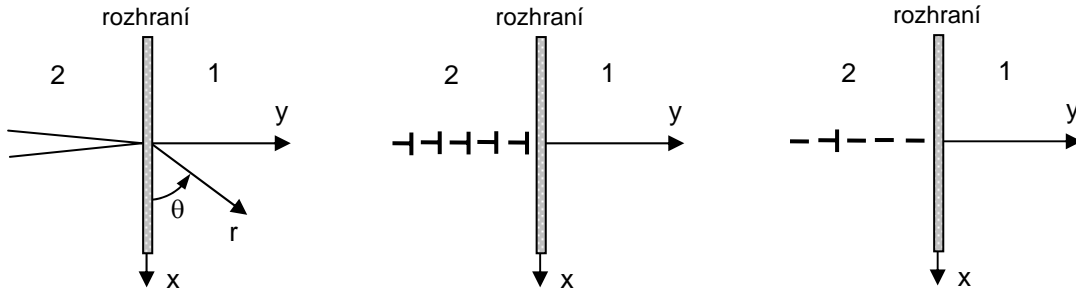
$$u_i = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{\alpha=1}^3 A_{i\alpha} \Phi_\alpha(z_\alpha) \right], \quad \sigma_{2i} = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{\alpha=1}^3 L_{i\alpha} \Phi'_\alpha(z_\alpha) \right], \quad \sigma_{1i} = -2 \operatorname{Re} \left[\sum_{\alpha=1}^3 L_{i\alpha} p_\alpha \Phi'_\alpha(z_\alpha) \right], \quad (3)$$

zde $()'$ značí derivaci podle příslušného argumentu a A a L jsou matice dané vztahem:

$$L_{i\alpha} = A_{k\alpha} (c_{i2k1} + p_\alpha c_{i2k2}) \quad (4)$$

kde $A_{k\alpha}$ značí vlastní vektor odpovídající vlastní hodnotě p_α viz výše.

Polonekonečná trhlina je simulována pomocí spojitě rozložených hranových dislokací podél záporné y-ové osy (viz Obrázek 2.)



Obrázek 2. Polonekonečná trhlina s vrcholem na rozhraní dvou anisotropních materiálů

Na základě uvedených výrazů a práce Suo (1990) lze psát napět'ové pole indukované jednou dislokací s Burgersovým vektorem b_i umístěnou v bodě (x_0, y_0) v nekonečném anisotropním bi-materiálu následovně:

$$\sigma_{1i}(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{i\alpha}'' p_{\alpha}'' \left[\sum_{\beta} \left(G_{\alpha\beta} \bar{M}_{\beta k}'' \frac{d_k}{z_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\beta}} \right) + M_{\alpha k}'' \frac{d_k}{z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}} \right] + C.C., \quad z \in 2 \quad (5)$$

$$\sigma_{1i}(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{i\alpha}' p_{\alpha}' \sum_{\beta} \left(C_{\alpha\beta} M_{\beta k}'' \frac{d_k}{z_{\alpha} - \zeta_{\beta}} \right) + C.C., \quad z \in 1 \quad (6)$$

Indexy I a II označují příslušnost k jednotlivým oblastem – materiál 1 a 2. $C.C.$ označuje výraz komplexně sdružený k předchozímu. Analogicky by bylo možné psát i vztahy pro σ_{2i} .

Zavedme lokální hustotu Burgersova vektoru f_k v bodě na trhlíně ($x=0, y$), odtud

$$d_k = f_k(y_o) dy_o \quad (7)$$

je elementární Burgersův vektor mezi y_o a $y_o + dy_o$ a integrujme (5) podél celé trhlíny kde následně napětí produkovaná v bodě ($0, y$) dislokační hustotou f_k mohou být vyjádřeny jako

$$\sigma_{ii}(y) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{\alpha} L_{i\alpha}^{II} \left[\sum_{\beta} \left(G_{\alpha\beta} \bar{M}_{\beta k}^{II} \frac{P_{\alpha}^{II}}{\bar{P}_{\beta}^{II}} \int_{-\infty}^0 \frac{f_k(y_o) dy_o}{\frac{P_{\alpha}^{II}}{\bar{P}_{\beta}^{II}} y - y_o} \right) + M_{\alpha k}^{II} \int_{-\infty}^0 \frac{f_k(y_o) dy_o}{y - y_o} \right] + C.C. \right\} \quad (8)$$

