National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2006
Svratka, Czech Republic, May 15 – 18, 2006
paper no. 180

NUMERICAL MODELING OF QUARRY-MASONRY WITH APPLICATION TO CHARLES BRIDGE

J. Sýkora*, J. Vorel*, M. Šejnoha*

Summary: *This paper deals with numerical modeling of quarry masonry on mesostructural (mesoscopic) level and its applications. The outputs of numerical simulations are compared with the experimental results carried out in the Klokner Institute on the same structural specimen. From the material point of view, the quarry-stone blocks and mortar joints are viewed as quasi-brittle materials. This material feature manifests itself by the macro-cracks growth and softening behavior. Describing the initiation and propagation of cracks requires the definition of fracture energy. The homogenization techniques of thermomechanical parameters (thermal conductivity and moisture permeability) applied to a periodic unit cell (PUC) are addressed in the last section. The results of this work are employed in the thermomechanical analysis of the Charles Bridge in Prague.*

1. Úvod

Autoři této práce měli možnost se podílet na počítačové analýze Karlova mostu. Na principu konstrukce numerického modelu mostu [Šejnoha J. a kol., 2003] je vysvětlena logická struktura této práce.

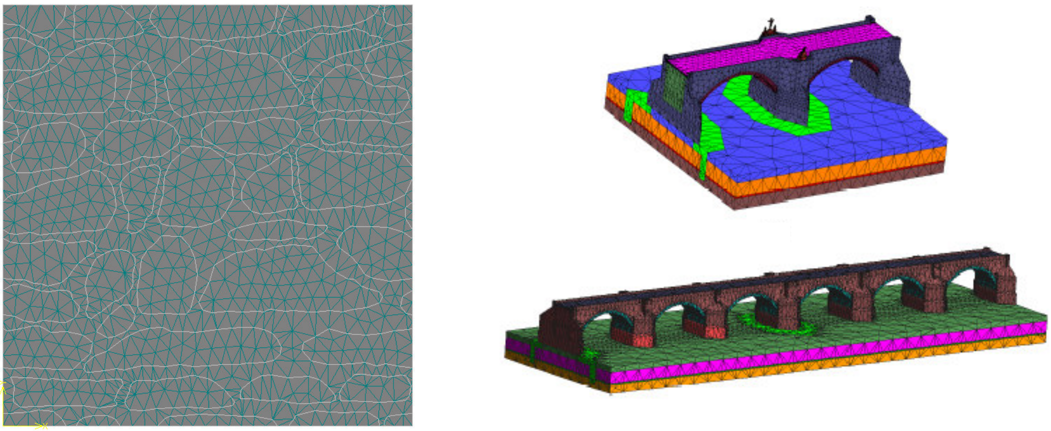
1) Model je dvouúrovňový.

2) *První úroveň*, označovaná jako mezostrukturální či mezoskopická, slouží k zjištění efektivních termomechanických vlastností zdiva pro materiálový bod, a to jak pro zdivo opukové, tak pro zdivo pískovcové. Oba druhy zdiva se liší nejen materiálovými vlastnostmi jednotlivých složek (kamene a malty), ale i strukturním uspořádáním. Pro náhodně uspořádanou strukturu se vytváří tzv. *PUC* (Periodic Unit Cell) obvykle pomocí statistických deskriptorů. Pokud podklady pro plně statistický přístup nejsou k dispozici, využívají se k sestrojení *PUC* údaje z vyhodnocených jádrových vrtů a popisné informace o zdivu uvedené při vyhodnocení kopaných sond. Vhodným počítačovým modelem lomového – opukového zdiva na mezoskopické úrovni (obr. 1a) pro simulaci termomechanické odezvy *PUC* se zabývá článek *2*.

3) Na mezoúrovni model respektuje *kvazikřehké* vlastnosti jak kamene, tak malty. Výsledkem mezostrukturálních počítačových simulací jsou zatěžovací dráhy, vyjadřující nelineární závislost efektivních (průměrných, makroskopických) napětí na

* Ing. Jan Sýkora, Ing. Jan Vorel, Doc. Ing. Michal Šejnoha, Ph.D.: ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Thákurova 7, 166 29 Praha 6 – Dejvice, e-mail: xsykorj3@seznam.cz

efektivních (průměrných) deformacích. Z nich lze pak sestrojit hranice porušení [Vorel, 2005] . Dalšími získanými efektivními materiálovými parametry jsou lomová energie nebo efektivní součinitel tepelné vodivosti popsaný v článku 4.



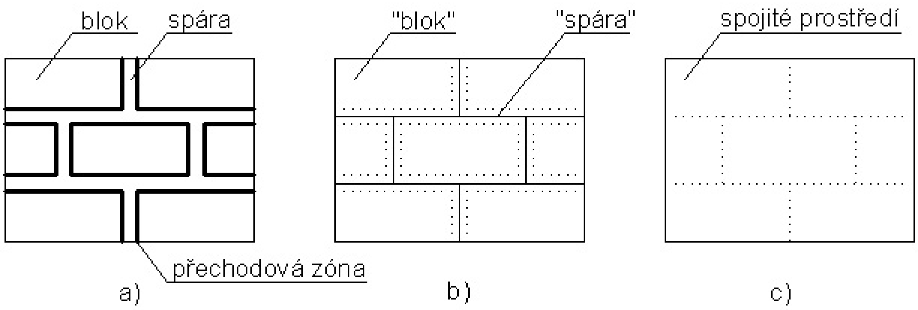
Obr. 1: (a) Mezoskopický počítačový model opukového zdiva;
(b) Makroskopický model Karlova mostu

4) *Druhá úroveň* (makroskopická) (obr. 1b) využívá materiálových závislostí z mezoskopické úrovně. Opukové/pískovcové zdivo je tedy v makroskopickém modelu uvažováno v počátečním neporušeném stavu jako homogenní anizotropní prostředí s efektivními termomechanickými materiálovými parametry.

