

CONTRIBUTION TO MODELLING OF WHEEL-RAIL CONTACT

J. Švígler, J. Vimmr *

Summary: *The contribution deals with preliminary analysis of the rolling contact between the wheel and rail in a railway vehicle and summarizes the forces that develop in the contact patch. Develop of creep forces at the contact range of two rolling bodies is discussed. The wheel-rail rolling contact problem is studied from an analytical point of view. Determination of creep forces has a great significance because these forces govern the behaviour of a vehicle running and are very important for the dynamics analysis. This problem is solved in wide literature and it may seem unnecessary to deal with that. Unfortunately there is a lot of inaccuracy and mistakes and a precise derivation is mostly missing. The aim of this study is clear definition of basic kinematical and force relations and their sources for creation of smart imagine about this basic problem.*

1. Úvod

Pohyb železničního vozidla je výrazně ovlivňován interakcí mezi kolem a kolejnicí, která generuje okolnosti, které ovlivňují kromě jiného stabilitu pohybu, poškozování povrchů kola a kolejnice, velikost kritické rychlosti, dynamické chování v přímém směru, schopnost vyrovnávat nerovnosti kolejového pásu a pod. Mechanické vlastnosti kontaktu hrají proto významnou úlohu při vyšetřování dynamických vlastností železničních vozidel.

Cílem práce je jasně podat odvození základních kinematických a silových vztahů a jejich zdrojů, se snahou umožnit případným čtenářům vytvoření jasné představy o problému, která je nevyhnutelným základem pro jakoukoliv navazující analýzu pohybu dvojkolí po kolejovém pásu.

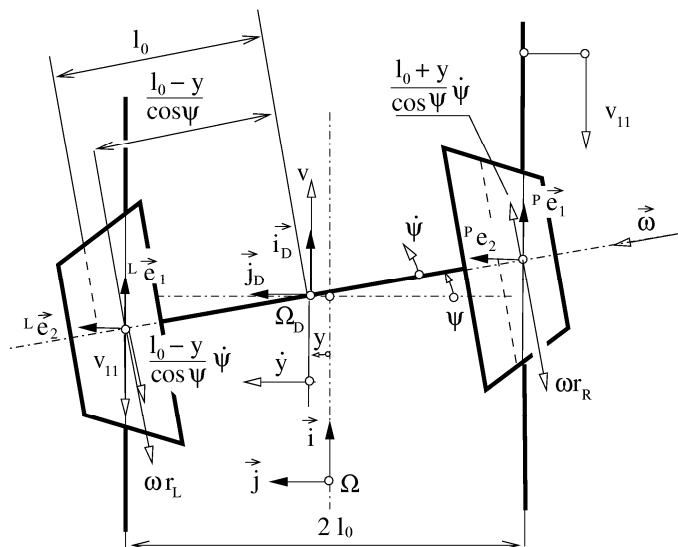
Kalkerova teorie valivého kontaktu těles (Kalker, 1967), je založena na předpokladu, že kontaktní plocha je velmi malá v porovnání s rozměry obou dotýkajících se těles, takže každé z obou těles je možné uvažovat samostatně s vlastním prostorem. Předpokládá se, že v dotykové ploše nevznikají plastické deformace a platí Hookeův zákon. Problém valivého kontaktu může být proto redukován na problém kontaktu geometrického, kde nedochází ke vzájemnému prolínání těles. Vznikající třecí síla je určena Coulombovým zákonem. V Hertzově teorii (Hertz, 1881), je hraniční křivkou dotykové plochy mezi kolem a kolejnicí elipsa a rozložení normálového tlaku nad dotykovou plochou je podle elipsoidu.

Skutečnost, že kola železničních vozidel jsou sprážena do dvojkolí, které je umístěno na dvou kolejnicích, komplikuje kinematicko-geometrickou podmínku kontaktu kola a kolejnice, neboť kontaktní bod se pohybuje napříč šířky kola a to přináší variování poloměrů křivosti dotýkajících se ploch.

* Doc. Ing. Jaromír Švígler, CSc., Ing. Jan Vimmr, Ph.D.: Katedra mechaniky, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň; tel.: +420 377 632 324, fax: +420 377 632 302; e-mail: svigler@kme.zcu.cz

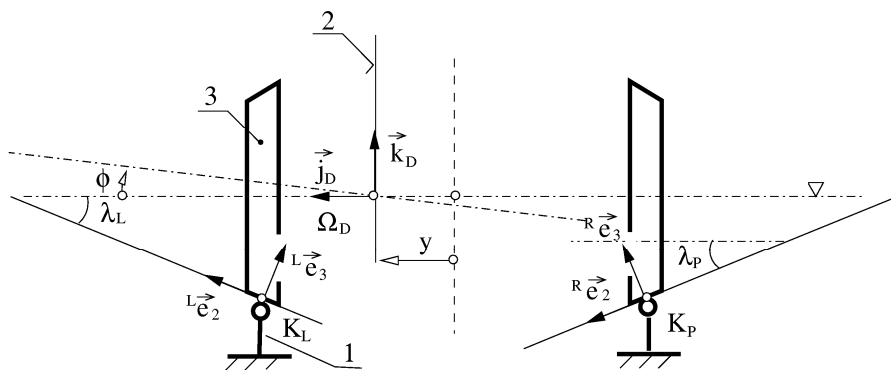
2. Kinematické poměry v bodech kontaktu kola a kolejnice

