

## INFLUENCE OF CONSTRAINT ON DETERMINATION OF CONCRETE FRACTURE ENERGY

V. Veselý, Z. Keršner, L. Řoutil <sup>1</sup>

**Summary:** *The knowledge of fracture-mechanical parameters is fundamental for failure modelling of concrete structures. Problems of the true fracture energy of this quasi-brittle material are analysed. The fracture energy of concrete, which is necessary for the true fracture energy determining, could be obtained by testing of notched-beam specimen subjected to three-point bending. The FEM model of this test is used in this paper. The influence of constraint on determination of the fracture energy of concrete is studied in this paper.*

### 1. Úvod

Lomová energie patří k nejzákladnějším charakteristikám lomového chování v teoriích porušování kvazikřehkých materiálů. Reprezentuje energii, kterou je třeba konstrukci dodat, aby se plocha (existující) trhliny zvětšila o jednotku. Vzhledem k složitějším procesům porušování probíhajících v kvazikřehkých materiálech, v porovnání s materiály křehkými, však neodpovídá pouze povrchové energii nově vytvořených líců trhliny. Zahrnuje i energii disipovanou při složitých procesech probíhajících v oblasti neelastického materiálu nacházející se před čelem makroskopické trhliny, v tzv. lomové procesní zóně (LPZ), přičemž tento díl lomové energie obvykle značně převyšuje prvně zmíněnou část.

Lomová energie je zásadním parametrem nelineárních modelů kohezivní trhliny, které byly pro kvazikřehký lom vyvinuty s ambicemi vystihnout chování materiálu v relativně rozsáhlé lomové procesní zóně u čela trhliny, jenž se navenek projevuje tahovým změkčením. Kohezivní modely jsou dnes nejrozšířenější aplikací lomové mechaniky kvazikřehkých materiálů ve stavebnictví, jedná se zejména o implementace těchto modelů do MKP kódů používaných pro návrh a posouzení železobetonových konstrukcí.

Pro určování hodnoty lomové energie, jako parametru potřebného ke konstrukční analýze pomocí kohezivních modelů, se používá metoda doporučená mezinárodní organizací RILEM známá jako „work-of-fracture method“ [RILEM 1985]. Podle této metody se lomová energie stanoví z podílu lomové práce, určené jako plocha pod křivkou závislosti mezi zatížením a průhybem uprostřed rozpětí zaznamenané při zkoušce tříbodově ohýbaného trámce se zářezem,

<sup>1</sup> Ing. Václav Veselý, Ph.D., doc. Ing. Zbyněk Keršner, CSc., Ing. Ladislav Řoutil, Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel. +420 541 14 73 62, e-mail vesely.v1@fce.vutbr.cz

a plochy ligamentu zkoušeného trámce. Výsledná hodnota představuje průměrnou energii dissipovanou v lomové procesní zóně během šíření trhliny přes celý ligament zkoušeného tělesa. Z důvodů, které budou rozebrány dále, je takto určená hodnota lomové energie závislá na geometrii a velikosti zkušební tělesa. V rámci jedné geometrie a rozměru navíc dochází ke snižování lomové energie se zmenšující se délkou ligamentu. Proto takto určovaná veličina nemůže jednoznačně plnit roli materiálové charakteristiky a parametru kohezivních modelů, čímž se kredit těchto výkonných a principiálně značně univerzálních modelů značně snižuje.

Autoři se dlouhodobě zabývají vlivy geometrie a velikosti na hodnoty experimentálně určených lomových parametrů kvazikřehkých materiálů (z posledních např. [Routil a kol. 2006a, Routil a kol. 2006b]). V předkládaném příspěvku vyšetřují závislost hodnoty lomové energie dissipované v LPZ v jednotlivých stádiích růstu kohezivní trhliny na geometrii, resp. délce ligamentu zatěžované konstrukce. Vztažení lomového chování konstrukce k její geometrii bylo v této studii provedeno prostřednictvím parametru constraintu napětí u čela trhliny.

Pro analýzu jsou použity numericky simulované zkoušky tříbodové ohýbaného trámce se zářezem pro několik počátečních relativních délek zářezů. Lomová energie dissipovaná v jednotlivých stádiích šíření trhliny je určována metodou „work-of-fracture“ z části zatěžovacího diagramu odpovídající danému stádiu, přičemž korespondující přírůstek plochy trhliny je určen na základě změny poddajnosti tělesa aplikací modelu ekvivalentní elastické trhliny. Numerické simulace zkoušek byly provedeny v programu ATENA 2D.