Z výše uvedeného je zřejmé, že tato práce je zaměřená na mezoúroveň. Makroskopický počítačový model Karlova mostu je řešen v práci [Šejnoha J. a kol., 2005].

2. Analýza počítačových modelů lomového zdiva

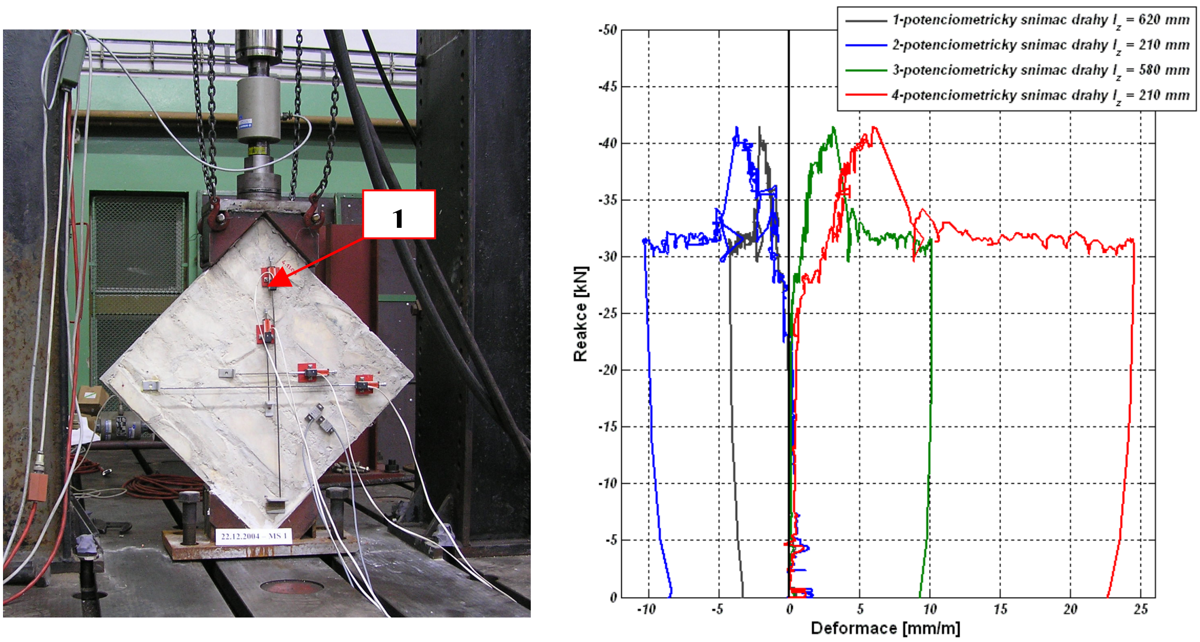
Zdivo je materiál, který se projevuje rozdílnými směrovými mechanickými vlastnostmi (anizotropie), jejichž příčinou je rozložení spár ve zdivu a které fungují jako roviny porušení [Lourenço a kol., 1998]. Počítačové modelování zdiva může být pojato z hlediska *mezostrukturálního*, kde se každá složka zdiva modeluje zvlášť (bloky a spáry), nebo z hlediska *makrostrukturálního*, kde je zdivo modelováno jako spojité prostředí. V závislosti na míře přesnosti a zjednodušení je možné použít tyto typy počítačových modelů (obr. 2):



Obr. 2: Typy modelů pro zdivo: (a) podrobný numerický model;
(b) zjednodušený numerický model; (c) makromodel

Jeden modelový princip nemůže být preferován nad jiným, protože pro uvedené přístupy existují rozdílné aplikace. Podrobný, popř. zjednodušený počítačový model se používá pro lepší pochopení mechanického chování zdiva na mezostrukturální úrovni. Model potřebuje více vstupních informací, generuje se složitější síť konečných prvků, tím pádem je více časově a hardwarově náročnější. Modelovaná konstrukce musí mít přijatelné rozměry, aby se dal problém vůbec spočítat. Makromodel je použitelný na konstrukce, které jsou tvořené dostatečně velkými rozměry. Modelování konstrukce tímto typem modelu je více prakticky orientováno a je méně náročné na čas a hardwarové prostředky.

Vývoj spolehlivého a výstižného počítačového modelu, který je založen na důkladném materiálovém popisu a vlastní kontrole dat, nesmí opominout srovnání s dostatečným počtem experimentů. Jsou to experimenty zděných vzorků a jejich komponent (kamenů, popř. cihel a malt), které jsou řízeny deformací. Tento typ řízení experimentů umožňuje získat sestupnou větev pracovního diagramu a tak plně porozumět mechanismu porušení. K dispozici jsme měli tlakovou zkoušku provedenou na opukovém zdivu v Kloknerově ústavu. Jako srovnávací údaj pro numerické simulace byl vybrán pracovní diagram získaný pomocí potenciometrického snímače č.1, obr. 3a.



