



VZÁJEMNÉ PŮSOBENÍ KMITAJÍCÍ SOUSTAVY A ZDROJE ENERGIE

L. Půst*

Summary: Majority of publications on mechanical vibrations are based on the assumption that the external excitations is produced by an ideal source of power with prescribed frequency. But in reality, the excitation sources are non-ideal with limited power, limited inertia and their frequency fluctuates according the instantaneous state of oscillating system. The paper presents on overview of systems and results gained during the several dozens of years on this interaction problem. The most characteristic properties of systems excited by source of limited power and limited inertia are variation of revolution, distortion of harmonic motion, instability and non-uniform passage through resonance zone.

1. Úvod

Teorie kmitání mechanických soustav se zakládá především na využití partikulárních řešení diferenciálních rovnic popisujících pohyb soustavy při vynuceném kmitání. Přitom se předpokládá, že buzení se děje s předepsanou, obvykle konstantní frekvencí a že tato frekvence nezávisí na velikosti amplitudy a fázového posunutí rozkmitávané soustavy. Také stabilita periodických stavů, která je velmi důležitou veličinou při výzkumu a hodnocení složitých a nelineárních soustav, zkoumá se prakticky vždy při předepsané frekvenci buzení.

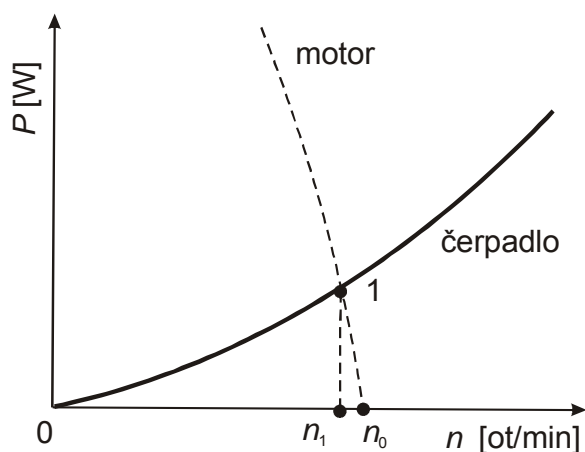
Takovéto zjednodušené schéma však neumožňuje vysvětlit řadu důležitých vlastností kmitajících soustav, které se objevují v rezonanční oblasti u skutečných strojů. Ve skutečnosti totiž mechanický systém je vždy rozkmitáván reálným zdrojem síly – např. motorem, který má konečný výkon a konečnou setrvačnost a vykazuje určitou závislost otáček na zatížení.

Vzájemné ovlivňování reálného zdroje energie a poháněné mechanické soustavy (pracovního stroje) je dáno frekvenčními charakteristikami obou pod-soustav. Jinak se tato interakce projeví u strojů, které mají s otáčkami monotónní stoupající charakteristiku odběru výkonu jako jsou např. pumpy, čerpadla atd., kde potřebný výkon je zhruba úměrný čtverci otáček, a jinak u strojů, pracujících na vibračním principu, kdy průběh výkonové otáčkové charakteristiky je nemonotónní a obsahuje kromě stoupající i klesající část. Sem patří vibrační síta, vibrační transportéry, vibrační kladiva, ale také většina experimentálních zařízení pro výzkum dynamických vlastností strojů a stavebních konstrukcí. Schematicky jsou tyto dva případy naznačeny na obr. 1a, 1b. V prvním případě se výkonové charakteristiky motoru a

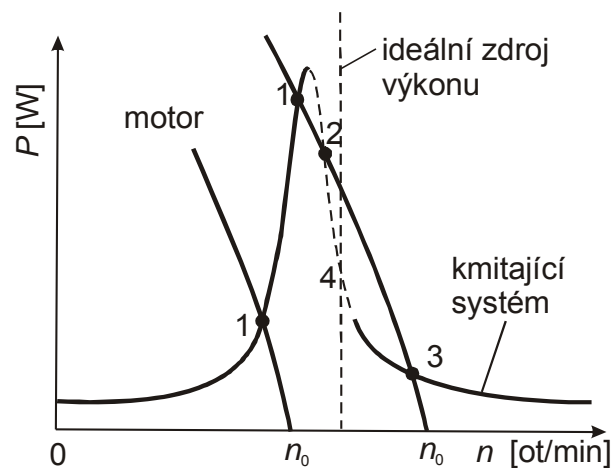
* Ing. Ladislav Půst, DrSc., Ústav termomechaniky AV ČR v.v.i., Dolejškova 5, 182 00 Praha 8, tel.: +420 266 053 212, fax: +420 286 584 695, e-mail: pust@it.cas.cz