## 2. Lomová energie a model kohezivní trhliny

Lomová energie je považována za materiálový parametr a definuje se jako energie potřebná k vytvoření trhliny jednotkové plochy. Podle metody RILEM pro stanovení hodnoty lomové energie z experimentu se pro vyhodnocení lomové energie uvažuje celá naměřená zatěžovací křivka (příp. extrapolovaná do prostoru pro větší průhyby, než které byly zaznamenány). Pro zkoušené těleso výšky  $W$ , šířky  $B$ , s počáteční trhlinou délky  $a$  je dána vztahem

$$G_f = \frac{1}{(W - a)B} \int P dd, \quad (1)$$

kde  $P$  značí zatěžovací sílu a  $d$  je posun bodu jejího vnesení. Tato metoda je založená na přístupu modelů kohezivní trhliny (pro beton model fiktivní trhliny [Hillerborg et al. 1976]). Lomová energie jako parametr modelů kohezivní trhliny je určena plochou pod křivkou závislosti napětí–otevření trhliny:

$$G_f = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw, \quad (2)$$

kde  $\sigma$  představuje kohezivní napětí svírající líce trhliny v LPZ a  $w_c$  je kritické otevření trhliny, při jehož překročení se již trhlina dostává mimo kohezivní zónu (mimo LPZ).  $G_f$  z této definice je vztažena k lokálnímu tahovému změkčení realizovanému v LPZ. Jestliže tvar a rozsah kohezivní zóny není ovlivněn volnými okraji testovaného tělesa, je hodnota  $G_f$  podle obou definic, tj. rovnic (1) i (2), shodná, a tedy nezávislá na velikosti a geometrii tělesa. V takovém případě se mluví o materiálové konstantě a značí se  $G_F$ . Poznamenejme, že této shodě je možné se u cementových kompozitů pouze přiblížit, a to pro tělesa velkých rozměrů. Přímé použití těchto definic při konstrukční analýze pak implikuje nutnost zkoušení velmi rozměrných těles, zvláště pro betony s hrubými zrny kameniva.

Přístup kohezivních modelů se opírá o dva základní předpoklady ([Bažant 1996]):

- Funkce  $\sigma(w)$  je pro daný materiál jedinečná, nemění se během šíření trhliny tělesem.
- K disipaci energie dochází pouze v rámci nelineární zóny u čela trhliny, mimo ni je materiál elastický.

Odhlíží se také od časového aspektu lomového procesu. Z těchto předpokladů vychází i doporučená metoda určování lomové energie [RILEM 1985]. U kvazikřehkých materiálů však nejsou tyto předpoklady v převážné většině případů splněny, vyjma, jak již bylo zmíněno, konstrukcí velkých rozměrů. Proto použití metody RILEM vnáší do stanovované hodnoty lomové energie nezanedbatelnou chybu.

Zdrojem nepřesností, týkající se druhého z předpokladů, je energie disipovaná prostřednictvím plasticity a tření mezi zkušebním tělesem a podporami. Tu však lze minimalizovat vhodnými doplňky uspořádání zkoušky. Významněji ovlivňuje stanovovanou hodnotu lomové energie nesplnění prvního z předpokladů. V takovém případě se funkce změkčení  $\sigma(w)$  mění během lomového procesu, což odpovídá změně tvaru a/nebo rozměru lomové procesní zóny. Tato změna je determinována vzdáleností a polohou čela trhliny a s ní související LPZ vzhledem k volnému okraji tělesa. To vše při uvažování „homogenního“ materiálu tělesa. S přibližováním k hranici tělesa se totiž cementové kompozity typicky vyznačují změnou materiálových charakteristik (např. zvyšování hustoty mikrotrhlin způsobené vysycháním, jiné sestavení zrn kameniva aj.). Pro energii disipovanou v lomové procesní zóně odpovídající určité velikosti, geometrii a okrajovým podmínkám tělesa byl zaveden pojem *lokální lomová energie* s označením  $g_f$  [Hu & Wittmann 1992]. Její rozložení po délce ligamentu tělesa není konstantní. Jak bylo naznačeno výše, její hodnotu značně ovlivňují volné okraje zkušebního vzorku, tj. jeho tvar a rozměry. Ze způsobu výpočtu  $G_f$  podle metody RILEM (1) vyplývá, že do určované hodnoty se promítá vliv konfigurace prováděné zkoušky a velikosti zkušebního tělesa a není tedy obecně platnou materiálovou konstantou. Experimentální ověření závislosti  $G_f$  na velikosti a geometrii zkušebního tělesa lze nalézt např. v [Hu & Wittmann 1992, Hu & Wittmann 2000, Trunk & Wittman 2001, Duan et al. 2002, Duan et al. 2003, Hu & Duan 2004] a také v [Karihaloo et al. 2003, Karihaloo & Abdalla 2005].