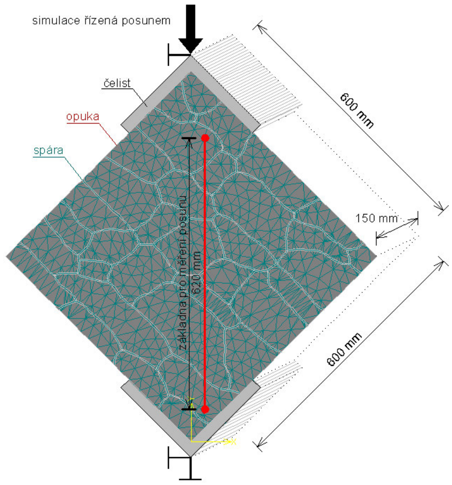
(a) (b)

Obr. 3: (a) Uspořádání zkoušky opukového zdiva;
(b) Pracovní diagram zkoušky opukového zdiva

2.1. Zjednodušený numerický model zdiva

Geometrie opukového zdiva je vytvořena takovým způsobem, že každá modelová spára obsahuje jednu spáru skutečnou s dvěmi přechodovými zónami. Modelová spára se tedy zmenší na nulovou tloušťku (obr. 4) oproti opukovým blokům, které se rozšíří tak, aby struktura zůstala zachována.

Dalším krokem při konstrukci počítačového modelu je použití dostupného softwaru, který je schopen strukturu namodelovat a přitom obsahuje přijatelné materiálové modely. Použili jsme program ***ATENA 2D***, který obsahuje mimo jiné materiálový model SBETA a materiálový model pro simulaci kontaktu [Červenka V. a kol., 2003]. Šestnáct zvolených simulací pro objasnění chovaní zjednodušeného modelu odpovídá postupné změně materiálových parametrů spáry s cílem co nejlepšího přiblížení simulovaných pracovních diagramů k experimentálně zjištěné křivce. Charakteristiky opuky zůstaly konstantní. Statistickou analýzu modelu programem ***FREET*** jsme neprováděli, volba velikosti a kombinací hodnot tak zůstala na naší volbě. Jednalo se o přístup typu „pokus-omyl“.

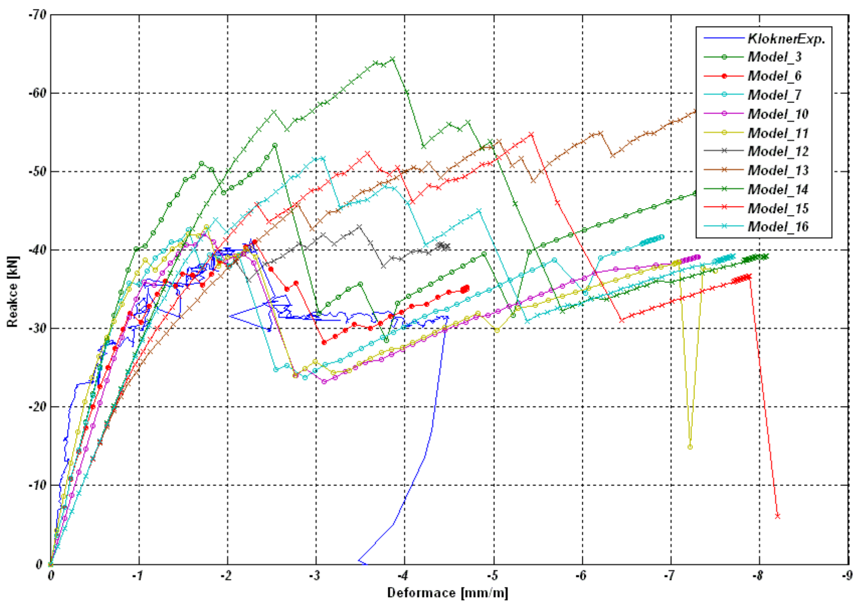


Obr. 4: Zjednodušený numerický model opukového zdiva

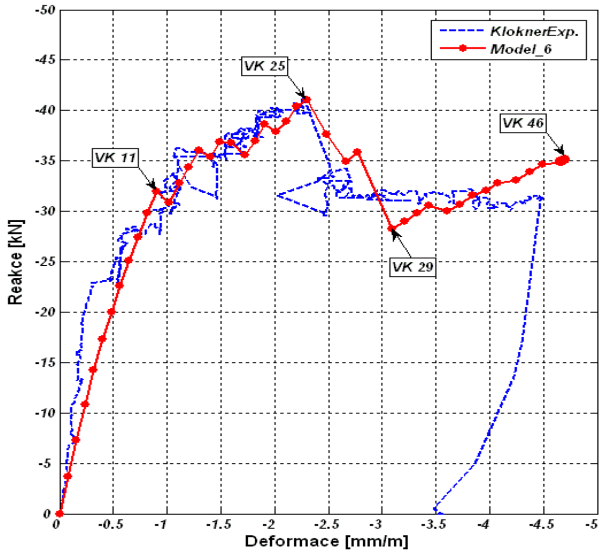
Škála vypočtených výsledků je uvedena na obr. 5. K porovnání je přidána pracovní křivka laboratorní zkoušky opukového zdiva (modrá čára bez značek). Je vizuálně zřejmé, že pracovní diagram experimentu kopíruje nejlépe křivka modelu ***6***. Přesto pro porovnání s dalšími typy numerických modelů aplikujeme na vypočtenou křivku metodu nejmenších čtverců ve tvaru

$$v = \int_0^{\varepsilon_{\max}} \left(F_{zkouška} - F_{simul}\right)^2 d\varepsilon, \tag{1}$$