Asymptotické napěťové pole v okolí kořene trhlíny lze modelovat pomocí (8) s dislokační hustotou

$$f_k(y_o) = H \cdot v_k (-y_o)^{-\lambda}, \quad y_o < 0 \quad (9)$$

kde λ je exponent singularity napětí, který zatím neznáme, v_k jsou komponenty odpovídajícího vlastního vektoru a H je zobecněný součinitel intensity napětí. Dosadíme rovnici (9) do (8), integrujme a aplikujme okrajovou podmínku volných povrchů v rovině trhlíny a obdržíme

$$\text{Re} \left\{ \left[\sum_{\alpha} \sum_{\beta} L_{i\alpha}^{II} G_{\alpha\beta} \bar{M}_{\beta k}^{II} \left(-\frac{\bar{P}_{\beta}^{II}}{P_{\alpha}^{II}} \right)^{\lambda-1} \csc(\pi\lambda) - \delta_{ik} \cot(\pi\lambda) \right] v_k = 0 \Rightarrow \mathbf{D}(\lambda) \cdot \mathbf{v} = 0 \right. \quad (10)$$

Potom parametr λ lze vypočítat z charakteristické rovnice

$$\det[\mathbf{D}(\lambda)] = 0 \quad (11)$$

a vlastní vektor \mathbf{v} je až na multiplikatívni konstantu určen z rovnice (10).

Napětí a posuvy indukované rozložením dislokací s hustotou podle rovnice (9), mohou být v oblasti materiálu 2 (viz Obrázek 2.) vyjádřeny následovně:

$$\sigma_{ii}(r, \theta) = -\frac{H}{2r^{\lambda}} \text{Re} \left\{ \sum_{\alpha} L_{i\alpha}^{II} P_{\alpha}^{II} \sum_{\beta} \left[G_{\alpha\beta} \bar{M}_{\beta k}^{II} \frac{1}{P_{\alpha}^{II}} \left(\frac{\bar{P}_{\beta}^{II}}{P_{\alpha}^{II}} \right)^{\lambda-1} + \frac{\delta_{ik}}{P_{\alpha}^{II}} \right] \frac{(-1)^{\lambda}}{\tau_{\alpha}^{II}(\theta)^{\lambda}} \csc(\pi\lambda) v_k \right\}, \quad (12)$$

$$\text{pro } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right) \cup \left(\pi, \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$u_i = \frac{Hr^{1-\lambda}}{2(1-\lambda)} \text{Re} \left\{ \sum_{\alpha} A_{i\alpha} \sum_{\beta} \left[G_{\alpha\beta} \bar{M}_{\beta k}^{II} \frac{1}{P_{\alpha}^{II}} \left(\frac{\bar{P}_{\beta}^{II}}{P_{\alpha}^{II}} \right)^{\lambda-1} + \frac{\delta_{ik}}{P_{\alpha}^{II}} \right] \frac{(-1)^{\lambda}}{\tau_{\alpha}^{II}(\theta)^{\lambda-1}} \csc(\pi\lambda) v_k \right\}, \quad \text{for } z \in 2 \quad (13)$$

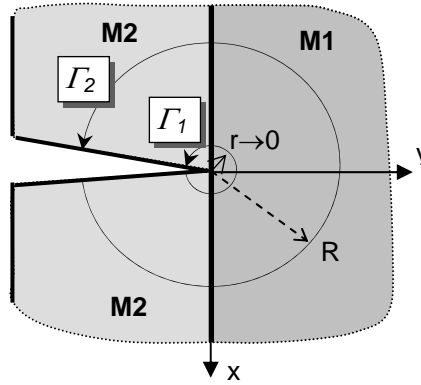
Analogicky by bylo možné psát i vztah pro napětí σ_{2i} a vztahy pro napětí a posuvy v oblasti materiálu 1.