Dvojkolí koná při pohybu po kolejovém pásu, obr. 1, obecný prostorový pohyb, který můžeme rozložit na unášivý posuvný pohyb a na druhotný sférický pohyb, určený úhly ψ, φ ,



Obr. 1 Kinematické poměry v kontaktních bodech

obr. 2. Pro kinematické řešení použijeme záměnu pohybu obou těles tak, že kolo, otáčející se úhlovou rychlostí ω , znehybníme a kolejnici udělíme rychlost opačnou posuvné rychlosti středu. V důsledku bočního posunutí dvojkolí a jeho natočení kolem svislé osy dochází při pohybu dvojkolí po kolejovém pásu, v dotykových bodech obou kol s kolejnicemi, k porušení kinematické podmínky valení, kdy v těchto bodech vzniknou jisté skluzové rychlosti (creep velocity) a dotykové body přestanou být póly, tak jak je znázorněno na obr.3.



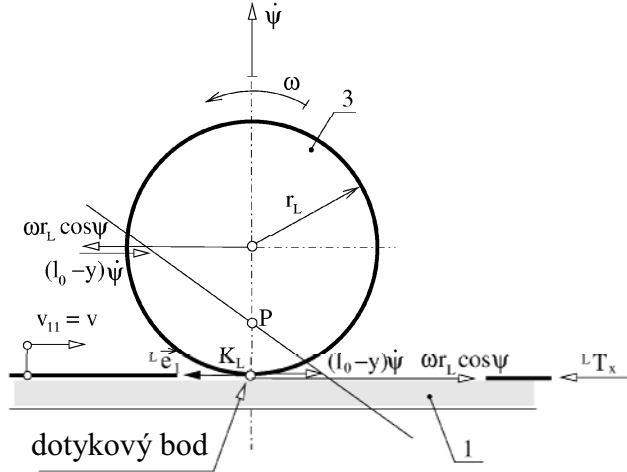
Obr. 2 Vychýlení dvojkolí ve vertikální rovině

Kinematické poměry v dotykových bodech popíšeme pomocí bezrozměrných skluzových součinitelů (creepages) v podélném a v příčném směru a ve směru rotace kolem svislé osy následujícími výrazy

$$\text{pro podélný směr} \quad \gamma_{e_1} = \gamma_1 = \frac{v_{3e_1} - v_{1e_1}}{v_{1e_1}} = \frac{|v_{31}| - |v_{11}|}{|v_{11}|},$$

pro příčný směr $\gamma_{e_2} = \gamma_2 = \frac{v_{3e_2} - v_{1e_2}}{v_{1e_2}} = \frac{|v_{32}| - |v_{12}|}{|v_{11}|}$, (1)

a pro rotaci $\gamma_{e_3} = \gamma_3 = \frac{\omega_{3e_3} - \omega_{1e_3}}{v_{1e_1}} = \frac{|\omega_{33}| - |\omega_{13}|}{|v_{11}|}$,