### 3. Skutečná lomová energie

V posledních letech bylo publikováno vylepšení metody RILEM, které poskytuje „skutečnou“ hodnotu lomové energie nezávislou na velikosti a geometrii konstrukce [Karihaloo et al. 2003]. Toto vylepšení vychází z modelu aproximujícího rozložení lomové energie po délce ligamentu tělesa navrženého kolektivem autorů [Duan et al. 2002, Duan et al. 2003]. Funkci lomová energie versus počáteční délka ligamentu tento model nahrazuje bilineární závislostí se dvěma parametry: skutečnou lomovou energií  $G_F$  a přechodovou délkou ligamentu  $a_l$ . V dostatečné vzdálenosti čela trhliny od volného povrchu tělesa je lomová energie podle tohoto modelu konstantní, tj. lze ji uvažovat jako materiálovou charakteristiku. Od určité vzdálenosti, rovné přechodové délce ligamentu, klesá a u volného povrchu tělesa je nulová. Určení skutečné lomové energie (konstantní hodnoty bilineární funkce) lze pak provést z výsledků pouze dvou testů (sad testů) na tělesech se dvěma různými počátečními délkami trhliny, přičemž relativní délky trhlin pro obě zkoušená tělesa leží ve vhodných oblastech navržené bilineární funkce modelu [Karihaloo et al. 2003]. Relativní počáteční délky trhlin jsou pro jednotlivé zkušební konfigurace doporučeny, tato doporučení jsou však empirická [Karihaloo & Abdalla 2005].

#### 4. Lomová procesní zóna a napjatost na čele trhliny

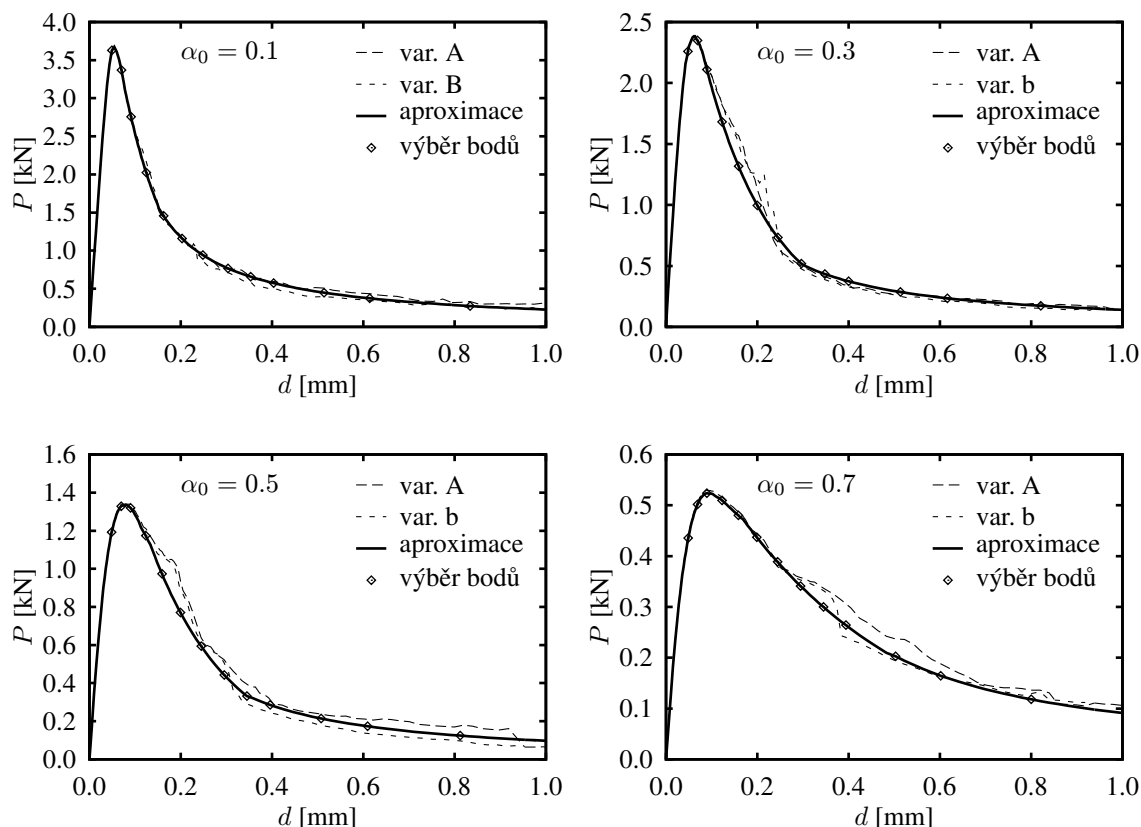
Podstata vlivu velikosti a geometrie tělesa na určovanou hodnotu lomové energie  $G_f$  zřejmě tkví ve změně tvaru a velikosti lomové procesní zóny vyvíjející se před čelem makroskopické trhliny během jejího šíření a z toho vyplývající změně lokální lomové energie  $g_f$ . Vztažení lomového chování tělesa s trhlinou k jeho geometrii je možné prostřednictvím dvouparametrové lomové mechaniky. Ta pro popis chování tělesa s trhlinou využívá druhého členu Willamsova rozvoje [Williams 1957] aproximujícího napjatost v okolí kořene trhliny. Tímto druhým parametrem (k faktoru intenzity napětí  $K_I$ ) je  $T$ -napětí, jehož hodnota zůstává pro dané zatížení konstantní a působí rovnoběžně s osou trhliny. Předpokládá se, že lomové chování tělesa závisí na stupni multiaxiality v okolí kořene trhliny, která je vyvolána geometrií tělesa. Vliv multiaxiality napětí na chování trhliny, označovaný jako constraint efekt, lze dostatečně přesně popsat hodnotou  $T$ -napětí. Ekvivalentně k  $T$ -napětí se pro popis constraint efektu používá faktor biaxiality  $B$  [Leavers & Radon 1982].