5. Výpočet zobecněného součinitele intensity napětí - ψ -integrál

Nechť $\hat{\sigma}_{ij}$ a \hat{u}_i jsou pomocná (duální) pole napětí a posuvů, která vyhovují stejným lokálním okrajovým podmínkám a konstitutivním vztahům jako skutečná pole napětí a posuvů σ_{ij} a u_i . Líce trhliny uvažujme bez vnějšího zatížení. Potom na základě Bettiho recipročního teorému lze psát

$$\int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij} n_j \hat{u}_i - \hat{\sigma}_{ij} n_j u_i) dl = \int_{\Gamma_2} (\sigma_{ij} n_j \hat{u}_i - \hat{\sigma}_{ij} n_j u_i) dl \quad (14)$$

kde Γ_1 , Γ_2 jsou libovolné dvě integrační cesty obklopující kořen trhliny a n_j je vektor vnější normály. Uvedený integrál (14) se nazývá ψ -integrál - viz Desmorat & Leckie (1998) - a v případě, že je známo pomocné řešení, jej lze použít pro výpočet zobecněného součinitele intensity napětí. Pomocné řešení je zapotřebí vhodně zvolit tak, aby byl integrál při integraci podél infinitesimální cesty okolo kořene trhliny konečný. Aby to bylo zaručeno, musí být duální řešení více singulární řešení, než které popisuje skutečný stav v okolí kořene trhliny.



Obrázek 3. Integrační cesty v okolí singulárního bodu

Lze dokázat, že je-li λ kořen charakteristické rovnice, pak také $\lambda_s = 2 - \lambda$ je kořenem rovnice (11) - viz Babuška & Miller (1984), kde λ je exponent singularity napětí singulárního řešení.

K řešení bereme pole indukované rozložením dislokací s hustotou

$$\hat{f}_k(r) = \frac{w_k}{(-r)^{2-\lambda}}, \quad \infty < r < 0 \quad (15)$$

kde w_k je vlastní vektor matice \mathbf{D} (viz.(10)) odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_s = 2 - \lambda$. ψ -integrál podél kružnice s poloměrem jdoucím k nule - $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_1$, lze potom psát následovně:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} (\sigma_i \hat{u}_i - \hat{\sigma}_i u_i) dl = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (\sigma_i \hat{u}_i - \hat{\sigma}_i u_i) r d\theta \quad (16)$$

Po dosazení pomocného a skutečného pole napětí a posuvů a zjednodušujících úpravách dostaneme následující finální výraz pro výpočet zobecněného součinitele intensity napětí

$$H = \frac{1}{c_1 - c_2} \int_{\Gamma_2} (\sigma_{ij} n_j \hat{u}_i - \hat{\sigma}_{ij} n_j u_i) dl \quad (17)$$

kde konstanty c_1 a c_2 plynou z přísl. substitucí a úprav – podrobně viz. Kotoul et.al. (2006).

Toto nám umožňuje výpočet zobecněného součinitele intensity H na základě numerických hodnot z MKP analýzy v bodech dostatečně vzdálených od singulárního bodu – na křivce Γ_2 . Numerické hodnoty pole napětí a posuvů jsou získány pomocí MKP systému ANSYS 10.0..

Vzorek je zhotoven ze 2 vrstev materiálů M1 a M2, přičemž elastické vlastnosti těchto materiálů jsou shodné: $E_L = 137$ GPa, $E_T = E_Z = 10,8$ GPa $G_{ZT} = 3,36$ GPa $\nu_{TZ} = 0,49$ $G_{ZL} = G_{TL} = 5,65$ GPa $\nu_{ZL} = \nu_{TL} = 0,238$, pouze hlavní mater. směry jsou k sobě pootočené o 90° . Materiál M1 má modul pružnosti E_L ve směru osy y , M2 má E_L ve směru osy x (Obrázek 3)

6. Výpočet T-napětí

Aby bylo možné použít stejnou proceduru pro výpočet T-napětí jako v případě výpočtu zobecněného součinitele intensity napětí, musel by jeden z kořenů charakteristické rovnice (11) nabývat hodnoty $\lambda=0$, příp. $\lambda=-2$. Takový případ však nemusí obecně nastat a duální řešení je nutné získat jinou metodou. Vzhledem k tomu, že duální řešení pro výpočet T-napětí je úměrné $1/r^2$, bylo by teoreticky možné sestavit duální řešení na základě analýzy pole napětí v okolí vrcholu trhliny zatíženém izolovanou silovou dvojicí. Takové (analytické) řešení není zatím k dispozici. T-napětí je opět možno vypočítat na základě známé dislokační hustoty pro dané okrajové podmínky.