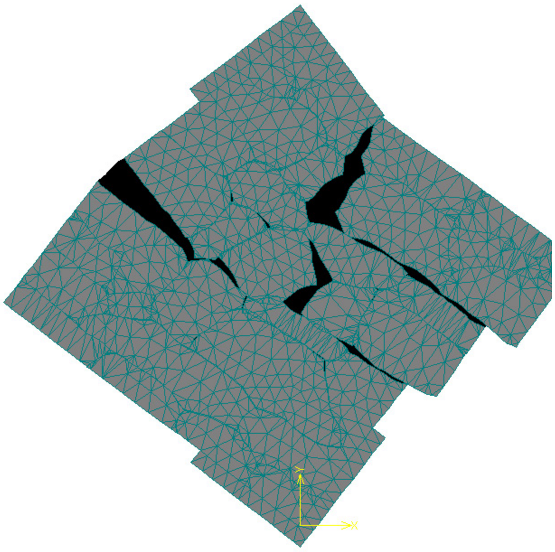
kde $F_{simul} = f\left(K_{nn}, K_{tt}, F_t, c, \varphi\right)$ je funkcí simulovaných materiálových parametrů. Dosazením do rovnice (1) obdržíme pro křivku modelu **6**, v = 30,36. Z obr. 6a lze konstatovat, že model vystihuje charakter chování laboratorní zkoušky opukového zdiva v celku výstižně.



Obr. 5: Pracovní diagramy numerických modelů **3**, **6**, **7**, **10 – 16**



(a)



(b)

Obr. 6: (a) Pracovní diagram[1] numerického modelu ***6***;
(b) Vývoj trhlin na deformovaném modelu ***6***, výpočtový krok 46, měřítko deformace=15x

2.2. Podrobný numerický model zdiva

Dalším přístupem k modelování zdiva je použití podrobného numerického modelu. Vyznačuje se nejen tím, že zachovává přesné rozměry bloků a spár, ale také tím, že zvlášť modeluje chování přechodové zóny, které je v ostatních případech numerických modelů sdruženo s chováním malty (zjednodušený numerický model) nebo úplně opomíjeno (numerický model na makroskopické úrovni). Přechodovou zónu tedy můžeme v programu ***ATENA 2D*** namodelovat následujícími typy prvků (srov. [Giambanco a kol., 2001]):

- ***spojitým konečným prvkem*** s malými rozměry a tloušťkou,
- ***kontaktním prvkem*** s nulovou tloušťkou.

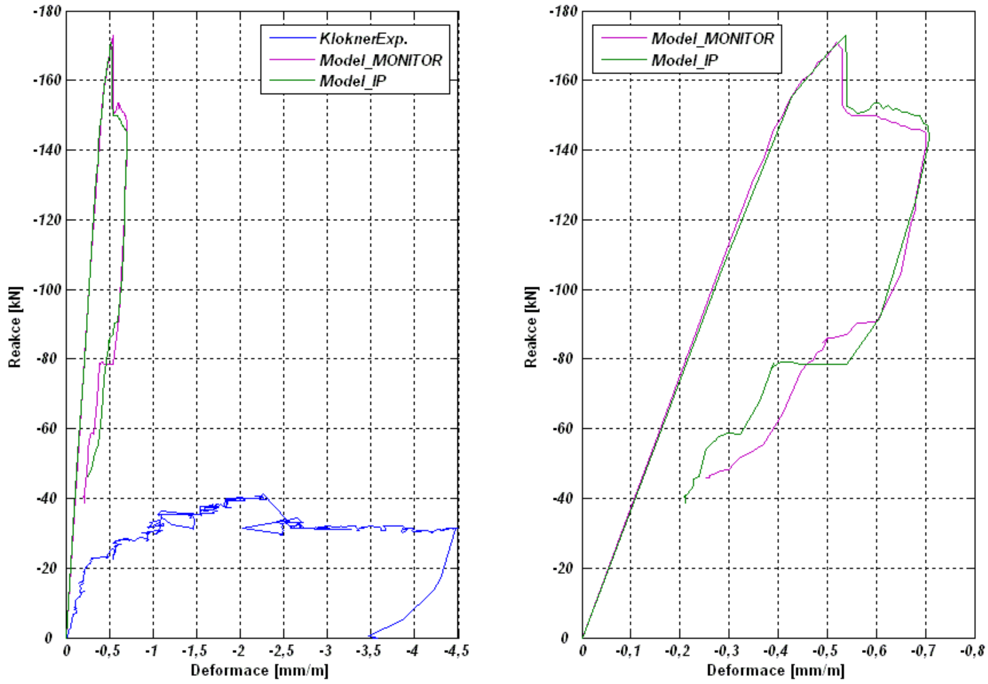
Naše další kroky budou směřovat k numerickým simulacím, které by měly nejlépe vystihnout charakter mechanického chování opukového zdiva a umožnit co možná nejlepší přiblížení simulovaných pracovních diagramů k reálnému experimentu.

2.2.1. Podrobný mumerický model bez přechodové zóny

Ještě než přistoupíme k rozboru numerických modelů s různě modelovanými přechodovými zónami, podívejme se na příklad chování opukového zdiva, které je namodelováno podle principu podrobného numerického modelu, ale které neuvažuje žádné přechodové vlastnosti mezi maltou a opukou.