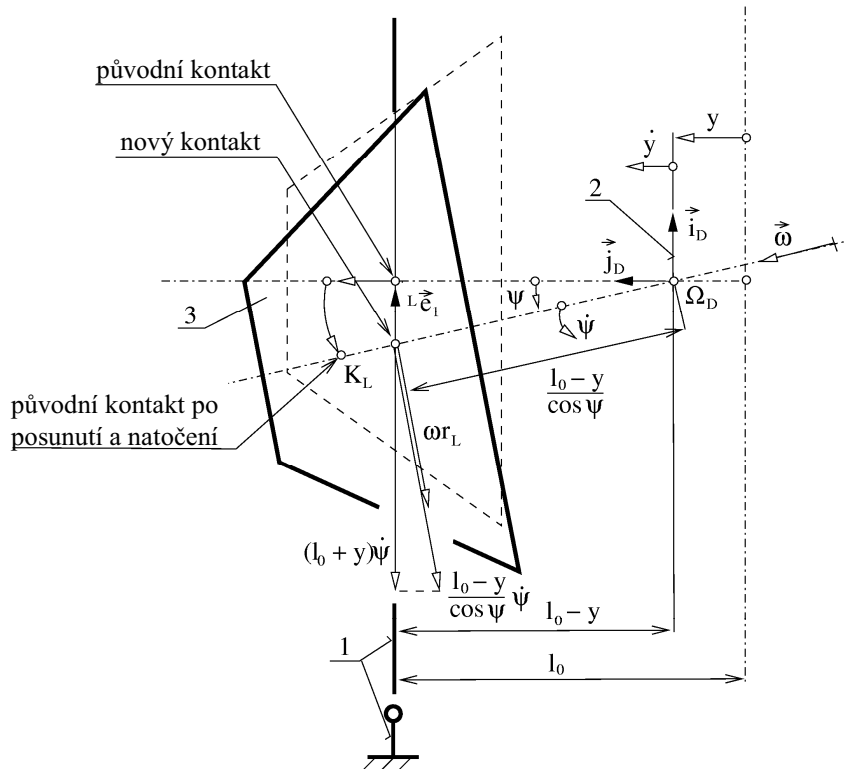
Obr. 3 Pohyb levého kola po kolejnici

kde ${}^P v_{ie_j} = {}^P v_{ij} \wedge i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$, znamená rychlost i -tého tělesa ve směru j -té souřadnicové osy prostoru, pravého (index P) nebo levého (index L), kola. Rychlost $v = -v_{11}$ je rychlost středu dvojkolí. Označením $R_{P_{e_j}} \equiv ({}^P \vec{e}_1, {}^P \vec{e}_2, {}^P \vec{e}_3)$, $R_{L_{e_j}} \equiv ({}^L \vec{e}_1, {}^L \vec{e}_2, {}^L \vec{e}_3)$ rozumíme prostory umístěné v dotykových bodech, které jsou tvořeny repery \vec{e}_j . Rychlost kola v dotykovém bodu je znázorněna na obr. 4. Řešení zjednodušíme předpokladem, že vychýlení y budeme uvažovat velmi malé a rovněž tak budeme kuželovitost nákolku kola určenou úhlem λ_L , resp. λ_P uvažovat velmi malou. Potom pro rychlosti kol v kontaktních bodech K_L, K_P dostaneme

$$\begin{aligned} {}^L \vec{v}_{31} &= -\omega r_L - l_0 \dot{\psi} = -v \frac{r_L}{r} - l_0 \dot{\psi} , \\ {}^P \vec{v}_{31} &= -v \frac{r_P}{r} + l_0 \dot{\psi} , \\ {}^L v_{11} &= {}^P v_{11} = -v . \end{aligned} \tag{2}$$

Pro skluzové součinitele, rov. (1), platí

$$\begin{aligned} {}^L \gamma_1 &= \frac{1}{v} \left(-v + v \frac{r_L}{r} + l_0 \dot{\psi} \right) , \\ {}^P \gamma_1 &= \frac{1}{v} \left(-v + v \frac{r_P}{r} - l_0 \dot{\psi} \right) . \end{aligned} \tag{3}$$



Obr. 4 Detail natočení levého kola v horizontální rovině

Podobně pro rychlosti v příčném směru určeném ${}^P e_2$, ${}^L e_2$, platí vztahy

$${}^L v_{32} = \dot{y} \cos(\lambda_L + \Phi) - \omega r_L \sin \psi \cos(\lambda_L + \Phi) - \frac{(l_0 - y)}{\cos \psi} \dot{\psi} \sin \psi \cos(\lambda_L + \Phi),$$

$${}^P v_{32} = \dot{y} \cos(\lambda_P - \Phi) - \omega r_P \sin \psi \cos(\lambda_P - \Phi) + \frac{(l_0 + y)}{\cos \psi} \dot{\psi} \sin \psi \cos(\lambda_P - \Phi), \quad (4)$$

$${}^L v_{12} = 0, \quad {}^P v_{12} = 0.$$

které po úpravě přejdou na tvar

$${}^L v_{32} = \dot{y} - \omega r_L \psi - l_0 \dot{\psi} \psi, \quad (5)$$

$${}^P v_{32} = \dot{y} - \omega r_P \psi + l_0 \dot{\psi} \psi$$

a pro skluzové součinitele dostaneme

$${}^L \gamma_2 = \frac{1}{v} \left(\dot{y} - v \frac{r_L}{r} \psi - l_0 \dot{\psi} \psi \right), \quad (6)$$

$${}^P \gamma_2 = \frac{1}{v} \left(\dot{y} - v \frac{r_P}{r} \psi + l_0 \dot{\psi} \psi \right).$$

Pro rotační pohyb, spin, kolem svisté osy určené ${}^L\vec{e}_3, {}^P\vec{e}_3$ platí

$$\begin{aligned} {}^L\omega_{33} &= -\omega \sin \lambda_L + \dot{\psi} \cos(\lambda_L + \Phi) = -\omega \lambda_L + \dot{\psi} , \\ {}^P\omega_{33} &= \omega \sin \lambda_P + \dot{\psi} \cos(\lambda_P - \Phi) = \omega \lambda_P + \dot{\psi} , \\ {}^L\omega_{13} &= 0 , \quad {}^P\omega_{13} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

a skluzoví součinitelé jsou dány výrazy

$$\begin{aligned} {}^L\gamma_3 &= \frac{1}{v}(-\omega \lambda_L + \dot{\psi}) = \frac{1}{v} \left(-\frac{v}{r} \lambda_L + \dot{\psi} \right) , \\ {}^P\gamma_3 &= \frac{1}{v} \left(\frac{v}{r} \lambda_P + \dot{\psi} \right) . \end{aligned} \tag{8}$$

3. Skluzové síly

Pro vyjádření skluzových sil a skluzových momentů, které závisí na skluzové rychlosti, budeme předpokládat malé hodnoty skluzových součinitelů uvedených v předcházející kapitole a tím lineární závislost mezi těmito součiniteli a skluzovými rychlostmi. Použijeme v tomto stadiu řešení Kalkerovy teorie (Kalker, 1967, 1980), která podle (Vijay & Dukkipati, 1984) str. 115 předpokládá podle práce De Pater (1962), že pro malé hodnoty skluzových součinitelů je oblast skluzu v dotykové ploše tak malá, že je možné její vliv zanedbat. Skluzové silové účinky v prostoru $R_{e_j} \equiv (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ jsou určeny v práci Vijay & Dukkipati (1984) str. 117, vztahy