Obecně vyžaduje numerický výpočet T-napětí opatrný přístup, a to z důvodu jejich polohy v blízkosti singulárního bodu. Řešení T-napětí pomocí techniky spojitě rozložených dislokací vede na Fredholmovu rovnici, kterou lze řešit velmi přesně a zajišťuje přesnější hodnoty T-napětí než například klasická metoda konečných prvků. Aplikace této metody však vyžaduje nalezení řešení pro dislokaci na složité oblasti. Takový přístup není příliš efektivní, existují však strategie, kterou lze tento problém obejít. Jedna z nich může být například následující:

- 1) Uvažme nejdříve nekonečnou bimateriálovou rovinu. Zaveďme dislokaci s Burgersovým vektorem b_i pro $x=0$, $y=y_0$ (viz Obrázek 2.) a použijme vztahy (5), (6) (případně analogické vztahy pro σ_{2i}) pro výpočet ${}^d\sigma_{1i}(x,y)$ a ${}^d\sigma_{2i}(x,y)$ podél křivky $\partial\Omega$, která je hranicí konečného tělesa (viz Obrázek 3.)
- 2) Předpokládejme dále bi-materiálovou rovinu bez napětí a bez trhlin, ohraničenou křivkou $\partial\Omega$ a zaveďme podél ní síly t_i , takové, že vyruší napětí nalezené v předchozím kroku.
- 3) Zaveďme nyní podobně jako pro nekonečnou rovinu, dislokaci s Burgersovým vektorem b_i v $x=0$, $y=y_0$. Toto způsobí vymizení sil podél křivky $\partial\Omega$ a přidání napětí na $x=0$:

$$\sigma_{1i}(x=0, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{i\alpha}'' P_{\alpha}'' \left[\sum_{\beta} \left(G_{\alpha\beta} \bar{M}_{\beta k}'' \frac{d_k}{p_{\alpha} y - \bar{p}_{\beta} y_0} \right) + M_{\alpha k}'' \frac{d_k}{p_{\alpha} (y - y_0)} \right] + \quad (18)$$

$$+ C.C. + h_{ik}(y, y_0) d_k, \quad y \in \Omega$$

Poznamenejme, že toto jsou napětí vytvořené izolovanou dislokací v rovině bez trhliny ohraničené $\partial\Omega$. Napětí mohou být případně určena nějakou jinou metodou například pomocí MKP.

4) Sestavme dislokační pole zavedením hustoty dislokací $f_k(y_o)$ a integrujme přes l_c

$$\begin{aligned} \sigma_{li}(y) = & -\frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{\alpha} L_{i\alpha}^{II} \left[\sum_{\beta} \left(G_{\alpha\beta} \bar{M}_{\beta k}^{II} \frac{P_{\alpha}^{II}}{\bar{P}_{\beta}^{II}} \int_{l_c} \frac{f_k(y_o) dy_o}{\frac{P_{\alpha}^{II}}{\bar{P}_{\beta}^{II}} y - y_o} \right) + M_{\alpha k}^{II} \int_{l_c} \frac{f_k(y_o) dy_o}{y - y_o} \right] \right\} + \\ & + \sum_{\alpha} \bar{L}_{i\alpha}^{II} \left[\sum_{\beta} \left(\bar{G}_{\alpha\beta} M_{\beta k}^{II} \frac{\bar{P}_{\alpha}^{II}}{P_{\beta}^{II}} \int_{l_c} \frac{f_k(y_o) dy_o}{\frac{\bar{P}_{\alpha}^{II}}{P_{\beta}^{II}} y - y_o} \right) + \bar{M}_{\alpha k}^{II} \int_{l_c} \frac{f_k(y_o) dy_o}{y - y_o} \right] \right\} + \int_{l_c} h_{lik}(y, y_o) f_k(y_o) dy_o \end{aligned} \quad (19)$$

Pro trhlinu s nezátíženými líci bude levá strana rovnice (19) rovna $-\sigma_{li}^{appl}(y)$, tzn. negovanému napětí (pro $x=0$) které vznikne při působení zatížení na okraji tělesa s hranicí $\partial\Omega$, jež je bez trhlin a dislokací.