[1] *VK je označení pro výpočtový krok.*

Pracovní diagram opukového zdiva je na obr. 7. Je zřejmé, že model vykazuje mnohem tužší chování než opukové zdivo z experimentu a dosahuje čtyřnásobně větší únosnosti. Oba jevy jsou způsobeny absencí přechodové zóny. Navíc je zajímavá i sestupná větev simulace, která je dána charakterem porušení a umístěním monitorů posunu[2].



(a) (b)

Obr. 7: Pracovní diagram numerického modelu[3] bez uvažování přechodové zóny: (a) Numerický model v porovnání s experimentem; (b) Detailní zobrazení

Tento model tedy nevystihuje přesně chování zdiva, ale je to model, který geometricky správně modeluje strukturu na mezoskopické úrovni (struktura modelu je zobrazena na obr. 1a). V současné době používáme sofistikovanější numerický model, který je popsán v odstavci 2.2.3.

2.2.2. Modelování přechodové zóny konečnými prvky

Geometrie modelu je znázorněna na obr. 8. Přechodová zóna je v tomto počítačovém modelu simulována 5 mm širokou vrstvou konečných prvků. Aby struktura buňky zůstala zachována, došlo k odebrání hmoty opukovým blokům. Pro chování opuky, malty a přechodové zóny je použit známý materiálový model SBETA. Vstupní parametry přechodové zóny jsou zadané

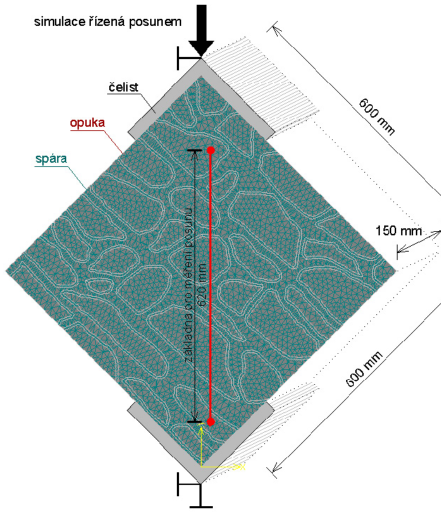
---

[2] *Pro odečet posunů jsme použili stejně umístěné monitory posunu jako na obr. 4 (potenciometrický snímač dráhy č.1) – tento předpoklad platí pro všechny počítačové simulace v článku 2 .*

[3] *Použili jsme jediný numerický model se stejnými materiálovými vstupy, měnili jsme pouze výpočtové kroky a způsob odečítání posuvu. Proto jsou zobrazeny dvě pracovní křivky.*

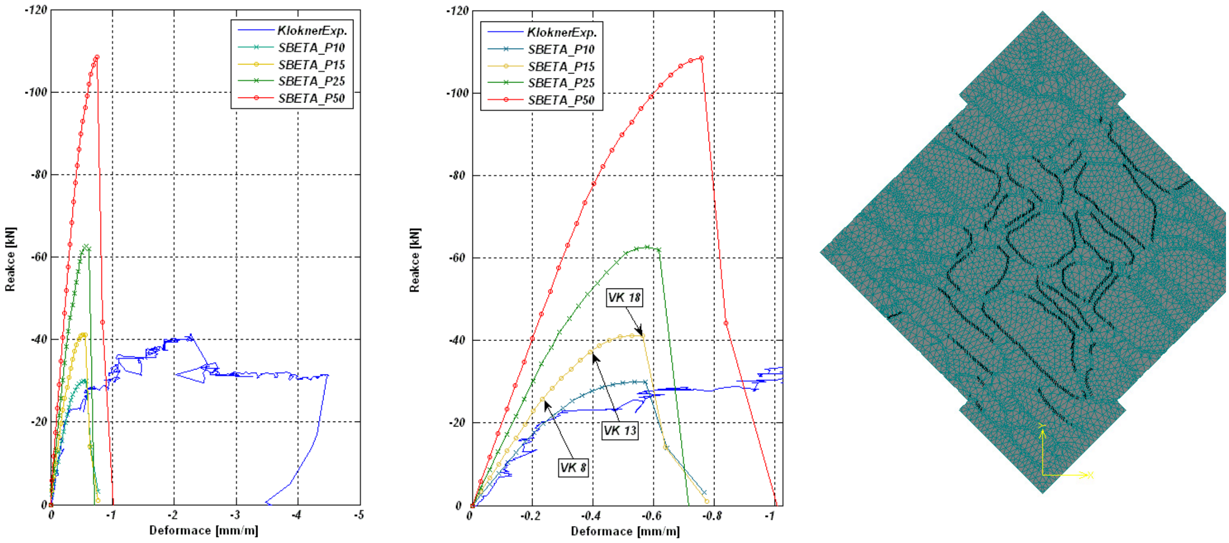
jako snížené hodnoty materiálových charakteristik malty (číslo v názvu modelu odpovídá procentuálně původním materiálovým hodnotám malty).

Na začátku odstavce jsme se zmínili pouze o vhodném typu prvku pro modelování kontaktu a záměrně jsem opominuli další důležitou vlastnost pro simulaci chování přechodové zóny, kterou je bezesporu vhodný materiálový model. Jak vyplývá z pracovních diagramů na obr. 9a, materiálový model SBETA, který simuloval chování kontaktu se sníženými materiálovými charakteristikami malty, není vhodným reprezentantem pro tento úkol. Numerický model je oproti experimentu tužší a vykazuje chování křehkého materiálu, které pro zdivo není charakteristické. K přiblížení s reálnou zkouškou jsme se dostali pouze v hodnotě dosažené mezní únosnosti a to v materiálové variantě ***SBETA_P15***, viz obr. 9b.