$$\begin{aligned} T_x &= f_{11} \gamma_1 , \\ T_y &= -f_{22} \gamma_2 - f_{23} \gamma_3 , \\ M_z &= f_{23} \gamma_2 - f_{33} \gamma_3 , \end{aligned} \tag{9}$$

kde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ jsou součinitelé skluzu v podélném a příčném směru a pro rotaci kolem svisté osy. Podle (Hertz, 1881), má kontaktní plocha tvar elipsy, pro jejíž poloosy a, b v podélném a příčném směru platí, Vijay & Dukkipati (1984) str. 106,

$$\begin{aligned} a &= m [3\pi N (K_1 + K_2) / 4K_3]^{1/3} , \\ b &= n [3\pi N (K_1 + K_2) / 4K_3]^{1/3} , \end{aligned} \tag{10}$$

kde N je celková normálová síla přenášená kontaktní plochou a konstanty jsou dány vztahy

$$K_1 = \frac{1 - \sigma_1^2}{\pi E_1}, \quad K_2 = \frac{1 - \sigma_2^2}{\pi E_2}, \quad K_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R'_3} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right), \quad (11)$$

$$K_4 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R'_3} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R'_3} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \cos 2\alpha \right]^{1/2},$$

kde R_3 je poloměr valení kola, R'_3 je příčný poloměr křivosti kola v kontaktním bodě, R_1 je poloměr křivosti profilu kolejničky v bodě kontaktu, R'_1 je příčný poloměr křivosti profilu kolejničky v bodě kontaktu, σ_3 a σ_1 jsou Poissonovy konstanty materiálu kola a kolejničky a E_2 , E_1 jsou Youngovy moduly pružnosti materiálů kola a kolejničky. Koeficienty m a n závisí na poměru K_4/K_3 a jsou v práci Vijay & Dukkipati (1984) str. 106, tabelovány. Úhel α , svírají normálové roviny ploch s křivostmi $\frac{1}{R_3}$ a $\frac{1}{R_1}$. Výraz pro K_4 je v citované literatuře uveden chybně.

Podle Kalkerovy lineární teorie jsou skluzoví součinitelé f_{11} , f_{22} , f_{23} a f_{33} definovány výrazy $f_{11} = ab G C_{11}$, $f_{22} = ab G C_{22}$, $f_{23} = (ab)^{3/2} G C_{23}$, $f_{33} = (ab)^2 G C_{33}$, kde G je modul pružnosti ve smyku a C_{ij} jsou skluzové koeficienty. Po dosazení do rov. (9) dostaneme v bodech dotyku levého a pravého kola pro skluzové síly v podélném a v příčném směru a pro spinový moment následující výrazy

$$\begin{aligned} {}^L T_x &= \frac{{}^L f_{11}}{v} \left[-v + v \frac{r_L}{r} + l_0 \dot{\psi} \right], & {}^P T_x &= \frac{{}^P f_{11}}{v} \left[-v + v \frac{r_P}{r} - l_0 \dot{\psi} \right], \\ {}^L T_y &= -\frac{{}^L f_{22}}{v} \left(\dot{y} - v \frac{r_L}{r} \psi - l_0 \dot{\psi} \psi \right) - \frac{{}^L f_{23}}{v} \left(-\frac{v}{r} \lambda_L + \dot{\psi} \right), \\ {}^P T_y &= -\frac{{}^P f_{22}}{v} \left(\dot{y} - v \frac{r_P}{r} \psi + l_0 \dot{\psi} \psi \right) - \frac{{}^P f_{23}}{v} \left(\frac{v}{r} \lambda_P + \dot{\psi} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$${}^L M_z = {}^L f_{23} {}^L \gamma_2 - {}^L f_{33} {}^L \gamma_3 = \frac{{}^L f_{23}}{v} \left(\dot{y} - v \frac{r_L}{r} \psi - l_0 \dot{\psi} \psi \right) - \frac{{}^L f_{33}}{v} \left(-\frac{v}{r} \lambda_L + \dot{\psi} \right),$$

$${}^P M_z = {}^P f_{23} {}^P \gamma_2 - {}^P f_{33} {}^P \gamma_3 = \frac{{}^P f_{23}}{v} \left(\dot{y} - v \frac{r_P}{r} \psi + l_0 \dot{\psi} \psi \right) - \frac{{}^P f_{33}}{v} \left(\frac{v}{r} \lambda_P + \dot{\psi} \right).$$

4. Silové účinky působící na dvojkolí

Ze silových účinků, působících na dvojkolí v dotykových bodech mezi koly dvojkolí a kolejnici kolejevého pásu, jsou významné pouze příčná síla a spinový moment, které jsou dány v prostoru $R_D \equiv (\vec{i}_D, \vec{j}_D, \vec{k}_D)$ následujícími vztahy

$${}_{R_D}T_y = -\frac{1}{v} \left[{}^L f_{22} \left(\dot{y} - v \frac{r_L}{r} \dot{\psi} - l_0 \dot{\psi} \psi \right) + {}^L f_{23} \left(-\lambda_L \frac{v}{r} + \dot{\psi} \right) + \right. \\ \left. + {}^P f_{22} \left(\dot{y} - v \frac{r_P}{r} \dot{\psi} + l_0 \dot{\psi} \psi \right) + {}^P f_{23} \left(\lambda_P \frac{v}{r} + \dot{\psi} \right) \right]. \quad (13)$$