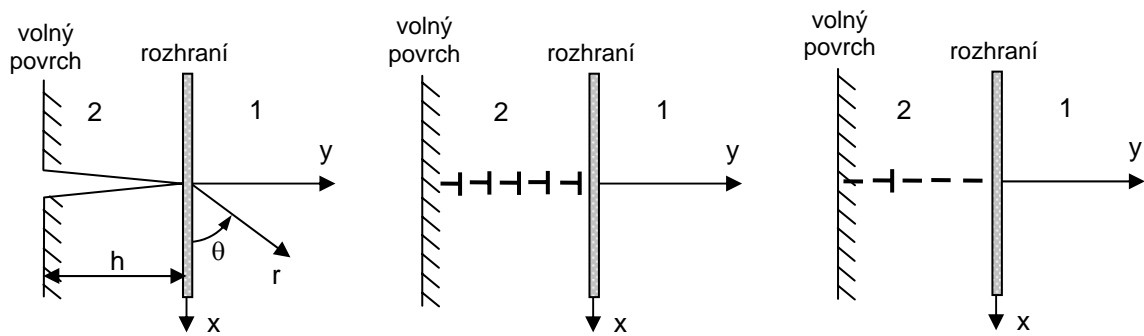
Pro určení h_{lik} a $-\sigma_{li}^{appl}(y)$ je obecně nutno použít nějakou numerickou metodu. Trhlina může být uzavřená na obou koncích (vnitřní trhlina) nebo uzavřená pouze na jednom konci (okrajová trhlina). Ve druhém případě, musí být $f_k(y_o)$ na otevřeném konci nesignulární.

Po stanovení $f_k(y_o)$ je již možné všechny potřebné veličiny (zobecněný součinitel intensity napětí, případně T-napětí) vypočítat. T-napětí je nalezeno po výpočtu σ_{22} (osa y je totožná se směrem trhliny)

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(y) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{\alpha} L_{2\alpha}^{II} \left[\sum_{\beta} \left(G_{\alpha\beta} \bar{M}_{\beta k}^{II} \frac{1}{\bar{P}_{\beta}^{II}} \int_{l_c} \frac{f_k(y_o) dy_o}{\frac{P_{\alpha}^{II}}{\bar{P}_{\beta}^{II}} y - y_o} \right) + \frac{M_{\alpha k}^{II}}{P_{\alpha}^{II}} \int_{l_c} \frac{f_k(y_o) dy_o}{y - y_o} \right] \right\} + \\ & + \sum_{\alpha} \bar{L}_{2\alpha}^{II} \left[\sum_{\beta} \left(\bar{G}_{\alpha\beta} M_{\beta k}^{II} \frac{1}{P_{\beta}^{II}} \int_{l_c} \frac{f_k(y_o) dy_o}{\frac{\bar{P}_{\alpha}^{II}}{P_{\beta}^{II}} y - y_o} \right) + \frac{\bar{M}_{\alpha k}^{II}}{\bar{P}_{\alpha}^{II}} \int_{l_c} \frac{f_k(y_o) dy_o}{y - y_o} \right] \right\} + \int_{l_c} h_{22k}(y, y_o) f_k(y_o) dy_o + \sigma_{22}^{appl}(y) \end{aligned} \quad (20)$$

Kde $h_{22k}(y, y_o)$ je nalezeno stejným způsobem jako $h_{lik}(y, y_o)$ – pomocí MKP analýzy – viz Obrázek 5. T-napětí je potom nalezeno jako $\sigma_{22}(y)|_{y \rightarrow 0^+}$