Obr. 8: Podrobný numerický model opukového zdiva

Závěrem lze uvést, že tento typ modelu jsme pouze odzkoušeli jako alternativu k podrobnému numerickému modelu s kontaktními prvky, na který byl dáván hlavní důraz. Model by byl jistě funkční, kdybychom použili jiný materiálový model kontaktu pro konečný prvek. Ten bohužel ale v programu ***ATENA 2D*** implementován není.



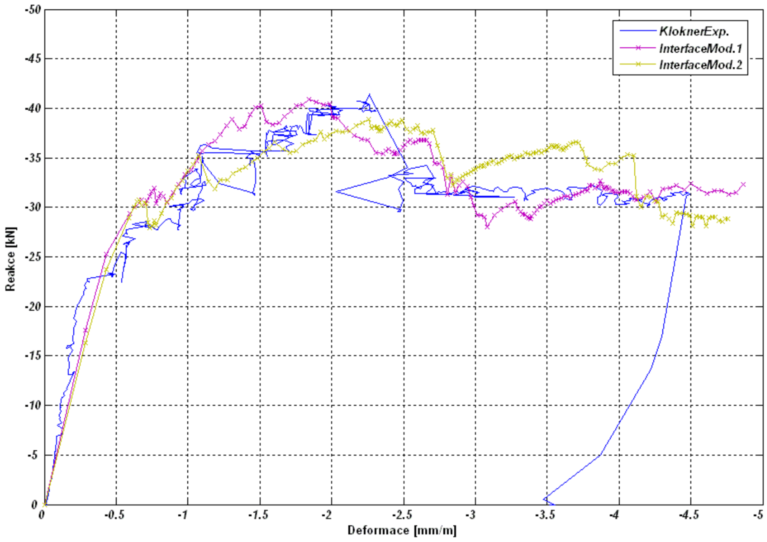
(a) (b) (c)

Obr. 9: (a) Numerický model v porovnání s experimentem;
(b) Detailní zobrazení pracovních křivek;
(c) Vývoj trhlin na nedeformovaném modelu ***SBETA_P15***, VK 18

2.2.3. Modelování přechodové zóny kontaktními prvky

Kontaktní prvky s nulovou tloušťkou, které jsou založeny na Mohr-Coulombově hypotéze, simulují mechanické chování přechodové zóny mezi oběma komponentami zdiva. Kvazikřehké chování opuky a malty je modelováno konečnými prvky s používaným materiálovým modelem SBETA. Ukázalo se, že to je nejvýstižnější model opukového zdiva, který lze do programu ***ATENA 2D*** zadat.

Počítačovým modelem se stochastickými vstupními materiálovými hodnotami přechodové zóny se zabývá diplomová práce druhého autora [Vorel, 2005], a proto zde uvedeme pouze konečný výsledek křivky analýzy vzniklé simulací programů ***FREET – ATENA***.



Obr. 10: Pracovní diagramy podrobného počítačového modelu

Jak je vidět v tab. 1, i zjednodušeným přístupem můžeme model nakalibrovat (v reálných mezí vstupních hodnot) takovým způsobem, že dosahuje přesnosti modelu podrobného.

Tab. 1: Porovnání počítačových modelů

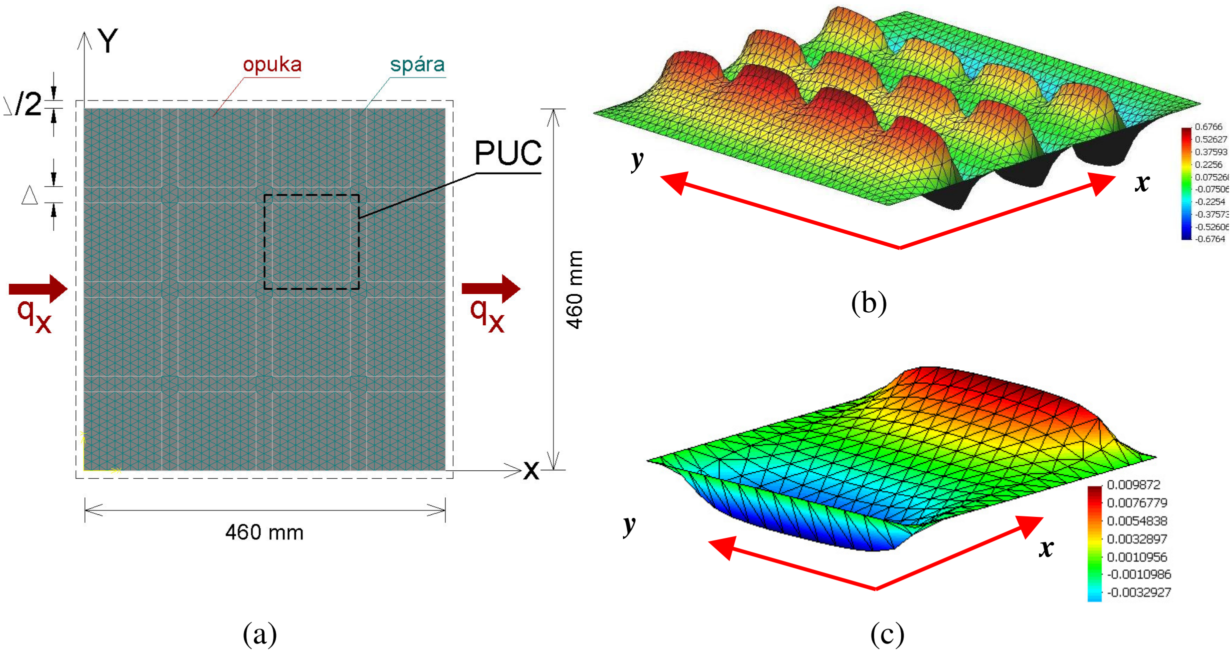
typ modelu	*ozn.*	v [-]
Zjednodušený počítačový model	*Model_6*	30,36
Podrobný počítačový model	*InterfaceModel_1*	32,32
Podrobný počítačový model	*InterfaceModel_2*	37,51