$${}_{R_D}M_z = \frac{1}{v} \left[\left[{}^L f_{22} \left(\dot{y} - v \frac{r_L}{r} \dot{\psi} - l_0 \dot{\psi} \psi \right) + {}^L f_{23} \left(-\frac{v}{r} \lambda_L + \dot{\psi} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - {}^P f_{22} \left(\dot{y} - v \frac{r_P}{r} \dot{\psi} + l_0 \dot{\psi} \psi \right) - {}^P f_{23} \left(\frac{v}{r} \lambda_P + \dot{\psi} \right) \right] l_0 \psi + \right. \\ \left. + \left[-{}^L f_{11} \left(-v + v \frac{r_L}{r} + l_0 \dot{\psi} \right) + {}^P f_{11} \left(-v + v \frac{r_P}{r} - l_0 \dot{\psi} \right) \right] l_0 + \right. \\ \left. + {}^L f_{23} \left(\dot{y} - v \frac{r_L}{r} \dot{\psi} - l_0 \dot{\psi} \psi \right) - {}^L f_{33} \left(-\frac{v}{r} \lambda_L + \dot{\psi} \right) + \right. \\ \left. + {}^P f_{23} \left(\dot{y} - v \frac{r_P}{r} \dot{\psi} + l_0 \dot{\psi} \psi \right) - {}^P f_{33} \left(\frac{v}{r} \lambda_P + \dot{\psi} \right) \right]. \quad (14)$$

Rov. (13) a (14) představují pro silové účinky, působící na dvojkolí, parametrické rovnice s parametry y, ψ .

Pro modifikaci smykových (creepových) sil se používá Johnson-Vermuelenova teorie, (Iwnicki, 2003) str. 892, která upravuje velikost výsledné tečné síly působící mezi kolem a kolejnicí následujícím vztahem

$$\tilde{T} = fN \left[\frac{T}{fN} - \frac{1}{3} \left(\frac{T}{fN} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\frac{T}{fN} \right)^3 \right], \quad \text{pro } T \leq 3fN, \\ \tilde{T} = fN, \quad \text{pro } T > 3fN, \quad (15)$$

kde $T = \sqrt{(T_x^2 + T_y^2)}$, f je koeficient smykového tření v kontaktním bodě a N je normálová síla přenášená kontaktním bodem. Pro složky modifikovaných creepových sil potom platí

$$\tilde{T}_x = \frac{T_x}{T} \tilde{T}, \quad \tilde{T}_y = \frac{T_y}{T} \tilde{T}. \quad (16)$$

Modifikace tečné síly v kontaktu je uplatňována z důvodu linearizace creepových sil, kdy velikost výsledné tečné síly by mohla přesáhnout hraniční hodnotu fN , což je z fyzikálního hlediska nepřijatelné.

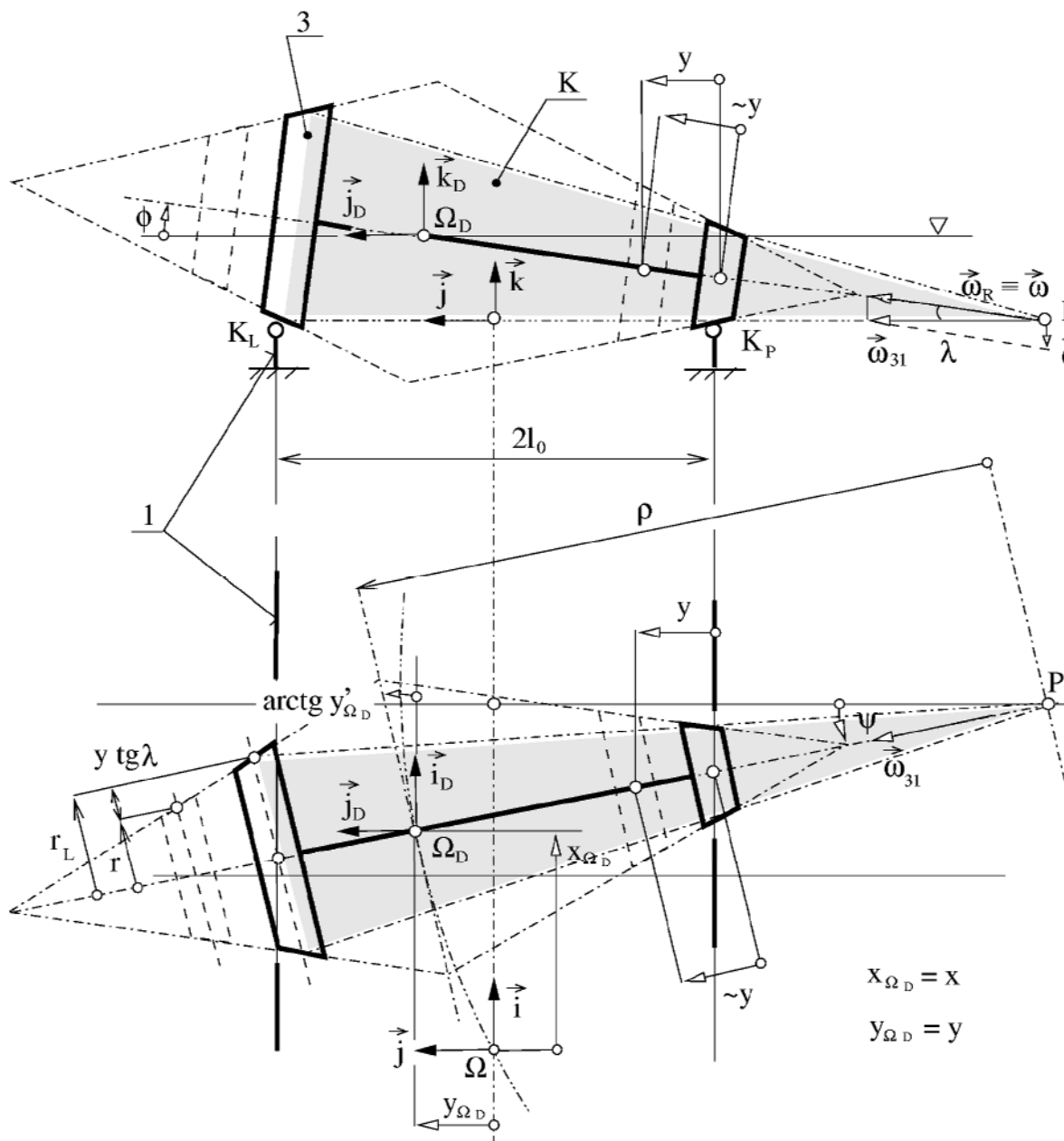
5. Modelování pohybu dvojkolí v přímém kolejovém pásu