pracovního stroje protínají v jednom bodě 1 udávajícím ustálený stav při otáčkách n_1 . Bod n_0 udává otáčky motoru při běhu naprázdno.

U málo tlumených kmitajících lineárních systémů je výkonová charakteristika nemonotónní, obsahuje stoupající a klesající větev, zmařený výkon v rezonanci bývá několikrát větší než mimo rezonanční oblast a za určitých podmínek je rovnovážný stav víceznačný, viz body 1,2,3. Tato víceznačnost je způsobena sklonem výkonové (momentové) charakteristiky zdroje – měkkého, neideálního, konečného zdroje energie.



a)

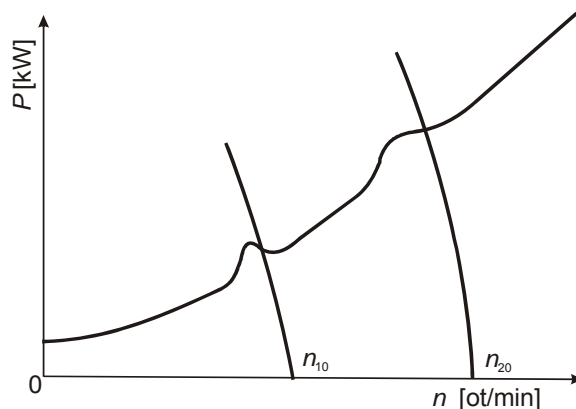


b)

Obr. 1a Monotónní výkonová charakteristika

Obr. 1b Nemonotónní charakteristika

Je-li systém rozkmitáván nekonečně silným (tvrdým, ideálním) zdrojem energie, pak kolísání zatěžovacího výkonu nemění otáčky a jeho charakteristika je znázorněna na obr. 1b svislou čárkovanou přímkou. Rovnovážný stav lineárního kmitajícího systému je pak jednoznačný, daný bodem 4.



Obr. 2 Charakteristika stroje s převážně monotónně stoupajícím odběrem energie

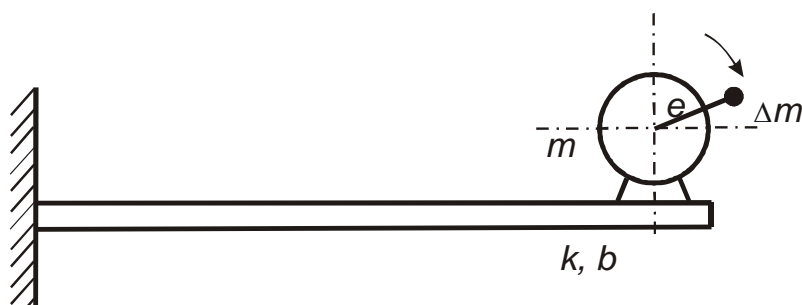
Chování strojních systémů v technické praxi (např. spalovacích motorů na pružně uloženém základu, rotorů velkých rotačních strojů atd.) je nejčastěji popsáno kombinací obou případů z obr. 1a a 1b, neboť v provozu představuje energie zmařená kmitáním systému v rezonanci pouze několik málo procent celkové energie, která se předává pracovnímu stroji

nebo mediu. Energetické poměry v takovém případě jsou naznačeny na obr. 2. Vlivem převahy zatížení systému monotónně stoupajícího s otáčkami je vliv odběru energie kmitáním systému zanedbatelný a při matematickém modelování se většinou rezonanční charakter systému zanedbává [1,2,3] nebo se budící zdroj uvažuje jako tvrdý, nekonečného výkonu s předepsanou frekvencí.