3. Aplikace – Homogenizace termomechanických parametrů lomového zdiva

Prohlídky historických konstrukcí (Karlova mostu) odhalují nepříznivý dopad působení teploty a vlhkosti na mechanickou odezvu. Tyto vlivy, kterým jsou konstrukce vystaveny, nemohou být zanedbány, navíc se ukazuje, že mohou být hlavním faktorem odpovědným za vznik trhlin. Proto se v této článku zaměříme na určení termomechanických parametrů (jedná se zejména o součinitel tepelné vodivosti a součinitel difúze vodní páry), které korelují též s koeficientem tepelné roztažnosti zdiva. Efektivní koeficient tepelné roztažnosti klesá s rozvojem trhlin ve zdivu [Sýkora a kol., 2005]). Principem homogenizace lze získat efektivní hodnoty heterogenního materiálu na mezoúrovni (tzn. model reprezentuje geometricky přesně danou strukturu zdiva), které jsou dále využity na makroúrovni.

V další části se omezíme pouze na přenos tepla. Tento náš krok je dán snahou poskytnout řešení z vlastního programu, který byl pro tento účel vytvořen a jehož výsledky mohou být dále využitu pro řešení sdruženého problému přenosu tepla a vlhkosti v komerčních programech [Vorel, 2005]. Dále uvádíme jen výsledky provedených výpočtů. Podrobnosti jsou uvedeny v [Sýkora, 2005].

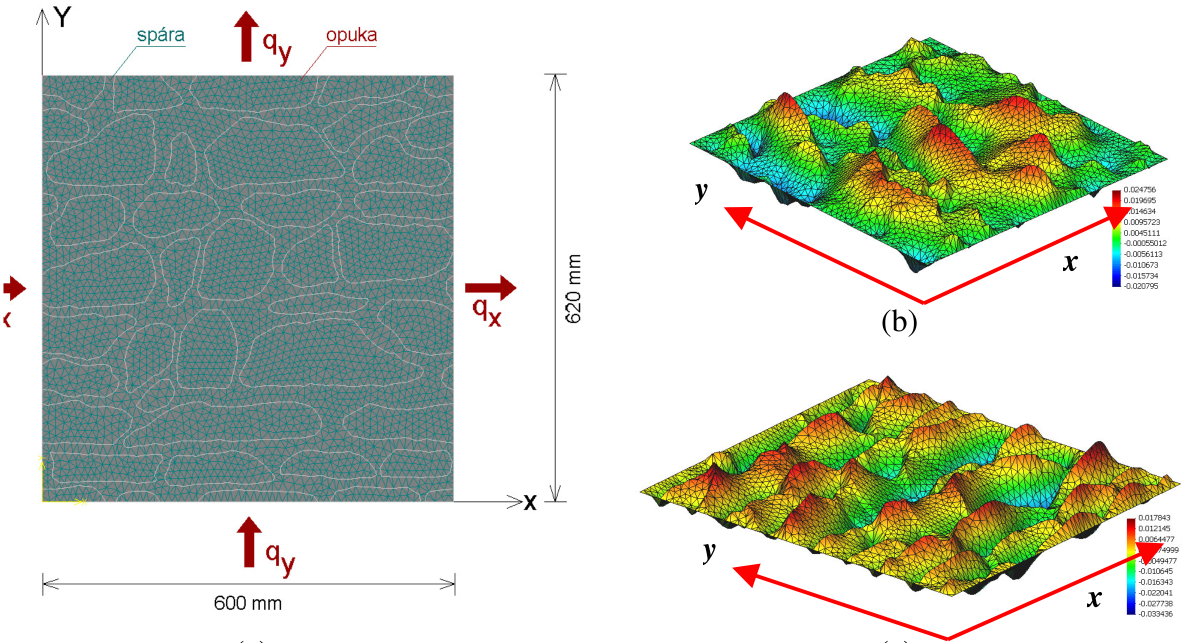
Prvním příkladem je mezoskopická struktura na obr. 11a, která ovšem není typickým představitelem lomového zdiva. Výhoda vazby spočívá v snadném porovnání výsledků obdržených vlastním programem na bázi MKP s výsledky programu ***DELFIN***, který používá metodu konečných objemů (podrobnosti viz [Vorel, 2005]).