Jsou řešeny dvě úlohy. V prvním případě je dvojkolí udělen kinematicky předepsaný pohyb a jsou hledány silové účinky a ve druhé úloze je řešen dynamický pohyb dvojkolí s působením budících silových účinků.

5.1 Kinematicky předepsaný pohyb

Kinematické poměry dvojkolí jsou dány, obr. 5, valením polodiového kužele K po kolejničovém pásu s úhlovou rychlostí

$$\omega_{31} = \omega_R + \omega_S, \quad (17)$$



Obr. 5 Pohyb dvojkolí v kolejovém pásu

kde $\omega_R = \omega$ je úhlová rychlost rotačního pohybu dvojkolí a $\omega_S = \psi$ je úhlová rychlost spinového pohybu kolem svislé osy. Za předpokladu přesného kinematického valení platí pro rychlosti v bodech K_L , K_P vztahy

$$v_{K_L} = \omega r_L - \omega_S (\rho + l_0), \quad v_{K_P} = \omega r_P - \omega_S (\rho - l_0), \quad (18)$$

kde ρ je poloměr křivosti dráhy středu dvojkolí Ω_D . Po dosazení za $r_L = r + y \operatorname{tg} \lambda$, $r_P = r - y \operatorname{tg} \lambda$ a po použití výrazu

$$\rho = \frac{\sqrt[3]{(1 + y'^2)^3}}{y''}, \quad (19)$$

s tím, že $y'^2 \ll 1$ a tedy $\rho = \left| \frac{1}{y''} \right| \Rightarrow \frac{1}{\rho} = -y''$, dostaneme pro pohyb dvojkolí výraz, který po úpravě, $x = v \cdot t$, přejde na tvar

$$\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{r l_0} = -y'', \quad (20)$$

$$y = \sqrt{y_0^2 + \frac{y_0'^2}{\Omega^2}} \sin(\Omega vt + \gamma). \quad (21)$$

Protože $\operatorname{tg} \psi = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$, jsou natočení dvojkolí a jeho úhlová rychlost kolem svislé osy dány výrazy

$$\psi = \operatorname{arctg} \Omega \sqrt{y_0^2 + \frac{y_0'^2}{\Omega^2}} \cos(\Omega vt + \gamma), \quad (22)$$

$$\dot{\psi} = - \frac{v \Omega^2 \sqrt{y_0^2 + \frac{y_0'^2}{\Omega^2}} \cdot \sin(\Omega vt + \gamma)}{1 + \left[\Omega \sqrt{y_0^2 + \frac{y_0'^2}{\Omega^2}} \cdot \cos(\Omega vt + \gamma) \right]^2}. \quad (23)$$

5.2 Dynamický pohyb

Pohyb dvojkolí po přímé trati je složený z dopředného pohybu, z příčného pohybu a z rotace kolem svislé osy. Nejvýznamnějšími pohyby jsou příčný a spinový pohyb. V dalším řešení budeme proto uvažovat dvojkolí se 2 stupni volnosti, jehož poloha je určena zobecněnými souřadnicemi $q_1 = y$, $q_2 = \psi$. Zavedeme setrvačné účinky působící na dvojkolí a sestavíme vlastní pohybové rovnice dvojkolí, které využijeme pro simulaci pohybu dvojkolí na přímé trati

$$m \ddot{y} - {}^L T_y - {}^P T_y + \frac{2N \lambda y}{l_0} = 0, \quad (24)$$

$$I_z \ddot{\psi} - ({}^L T_y - {}^P T_y) l_0 \psi - ({}^L T_x - {}^P T_x) l_0 - {}^L M_z - {}^P M_z = 0, \quad (25)$$

kde přidáný výraz $2N \lambda y / l_0$ je nazýván gravitační tuhostí (Iwnicki, 2003) str. 891 a jeho působením se dvojkolí, po vychýlení ze statické rovnovážné polohy, vrací zpět do výchozí polohy.