Pro systémy, kde rezonanční charakter pracovního resp. poháněného stroje je výrazný (vibrační síla, vibrační dopravníky, dynamické experimenty atd.) je třeba použít složitější matematický model vystihující specifické vlastnosti rezonančních systémů.

2. Fyzikální podstata interakce kmitající soustavy a zdroje budící síly

Prvá podrobnější zmínka o chování málo tlumeného kmitajícího systému buzeného měkkým zdrojem energie je od A. Sommerfelda [4], podle kterého vznik hysterézní smyčky v odezvě takového systému a s tím související přeskoky z jedné části rezonanční křivky na druhou se nazývá „Sommerfeldův efekt“. Tento efekt byl experimentálně ověřen na kmitání nosníku rozkmitávaného na jeho konci nevyváženým motorem (obr. 3). Je to příklad málo tlumeného kmitajícího systému. V oblasti první rezonance lze použít model o 1 stupni volnosti.



Obr. 3 Nosníkový systém

Z pohybové rovnice

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \Delta me \omega^2 \cos \omega t \quad (1)$$

vyjde

$$x = a \cos(\omega t - \varphi) = \frac{\Delta me \omega^2 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2 \omega^2}} \quad (1a)$$

Zmařená energie za 1 cyklus je

$$E = \oint F_t dx = \int_0^{2\pi} b \dot{x}^2 dt = \pi b a^2 \omega \quad (2)$$

a za 1 s je zmařená energie neboli výkon

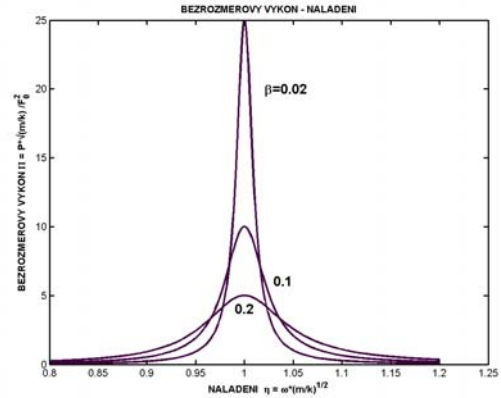
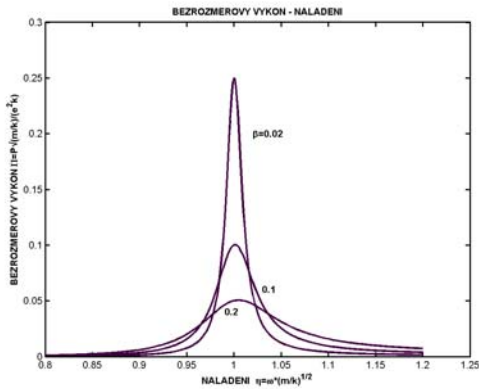
$$P = E\omega / 2\pi = \frac{1}{2} b a^2 \omega^2 = \frac{b}{2} \frac{(\Delta me)^2 \omega^6}{(k - m\omega^2)^2 + b^2 \omega^2} \quad (3)$$

Zavedením bezrozměrových veličin

$$\mu = \frac{\Delta m}{m}, \quad \eta = \omega \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \beta = b / \sqrt{km}, \quad \Pi = \frac{P}{e^2 k} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

dostaneme

$$\Pi = \frac{\beta}{2} \frac{\mu^2 \eta^6}{(1-\eta^2)^2 + \beta^2 \eta^2}. \quad (5)$$



Obr. 4 Výkonová charakteristika, $F_0 = \Delta m e \omega^2$ Obr. 5 Výkonová charakteristika, $F_0 = \text{konst.}$

Průběhy závislosti Π, η pro poměr hmot $\mu = 0,1$ a tři hodnoty poměrného tlumení $\beta = 0,02; 0,1; 0,2$ jsou v rozsahu $\eta = 0,8 - 1,25$ nakresleny na obr. 4. V mimo-rezonančních oblastech $\eta < 0,96$ a $\eta > 1,04$ stoupá zmařený výkon s rostoucím tlumením β , ale v rezonanci je tomu naopak, zmařený výkon roste s klesajícím tlumením β . V limitním případě pro $\beta \rightarrow 0$ je $\Pi \rightarrow \infty$ a diagram Π, η přejde na Dirakovu funkci v bodě $\eta = 1$.