Obr. 11: (a) Neperiodická mezostruktura s vyznačenou PUC ;
(b) Fluktuační pole neperiodické struktury
(c) Fluktuační pole perfektní PUC

Pro hodnoty tepelné vodivosti opuky 0,9 [Wm^{-1} K^{-1}] a malty 2,0 [Wm^{-1} K^{-1}] při zatížení konstantním tepelným tokem ve směru x obdržíme efektivní tepelnou vodivost χ_x=1,112 [Wm^{-1} K^{-1}] (program ***DELFIN*** dává χ_x=1,120 [Wm^{-1} K^{-1}]). První struktura není dokonale periodická (Pozn.: Periodicitu struktury bychom zajistili přidáním poloviční tloušťky spáry okolo okrajů – viz přidaná čárkovaná čára na obr. 11a), přesto se dá PUC buňka ve struktuře najít. Na obr. 11a je PUC označena tlustou čárkovanou tlustou čárou. Druhý příklad aplikace je proveden právě pro dokonalou PUC. Při stejném zatížení a materiálových parametrech jako v předchozím příkladu obdržíme fluktuační pole na obr. 11c. Efektivní tepelná vodivost je rovna χ_x=1,169 [Wm^{-1} K^{-1}].

Poslední příklad se vztahuje k PUC buňce (obr. 12a). Navíc uspořádání kamenů a malty odpovídá skutečné vazbě opukového zdiva. Jedná se o geometrickou strukturu buňky, která byla použita v článcích *2* a *3*. Termomechanické charakteristiky opuky a malty zůstaly stejné jako v předešlých příkladech (χ_{opuka} =0,9 [Wm^{-1} K^{-1}] a χ_{malta} =2,0 [Wm^{-1} K^{-1}]). PUC buňka



(a) (c)

Obr. 12: (a) Mezostruktura opukového zdiva;
(b) Fluktuační pole pro zatížení ve směru *x*
(c) Fluktuační pole pro zatížení ve směru *y*

byla zatížena tepelným tokem ve směru *x*, ale následně i ve směru *y*. Pro zatížení konstantním tepelným tokem ve směru *x* obdržíme výslednou efektivní tepelnou vodivost χ_x=1,224 [Wm^{-1} K^{-1}], pro směr *y* obdržíme výslednou efektivní tepelnou vodivost χ_y=1,162 [Wm^{-1} K^{-1}].

4. Shrnutí

Shrnutí se opět dotýká hlavního faktoru numerických modelů lomového - opukového zdiva, kterým bezesporu je přístup k tvorbě geometrické struktury simulované buňky. První, *zjednodušený* přístup, i přes mnoho výhod, kterými jsou např. menší náročnost časová i výpočtová, zavádí do modelu fiktivní spáru, pro kterou se v žádném případě nedají experimentálně určit materiálové charakteristiky, takže musí být odhadnuty. Jestliže chceme reálně modelovat chování lomového zdiva a dokonce máme k dispozici i experimentálně určené vstupní parametry (dají se zjistit i pro přechodovou zónu), zvolíme přístup označovaný jako *podrobný*. Efektivní termomechanické vstupní parametry opukového zdiva do makroskopického modelu Karlova mostu jsme určovali právě na tomto modelu.

5. Poděkování

Tento příspěvek byl vypracován za finančního přispění MŠMT ČR, projekt 1M6840770001, v rámci činnosti výzkumného centra CIDEAS a vychází z teoretických výsledků získaných řešením grantů projektu GAČR 103/04/1321 a GAČR 106/03/H150.

6. Literatura

[Šejnoha J. a kol., 2005] J. Šejnoha, Z. Bittnar, M. Šejnoha, J. Zeman, J. Novák, Z. Janda (2005) *Výpočet stavů napětí a porušení Karlova mostu v Praze,* zpráva ČVUT Praha, 159 str.

[Šejnoha J. a kol., 2003] J. Šejnoha, V. Blažek, M. Šejnoha, J. Zeman (2003) *Počítačový model pro analýzu napětí a přetvoření Karlova mostu*, zpráva ČVUT Praha, 64 str.

[Lourenço a kol., 1998] P. Roca, J.L. González, E. Oñate a P.B. Lourenço (1998) *Structural analysis of historical constructions II - Experimental and numerical issues in the modelling of the mechanical behaviour of masonry*, in proceedings CIMNE, Barcelona, 35 pp.

[Giambanco a kol., 2001] G. Giambanco, S. Rizzo a R. Spallino (2001) *Numerical analysis of masonry structures via interface models,* Computer methods in applied mechanics and engineering 190 (2001), pp. 6493 - 6511

[Červenka V. a kol., 2003] V. Červenka, L. Jendele, J. Červenka (2003) *ATENA Program Documentation*, Praha, 129 str.

[Vorel, 2005] J. Vorel (2005) *Diplomová práce – Efektivní termomechanické vlastnosti zdiva*, Praha, 77 str.

[Sýkora, 2005] J. Sýkora (2005) *Diplomová práce – Počítačové modelování lomového zdiva*, Praha, 76 str.

[Sýkora a kol., 2005] J. Sýkora , J. Vorel, J. Šejnoha a M. Šejnoha (2005) *Effective Material Parameters for Transport Processes in Historical Masonry Structures*, proceedings Civil-Comp Press, Rome, pp. 459 - 460, full text CD ROM

[Sýkora a kol. I, 2005] J. Sýkora , J. Vorel, J. Šejnoha a M. Šejnoha (2005) *Materiálový model pro lomové zdivo*, sborník konference: Integrovaný přístup k projektování stavebních konstrukcí, Ostrava (v tisku)