6. Numerická simulace pohybu dvojkolí v přímém kolejovém pásu

V první části bylo provedeno numerické vyčíslení vztahů (13) a (14) pro příčnou sílu a spinový moment pro předepsaný kinematický pohyb, rov. (21) a (22), které určili pohyb dvojkolí. Tím jsme získali představu o závislosti těchto silových účinků na poloze dvojkolí v přímé trati. Toto řešení je nazváno kinematickým pohybem.

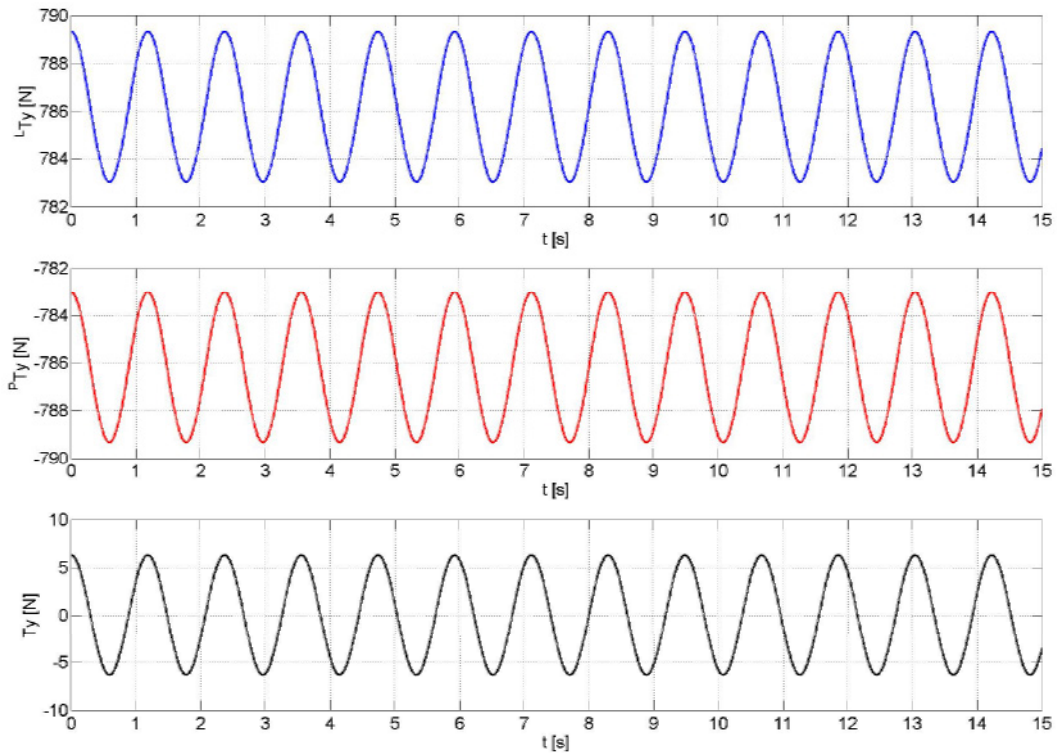
Ve druhé části byl, na základě pohybových rovnic (24) a (25) vytvořen výpočtový model v systému MATLAB, který umožňuje simulovat a vyšetřovat chování dvojkolí při průjezdu po přímé trati. Tuto úlohu jsme nazvali dynamickým pohybem. Výpočty byly provedeny pro následující parametry dvojkolí, kolejnice a kolejového pásu

$$R_1 = 0.4575 m, R'_1 = 100 m, R_2 = \infty, R'_2 = 0.3 m, \alpha = 0^\circ, l_0 = 0.750 m, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.25, \quad (26)$$

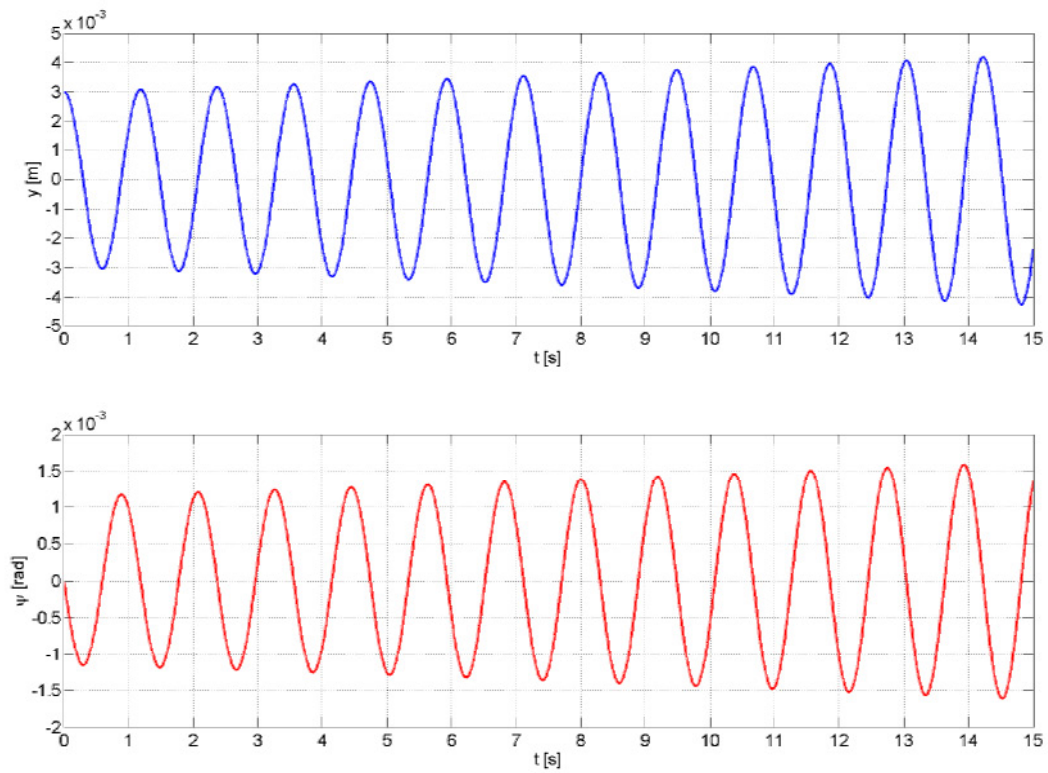
$$E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^{11} Pa, \quad m = 1022 kg, \quad N = 5110 N, \quad I_z = 678 kgm^2, \quad f = 0.2.$$