Obecně platí, že velikost a tvar neelastické zóny u čela trhliny jsou závislé na poli napětí v okolí vrcholu trhliny, konkrétně na stupni multiaxiality napětí. Pomocí parametru constraintu tak lze vztáhnout tvar a velikost plastické zóny ke geometrii tělesa. U kvazikřehkého materiálu však nelze mluvit o šíření jedné (ostré) trhliny, ani o plastické zóně vznikající a vyvíjející se před jejím čelem. Mechanizmy porušování probíhající v lomové procesní zóně kvazikřehkých materiálů se odlišují od odpovídajících procesů charakteristických pro křehké a tažné materiály, což má za následek také značně odlišný tvar neelastických zón v těchto materiálech. Přesto uvedení hodnoty lomové energie do spojitosti s parametry blíže popisujícími pole napětí před čelem makroskopické trhliny může přispět k vyjasnění problému závislosti lokální lomové energie na geometrii (a velikosti) konstrukce.

#### 5. Numerický experiment

V předkládaném příspěvku je zkoumán vliv constraintu na hodnotu lomové energie v jednotlivých stádiích růstu kohezivní trhliny. Pro analýzu jsou použity numericky simulované zkoušky tříbodově ohýbaného trámce se zářezem pro několik počátečních relativních délek zářezů. Není zde tedy vyšetřován obecně vliv geometrie, nýbrž vliv constraintu, který je geometrií tělesa charakterizován. Tříbodový ohyb trámce se zářezem byl vybrán proto, že provedení tohoto testu na vzorcích z kvazikřehkých materiálů je relativně snadné (v porovnání s jinými konfiguracemi) a pokrývá dosti široký rozsah constraintu (od nízkého pro krátké trhliny po vysoký u dlouhých trhlin). Prezentovaný článek představuje pilotní studii vlivu geometrie, resp. constraintu, na (lokální) lomovou energii. Proto byl fenomén prozatím studován pouze na výsledcích virtuálního experimentu.

Numerické simulace zkoušek byly provedeny v programu ATENA 2D [Cervenka et al. 2003]. Byla modelována zkušební tělesa ve tvaru trámců o rozměrech  $480 \times 80 \times 80$  mm se zářezy o relativní hloubce  $\alpha_0$  rovné 0,1, 0,3, 0,5 a 0,7. Materiál trámců byl uvažován jako SBETA materiálový model pro beton, jehož krychelná pevnost byla 75 MPa. Zatěžování bylo prováděno přírůstkem posunu. Detaily k MKP modelům je možno najít v [Routil a kol. 2006a, Routil a kol. 2006b]. Každá ze zkoušek byla simulována ve dvou variantách lišících se pouze okrajovou podmínkou pro střední horní podporu, jejímž přírůstkem se vnáší do zkušební tělesa zatížení (ve variantě A se uvažovala oboustranná svislá vazba, u varianty B pouze přenos tlaku). Simulované zatěžovací diagramy (závislost zatěžovací síly  $P$  a průhybu uprostřed rozpětí trámce  $d$ ) jsou vykresleny v grafech na obr. 1. Sestupné větve  $P$ - $d$  diagramů byly po částech prokládány funkcemi



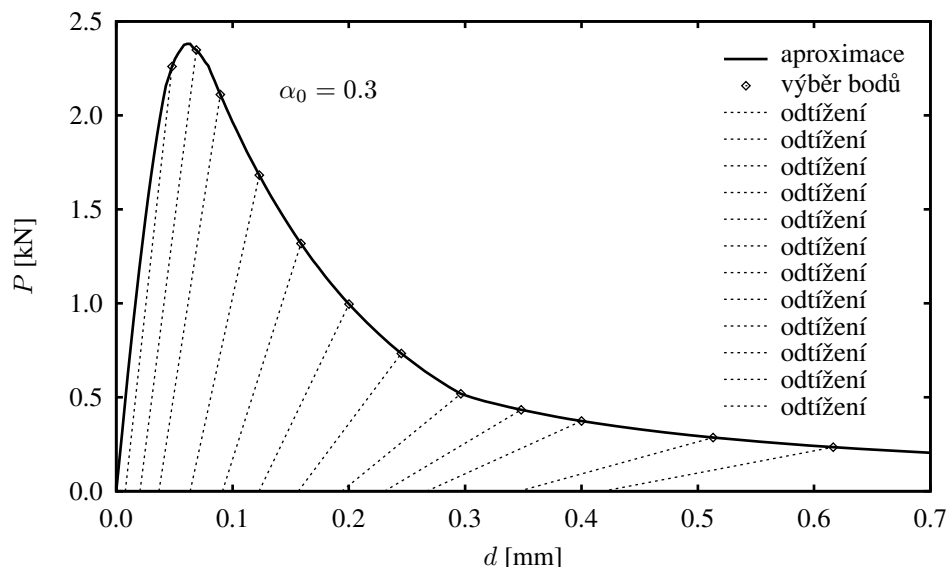
Obrázek 1:  $P-d$  diagramy – zaznamenané zatěžovací křivky pro dvě varianty numerického modelu a aproximace těchto zatěžovacích křivek

z důvodu vyhlazení numerických nestabilit. Horní části sestupných větví byly aproximovány exponenciálou, dolní mocninnou funkcí, a to tak, aby co aproximace co nejlépe vystihovaly zaznamenané křivky. Přejechod mezi oběma aproximativními křivkami je na obrázcích patrný. Na křivkách byly vybrány body s odpovídajícími si průhyby, které se použily pro následující analýzy.