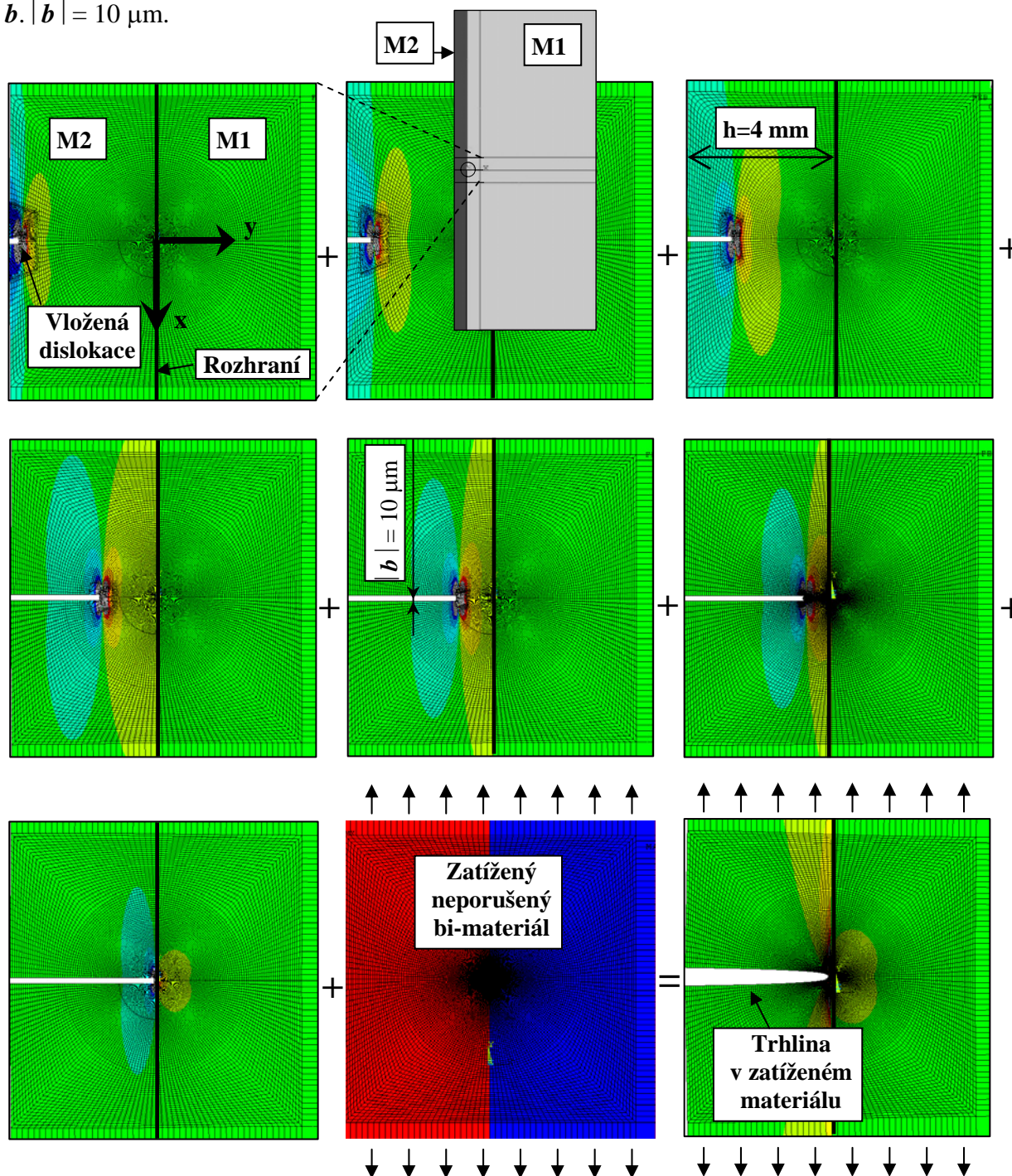
Numerické hodnoty regulární části $h_{22k}(y, y_o)$ a $h_{lik}(y, y_o)$ (vypočítané pomocí MKP) byly proloženy vhodnými funkcemi aby je bylo možné implementovat do integrální rovnice (19) a tu následně řešit.