Pomocí vztahů (11) byly nalezeny hodnoty koeficientů $m = 1.128$ a $n = 0.893$ vystupujících ve vztazích (10). Na základě vypočteného poměru $\frac{b}{a}$ byly odečteny tabelizované hodnoty creepových a spinových koeficientů $C_{11} = 4.36$, $C_{22} = 3.99$, $C_{23} = 1.75$ a $C_{33} = 1.04$. Dosazením do výrazů (13) a (14) jsme získali silové účinky, které při předepsaném kinematickém pohybu v první části řešení byly požadovanými výsledky a při řešení dynamické úlohy představovaly v pohybových rovnicích časově proměnné budící účinky.

Získané výsledky jsou pro rychlost dvojkolí 50 kmh^{-1} , při předepsaném kinematickém pohybu, znázorněny na obr. 6. Na prvních dvou diagramech jsou znázorněny účinky působící na levé a pravé kolo a na dolním diagramu je celkový účinek, působící na dvojkolí. Průběh vychylky a natočení dvojkolí pro počáteční vychylku 3 mm a nulové natočení, pro jinak stejné hodnoty, jsou, opět pro dopřednou rychlost 50 kmh^{-1} , znázorněny pro dynamický pohyb na obr. 7, ze kterého je dobře patrný nestabilní pohyb dvojkolí. Rovněž průběh příčných sil, podobně je tomu i u spinového momentu, je nestabilní.



Obr. 6 Průběh příčných sil u předepsaného pohybu pro $v = 50 \text{ kmh}^{-1}$



Obr. 7 Průběh výchylky a natočení dvojkolí u dynamického pohybu pro $v = 50 \text{ kmh}^{-1}$

7. Závěr

Byla provedena úvodní analýza valivého dotyku kol železničního dvojkolí s kolejnicemi a byly určeny silové účinky působící v kontaktních bodech kola a kolejového pásu a následně i výsledné silové účinky působící na dvojkolí. Postup při určování kinematických vztahů v kontaktních bodech a následné stanovení creepových sil a momentů byl podrobně popsán a odůvodněn. V kinematické úloze byl pro předepsaný pohyb dvojkolí v kolejovém pásu určen průběh silových účinků. Pro stejné dvojkolí byla řešena dynamická úloha pro počáteční výchylku 3 mm a pro dopřednou rychlost, stejně jako u úlohy kinematické, 50 kmh^{-1} . Pohyb dvojkolí byl nestabilní a podobně nestabilní byl i průběh silových účinků. Při dopředné rychlosti dvojkolí 5 kmh^{-1} je za jinak stejných podmínek pohyb dvojkolí stabilní.

Zjištěné závěry mohou posloužit pro případné navazující dynamické modelování pohybu železničního vozidla a i pro hlubší analýzu kontaktu železničního kola s kolejnicí při zahrnutí proměnného příčného profilu kola a hlavy kolejnice.

8. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory projektu MŠMT 1M0519 – Výzkumné centrum kolejových vozidel.

9. Literatura

- Hertz, H.: Über die Berührung fester elastischen Körper. *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. 92, 1881, pp. 156-171.
- Iwnicki, S.: Simulation of wheel – rail contact forces. *Fatigue Fract Engng Mater Struct* 26. Blackwell Publishing Ltd. Manchester, 2003, pp. 887-900.
- Guang, Y.: Dynamic analysis of railway wheelsets and complete vehicle systems. *Thesis Delft University of Technology*. Delf 1993. ISBN 90-370-0080-0.
- Kalker, J.J.: On the Rolling Contact of Two Elastic Bodies in the Presence of Dry Friction. *Doctor Thesis*. Leiden 1967.
- Kalker, J.J.: Review of Wheel-Rail Rolling Contact Theories, The General Problem of Rolling Contact. Applied Mechanics Division, *American Society of Mechanical Engineers*, Vol. 40, New York, 1980, pp. 77-92.
- Vijay K. Garg, Rao V. Dukkipati: Dynamics of Railway Vehicle Systems. *Academic publisher*, London, 1984.
- De Pater, A.D.: On the reciprocal pressure between two bodies. *Proc. Symp. Rolling Contact Phen*, Elsevier, Amsterdam 1962, pp. 29-75.