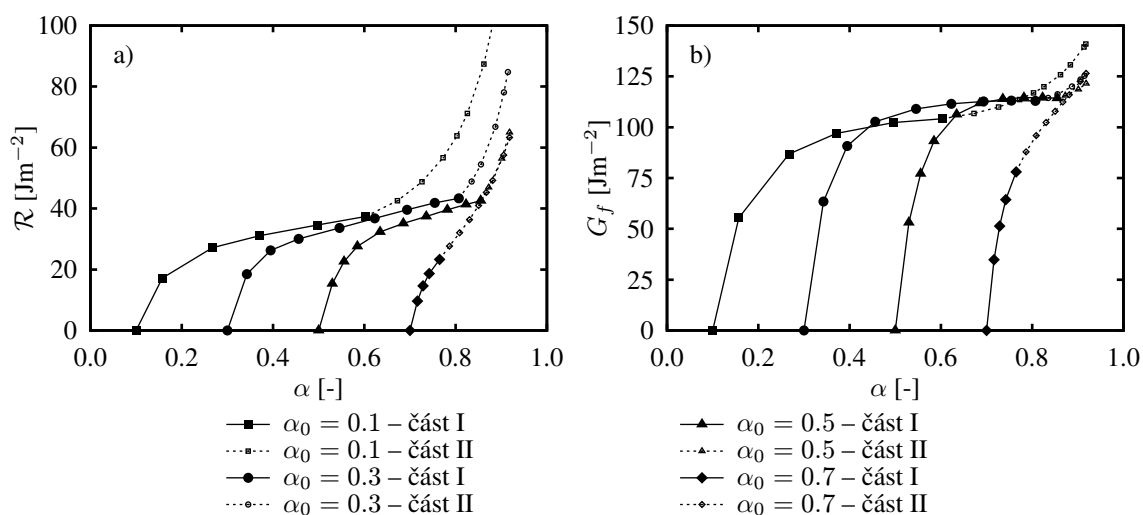
Pro jednotlivé vybrané body  $P-d$  diagramu byla určena lomová energie podle následujícího vztahu:

$$G_{f,i} = \frac{1}{(a_i - a)B} \left( \int_0^{d_i} P \, dd - \frac{1}{2} P_i^2 C_{odt,i} \right), \quad (3)$$

kde  $i$  je pořadové číslo bodu výběru a  $a_i$  délka trhliny, která byla pro daný bod odhadnuta pomocí modelu efektivní trhliny [Karihaloo 1995] s uvažováním odtěžovací poddajnosti  $C_{odt}$  řízené modelem posunu fokálního bodu s parametry  $\varphi = 2$  a  $\psi = 0,95$  [Veselý a kol. 2003, Veselý 2004]. Uvažované poddajnosti jsou naznačeny na obr. 2. Pro tuto lomovou energii byl ponechán symbol  $G_f$ , neboť má povahu lomové energie podle RILEM, tj. vyjadřuje průměrnou hodnotu energie disipované od začátku jejího šíření po vyšetřované stádium. Pro rostoucí pořadové číslo bodu výběru se principiálně blíží ke  $G_f$  podle RILEM. Její průběhy pro relativní délky zářezů ukazuje graf b) na obr. 3. V grafu a) tohoto obrázku jsou odpovídající průběhy odporu proti šíření trhliny  $\mathcal{R}$  spočtené pro odhadnuté délky ekvivalentní elastické trhliny.



Obrázek 2:  $P$ - $d$  diagramy pro  $\alpha_0 = 0,3$  s vyznačením uvažovaných odtěžovacích poddajností trávce pro jednotlivé vybrané body zatěžovacího diagramu