Obrázek 4. Schema bi-materiálové poloroviny

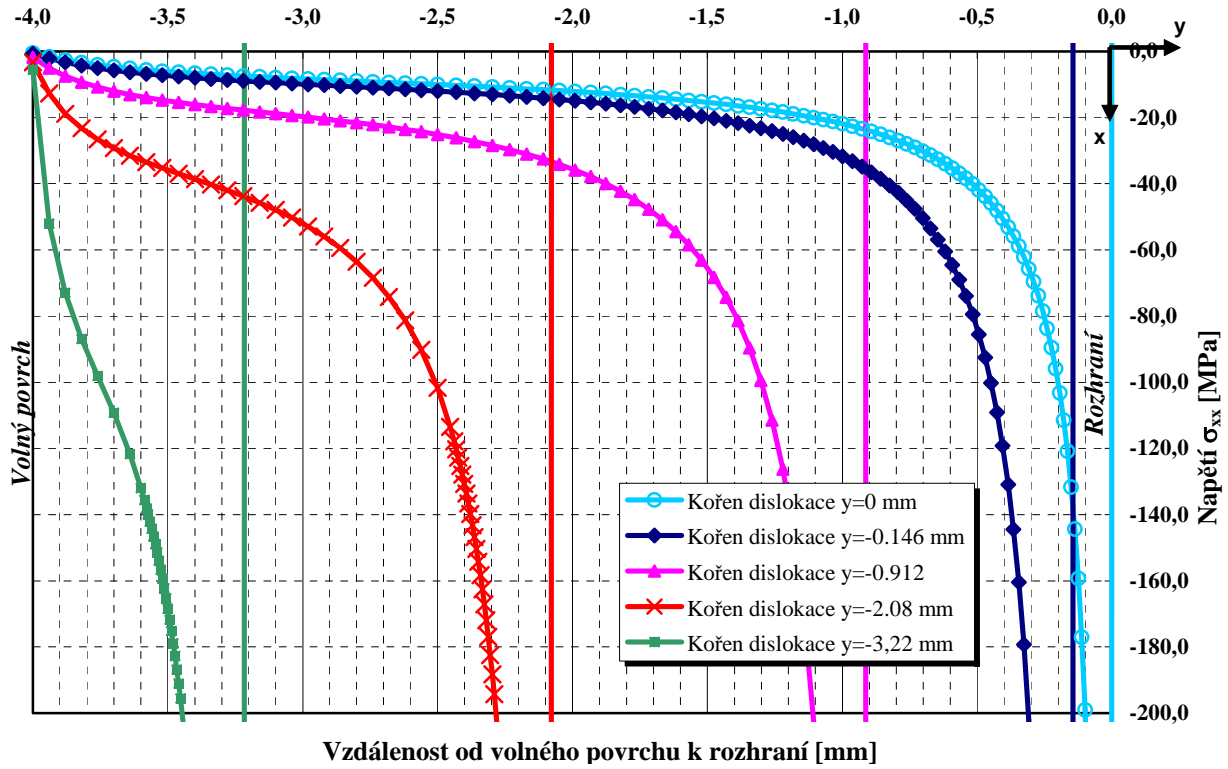
Regulární část řešení pro dislokaci

Regulární část řešení pro dislokaci, nezbytnou do integrální rovnice, získáme pomocí konečnoprvkové analýzy tělesa s vloženou tenkou hranovou dislokací o Burgersově vektoru b . $|b| = 10 \mu\text{m}$.