Podobné křivky dostaneme pro systém buzený kinematicky pomocí stlačované pružiny. Budicí síla má konstantní amplitudu a pohybová rovnice je

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

Zmařený výkon v bezrozměrovém tvaru je

$$\Pi = \frac{\beta}{2} \frac{\eta^2}{(1-\eta^2)^2 + \beta^2 \eta^2}; \quad (7)$$

kde nyní
$$\Pi = \frac{P \sqrt{km}}{F_0^2}. \quad (7a)$$

Diagram na obr. 5 je velmi podobný obrázku 4 a kvalitativní rozdíly mezi vlastnostmi v rezonanční a nerezonanční oblasti platí i pro tento případ buzení.

Z obou obrázků tedy plyne, že bez ohledu na typ buzení u menšího tlumení je vždy výraznější rezonanční vrchol a účinky interakce mezi motorem a kmitající soustavou jsou proto výrazné především u málo tlumeného systému a dají se zanedbat u dostatečně tlumených soustav.

V prvním případě, zvláště když má budicí zdroj malý výkon, musíme do matematického modelu soustavy zahrnout i rovnici popisující dynamické vlastnosti zdroje, v druhém ideálním případě nekonečně silného zdroje energie stačí analyzovat pouze samotný kmitající systém a buzení vyjádřit jako zadanou předem definovanou funkci času.

3. Přehled úloh

S rostoucí rychloběžností a vylehčováním strojů a konstrukcí a se vzrůstajícím rozsahem experimentálního dynamického výzkumu se objevovala řada jevů, které se nemohly vysvětlit pomocí teorie kmitání vynuceného budící silou s předepsaným průběhem.

Resonanční jevy ve strojích buzených neideálním, omezeným zdrojem energie se začali zabývat různí vědečtí pracovníci. V Rusku a Ukrajině to v poválečném období byla skupina Prof. V.O. Kononěnka, která se zaměřila především na vliv vibrátoru s rotujícími nevyváženými hmotami [5,6,7]. Schéma základního studovaného systému je na obr. 6. Pohyb hmoty m ve vertikálním směru je popsán dvěma diferenciálními rovnicemi

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \Delta me(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \quad (8)$$

$$I\ddot{\varphi} = L(\dot{\varphi}) - q(\dot{\varphi}) + \Delta me\ddot{x} \sin \varphi,$$

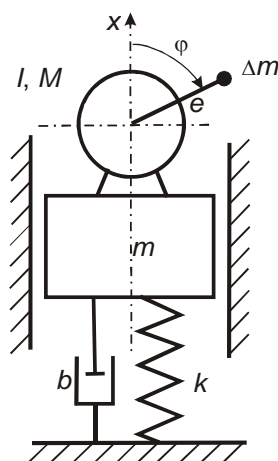
kde $L(\dot{\varphi})$ je moment motoru, závisející od úhlové rychlosti,

$q(\dot{\varphi})$ je moment třecích sil proti otáčivému pohybu.

Často se užívá výsledný vnější moment

$$M(\dot{\varphi}) = L(\dot{\varphi}) - q(\dot{\varphi}). \quad (8a)$$

I když kmitající systém je lineární, vlivem vazby s odstředivým vibrátorem je soustava rovnic (8) silně nelineární.