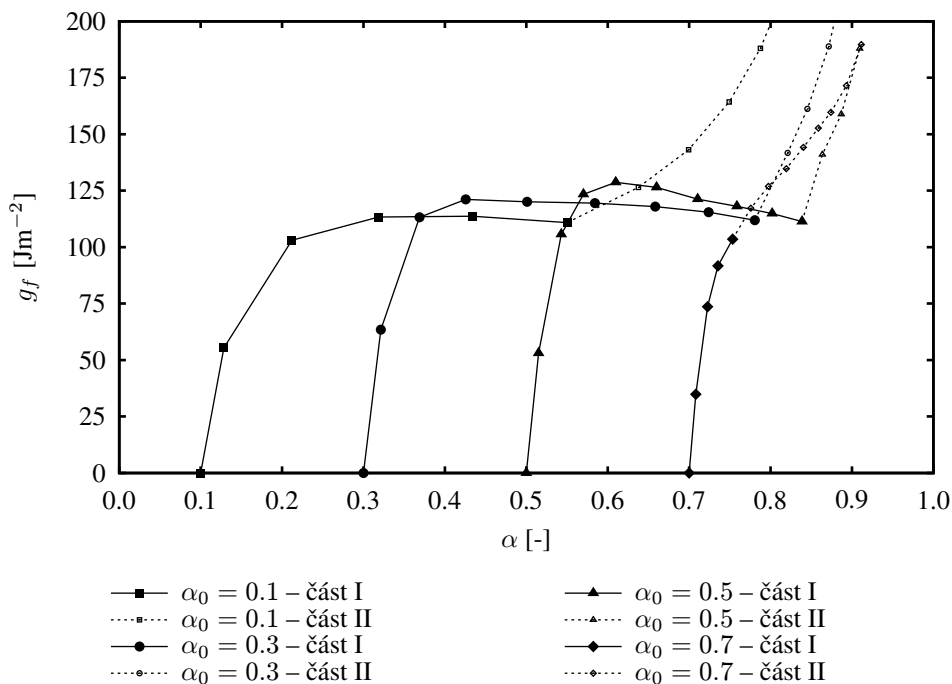


Obrázek 3: Průběhy závislostí a) odporu proti šíření trhliny  $\mathcal{R}$  a b) lomové energie  $G_f$  na relativní délce trhliny  $\alpha$  pro jednotlivé relativní délky zářezu  $\alpha_0$

Dále byla vyhodnocována lomová energie disipovaná ve stádiích šíření trhliny mezi jednotlivými vybranými body  $P$ - $d$  diagramů. Tato lomová energie se zde označuje symbolem  $g_f$ , neboť se blíží lokální lomové energii. Je určována z části zatěžovacího diagramu odpovídající danému stádiu, tedy

$$g_{f,i} = G_{f,i} - G_{f,i-1} . \quad (4)$$

Na obr. 2 je možné si hodnoty lomové práce potřebné pro výpočet této energie pro jednotlivé intervaly představit jako plochu odpovídajícího segmentu vyřatou z celkové plochy odtěžovacími



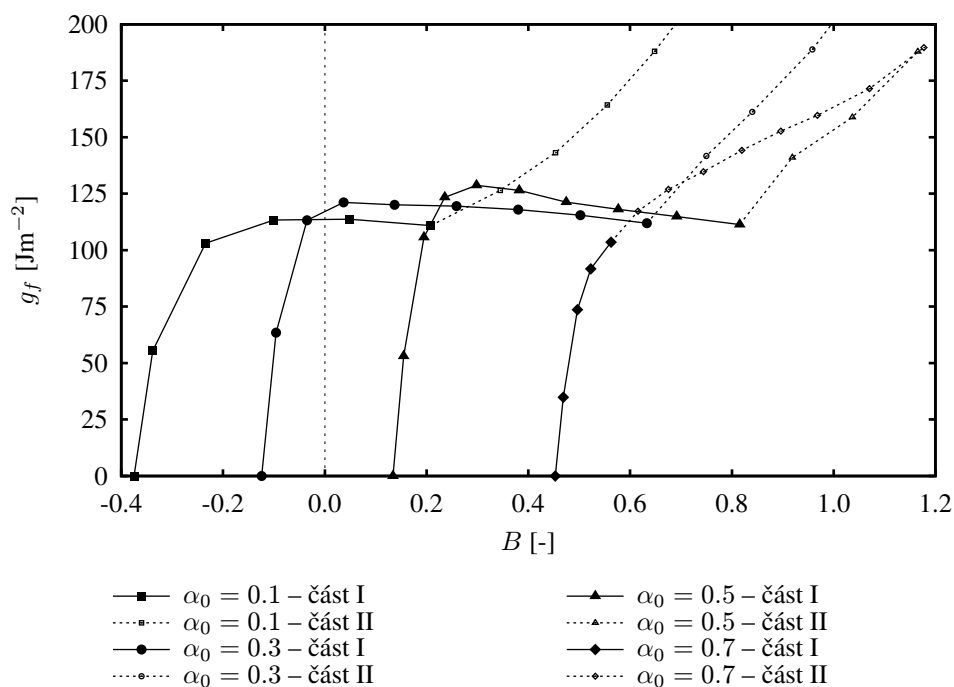
Obrázek 4: Závislost lokální lomové energie  $g_f$  na relativní délce trhliny  $\alpha$

poddajnostmi pro krajní body intervalu. Na obr. 4 jsou vykresleny závislosti lokální lomové energie  $g_f$  na relativní délce trhliny  $\alpha$  pro jednotlivé studované délky zářezů  $\alpha_0$ .