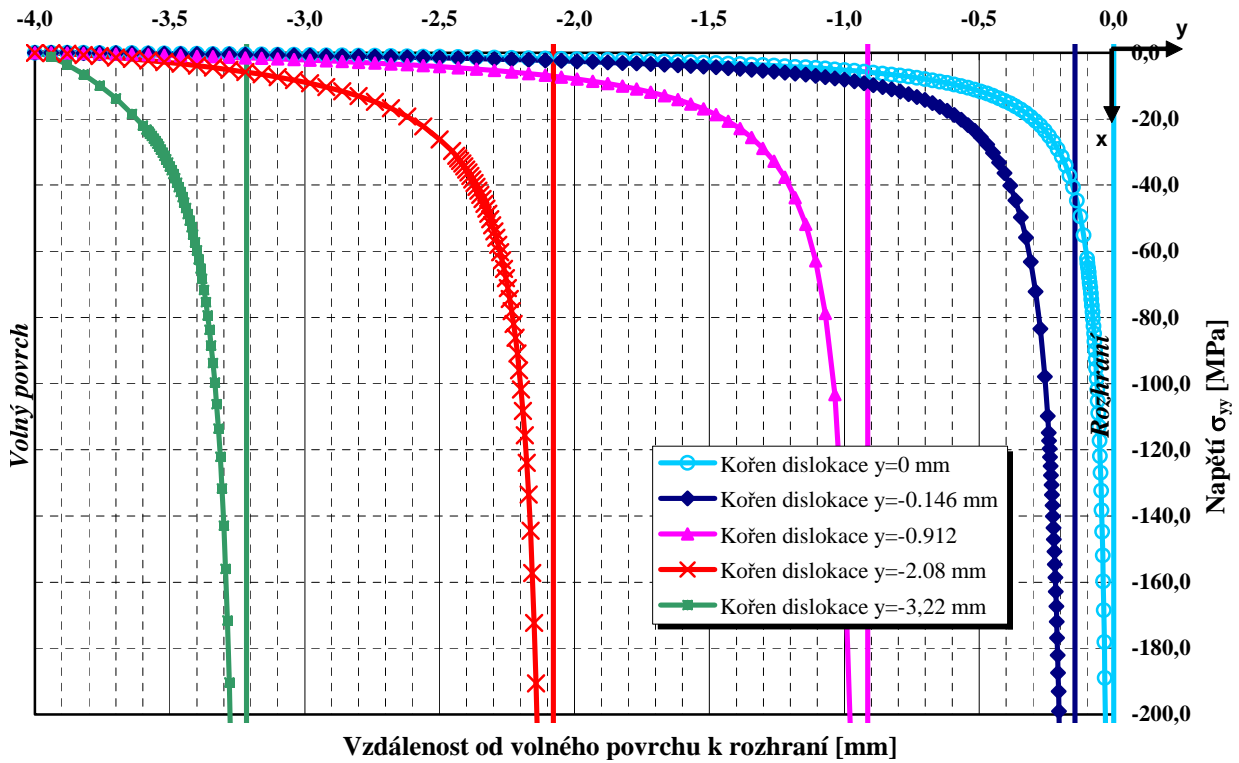


Obrázek 5. Výpočet regulární části fundamentálního řešení pomocí MKP

Na následující straně (Obrázek 6. a Obrázek 7.) jsou znázorněny průběhy napětí σ_{xx} a σ_{yy} na vybraných dislokacích s kořenem vzdáleným od rozhraní o hodnotu y . Je zobrazen pouze průběh napětí od kořene dislokace směrem vlevo (k volnému povrchu).



Obrázek 6. Průběhy napětí $\sigma_{xx}=\sigma_{11}$ podél dislokací s Burgersovým vektorem $b=10 \mu\text{m}$



Obrázek 7. Průběhy napětí $\sigma_{yy}=\sigma_{22}$ podél dislokací s Burgersovým vektorem $b=10 \mu\text{m}$

7. Závěr

Bylo demonstrováno nalezení fundamentálního řešení pro dislokaci pomocí kombinace techniky spojitě rozložených dislokací a MKP. Toto řešení je potřebné pro výpočet zobecněného součinitele intensity napětí a T-napětí, trhliny kolmé na rozhraní dvou anisotropních materiálů. K výpočtu zobecněného součinitele intensity napětí byla využita metoda dvoustavových integrálů, tzv. ψ -integrál. Tento přístup umožňuje získat zobecněný součinitel intensity napětí z pole napětí a posuvů vzdáleného od kořene trhliny, kde jsou již hodnoty získané pomocí MKP dostatečně přesné. Byl dále uveden postup a obecné vztahy pro určení T-napětí, založené na výpočtu dislokační hustoty.

8. Poděkování

Příspěvek byl podpořen grantovými projekty GAČR - 106/05/H008, GAČR 101/05/P290 a GAČR 101/05/0320

9. Literatura

- Babuska, I. & Miller, A. (1984) The post-processing approach in the FEM, Part2: The calculation of stress intensity factors, *Int.Num.Meth. Engng.* Vol. 20, p.1111-1129.
- Desmorat, R. & Leckie, F.A. (1998) Singularities in bi-materials: parametric study of an isotropic/anisotropic joint, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 17, p. 33-52.
- Hills, D.A. & Kelly, P.A. (1996) *Solution of Crack Problems – The Distributed Dislocation Technique*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht – Netherlands.
- Kotoul, M., Ševeček, O. & Profant, T. (2006) Calculation of K-factor and T-stress for crack in anisotropic bimaterials, in: *Proc. of 16th European Conf. of Fracture*, Alexandroupolis.
- Lekhnitskii, S.G. (1963) Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, *Holden-Day*, San Francisco.
- Suo, Z. (1990) Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media, *Proc. R.Soc. London, A* 427, 331-358.