Relativním délkám trhlín  $\alpha$  odpovídajících vybraným bodům  $P$ - $d$  diagramů byly přiřazeny hodnoty faktoru biaxiality  $B$  publikované pro použitou konfiguraci v [Kněsl a Bednář 1998]. Obr. 5 ukazuje závislost lokální lomové energie  $g_f$  na constraintu napětí u vrcholu trhliny charakterizovaného faktorem biaxiality  $B$ . Poznamenejme, že v grafech na obr. 4 a 5 jsou hodnoty  $g_f$  vyneseny pro středy intervalů vytvořených výběrem bodů z  $P$ - $d$  diagramů. Vzhledem k téměř lineárnímu charakteru závislosti  $B$ - $\alpha$  pro zkušební konfiguraci tříbodového ohybu trámce se zářezem se oba grafy příliš neliší.

## 6. Diskuse výsledků

Při rozboru výsledků je třeba z úvah vyloučit ty vypočtené hodnoty lomových parametrů, které jsou kontaminovány příliš velkou numerickou chybou nelineárního výpočtu. Prezentovaná studie totiž nepracovala s výsledky skutečných experimentálních zkoušek, nýbrž pouze se záznamy numericky simulovaných testů. Vyhodnocovány byly zaznamenané zatěžovací diagramy, z nichž se určovaly hodnoty lomové energie a odporu proti šíření trhliny. Při stanovování těchto lomových charakteristik se pracovalo téměř výhradně s body na sestupné větvi zatěžovacího diagramu, resp. s plochou tímto diagramem určenou. Body na sestupné větvi zatěžovacího diagramu odpovídají stádiím šíření trhliny, při kterých se čelo trhliny přibližuje k zadnímu volnému povrchu testovaného trámce a velikost a tvar kohezivní zóny za čelem trhliny jsou tímto povrchem silně ovlivněny. Napěťové poměry jsou při postupném porušování ligamentu trámce velmi složité. Lze tedy očekávat, že zatěžovací křivka získaná pomocí použitého MKP softwaru bude ve spodních partiích sestupné větve nepřesná. Navíc podíl chybou kontaminované části  $P$ - $d$



Obrázek 5: Závislost lokální lomové energie  $g_f$  na faktoru biaxiality  $B$

diagramu se bude zvětšovat s rostoucí délkou zářezu (tj. s klesající počáteční délkou ligamentu).

Jak bylo poznamenáno výše, sestupné větve simulovaných zatěžovacích křivek byly aproximovány jednoduchými funkcemi, v horní části exponenciální funkcí a v dolní mocninnou. Tato skladba aproximace byla zvolena pro svou dobrou výstižnost průběhu simulovaných křivek (viz obr. 1). Na hodnotách lomových parametrů korespondujících s druhou částí aproximace sestupné větve je však zřejmá kumulace chyby výpočtu (právě tato kumulace je příčinou odklonu sestupné větve od exponenciály). V grafech na obr. 3, 4 a 5 se projevuje náhlou změnou trendu průběhů vypočtených lomových parametrů. Proto je v těchto grafech průběh lomového parametru odpovídajícího druhé části aproximace sestupné větve odlišen.

Na obr. 3 lze porovnat hodnoty odporu proti šíření trhliny  $\mathcal{R}$  a lomové energie  $G_f$  během šíření trhliny. U obou veličin můžeme pozorovat tendenci dosáhnout určité limitní hladiny, není zde patrný trend snižování hodnot těchto veličin s přibližováním čela trhliny k zadnímu volnému povrchu tělesa. Přestože  $\mathcal{R}$  i  $G_f$  principiálně vyjadřují tutéž veličinu, tj. hodnotu energie potřebnou pro rozšíření plochy trhliny o jednotku, jejich hodnoty se velmi liší. Každá z těchto veličin sice vychází z jiného pojetí nelineárního modelování kvazikřehkého lomu (modely ekvivalentní elastické trhliny vs. modely kohezivní trhliny), avšak zjištěný rozdíl je závažnější. Pravděpodobnou příčinou této diskrepance se jeví použití nevhodného modelu pro odhad odtěžovací poddajnosti pro výpočet délky efektivní trhliny.

Grafy na obr. 4 a 5 znázorňují průběhy lokální lomové energie na relativní délce trhliny a jí odpovídající hodnotě faktoru biaxiality. Z těchto výsledků není jednoznačně zřejmá závislost lokální lomové energie na relativní délce trhliny, její mírný pokles s přibližováním čela trhliny k volnému okraji trávce je však pro jednotlivé simulované zkoušky patrný. Obdobně lze zhodnotit závislost lokální lomové energie na constraintu napětí reprezentovaného faktorem biaxiality  $B$ . Jednoznačný závěr nemůžeme učinit, lze však očekávat snižování  $g_f$  s rostoucím constraintem.



## 7. Závěr

V příspěvku byly prezentovány hodnoty lomových parametrů stanovených na základě vyhodnocení zatěžovacích diagramů numericky simulovaných lomových zkoušek. Virtuální experimenty zahrnovaly tříbodový ohyb trámce se zářezem pro čtyři různé délky zářezů. Z částí zatěžovacích křivek se stanovovala lomová energie disipována v jednotlivých stádiích lomového procesu. Tato lokální lomová energie byla vztažena ke geometrii konstrukce prostřednictvím parametru biaxiality popisujícího constraint napětí v okolí kořene trhliny. Jednoznačná závislost mezi geometrií konstrukce a hodnotou lokální lomové energie nebyla pozorována. Předpokládá se, že konkrétnější závěrů bude dosaženo při vyhodnocení výsledků skutečných lomových experimentů (tvar sestupné větve není ovlivněn numerickou chybou simulace), přičemž zaznamenání odtěžovací poddajnosti by mělo být provedeno v dostatečném počtu bodů zatěžovacího diagramu (pro kalibraci modelu pro odhad odtěžovací poddajnosti používanou při výpočtu efektivní délky trhliny).

## 8. Poděkování

Tento výsledek byl získán za finančního přispění MŠMT, projekt 1M6840770001, v rámci činnosti výzkumného centra CIDEAS.

## 9. References

- [Bažant 1996] Bažant, Z.P., 1996: Analysis of work-of-fracture method for measuring fracture energy of concrete. *Journal of Engineering mechanics*, Vol. 122, No. 2, 138–144
- [Červenka et al. 2003] Červenka, V. et al., 2003: *ATENA Program Documentation, Theory and Users manual for ATENA 2D*. Červenka Consulting, Praha
- [Duan et al. 2002] Duan, K., Hu, X.-Z., Wittmann, F.H., 2002: Explanation of size effect in concrete fracture using non-uniform energy distribution. *Materials and Structures*, Vol. 35, 326–331
- [Duan et al. 2003] Duan, K., Hu, X.-Z., Wittmann, F.H., 2003: Boundary effect on concrete fracture and non-constant fracture energy distribution. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 2257–2268
- [Hillerborg et al. 1976] Hillerborg, A., Modéer, M., Petersson, P-E., 1976: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, 773–782
- [Hu & Duan 2004] Hu, X.-Z., Duan, K., 2004: Influence of fracture process zone height on fracture energy of concrete. *Cement and Concrete Research*, 34, 1321–1330
- [Hu & Wittmann 1992] Hu, X.-Z., Wittmann, F.H., 1992: Fracture energy and fracture process zone. *Materials and Structures*, 25, 319–326
- [Hu & Wittmann 2000] Hu, X.-Z., Wittmann, F.H., 2000: Size effect on toughness induced by crack close to free surface. *Engineering Fracture Mechanics*, 65, 209–221

- [Karihaloo 1995] Karihaloo, B.L., 1995: *Fracture mechanics and structural concrete*. New York: Longman Scientific & Technical
- [Karihaloo et al. 2003] Karihaloo, B. L., Abdalla, H. M., Imjai, T., 2003: A simple method for determining the true fracture energy of concrete. *Magazine of Concrete Research*, 5/2003, 471–481
- [Karihaloo & Abdalla 2005] Karihaloo, B.L., Abdalla, H.M., 2005: A simple method for the determination of the true specific fracture energy of concrete. In proceedings of conference *Non-Traditional Cement & Concrete*, Bílek & Keršner (eds.), Brno, 415–432
- [Kněsl a Bednář 1998] Kněsl, Z., Bednář, K., 1998: *Dvouparametrová lomová mechanika: Výpočet parametrů a jejich hodnoty*. Ústav fyziky materiálů Akademie věd České republiky, Brno
- [Leevers & Radon 1982] Leevers, P.S., Radon, J.S. (1982) Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries. *International Journal of Fracture*, 19, 311–325
- [RILEM 1985] RILEM Committee FMC 50 (Recommendation), 1985: Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend test on notched beams. *Materials and Structures*, 18, 285–290
- [Řoutil a kol. 2006a] Řoutil, L., Veselý, V., Štancl, P., Keršner, Z., 2006: Simulace určování lomové energie: Vliv hustoty sítě. Sborník konference *Modelování v mechanice 2006* (CD ROM), Ostrava
- [Řoutil a kol. 2006b] Řoutil, L., Veselý, V., Keršner, Z., 2006: Úskalí při určování lomově-mechanických vstupů pro numerické modelování. Přijato do konference *Applied Mechanics 2006*, Srní
- [Trunk & Wittman 2001] Trunk, B., Wittmann, F.H., 2001: Influence of size on fracture energy of concrete. *Materials and Structures*, Vol. 36, 260–265
- [Veselý a kol. 2003] Veselý, V., Veselá, K., Veselý, M., 2003: Modelování poškození a tvar  $K_R$ -křivek určených z odtěžovací poddajnosti. Sborník semináře *Problémy lomové mechaniky III*, Brno, 82–93
- [Veselý 2004] Veselý, V., 2004: *Parametry betonu pro popis lomového chování*. Disertační práce, FAST VUT v Brně, Brno
- [Williams 1957] Williams, M.L., 1957: On the stress distribution at the base of stationary crack. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 24, 109–114