Obr. 6 Systém buzený nevyvážkem

O těchto jevech přednášel Prof. Kononěnko na Konstruktérské konferenci v Liblicích u Mělníka v r. 1957 [6]. K řešení rovnic (8) použil přibližnou metodu středních hodnot, která je založena na předpokladu, že kmity se málo liší od harmonických a že změna úhlové rychlosti $\dot{\varphi}$ se děje pomalu řádu malého parametru ε . V prvním, přiblížení zanedbáváme vyšší harmonické složky. S použitím substituce

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\varphi + \xi), & \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, \\ \frac{dx}{dt} &= -a\Omega \sin \psi, & \psi &= \varphi + \xi \end{aligned} \quad (9)$$

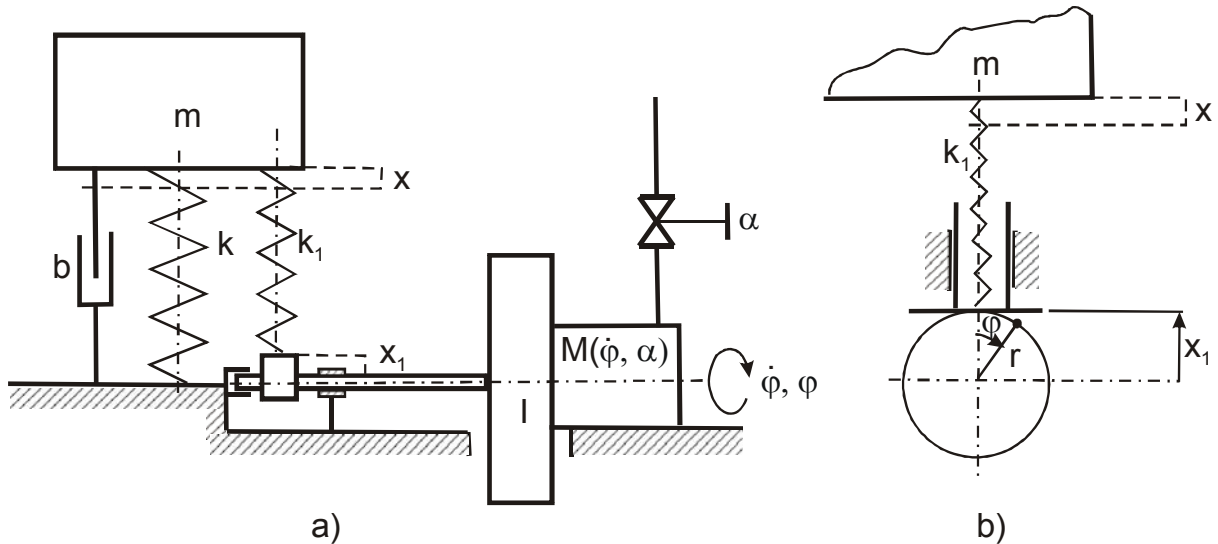
Lze pak soustavu (8) transformovat na soustavu tří rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\varepsilon}{I} \left[M(\omega) + \frac{1}{2} me\Omega\omega a \sin \xi \right] \\ \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\Omega M} [me\omega^2 \sin \xi + b\Omega a] \\ \frac{d\xi}{dt} &= \Omega - \omega - \varepsilon \frac{me\omega^2}{2M\Omega a} \cos \xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Ustálený stav dostaneme, položíme-li $\frac{d\omega}{dt} = 0$, $\frac{da}{dt} = 0$, $\frac{d\xi}{dt} = 0$.

Získané transcendentní rovnice dávají podle typu momentové charakteristiky motoru $M(u)$ jeden nebo tři (někdy i více) reálných kořenů $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$. Pro ně pak můžeme určit tři hodnoty amplitud $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$. Analýza stability ukazuje, že ne každý pár řešení $(\omega^{(i)}, a^{(i)})$ je stabilní a může být na reálné soustavě uskutečněn.

Bez návaznosti s pracemi Kononěnka v Moskvě byly také u nás ve stejnou dobu začaty práce na interakci zdroje energie s kmitajícím systémem [8,9], které se však zaměřily na vyšetřování vlivu vibrátoru tvořeného motorem s vačkou a pružinou. Schéma zkoumaného systému je na obr. 7.



Obr. 7 Systém tvořený vačkou a pružinou

Tento typ vibrátoru při rovnoměrném otáčení osy motoru dává buzení kmitajícího systému harmonickou silou o konstantní amplitudě F_0 . Pohybové rovnice jsou

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + (k + k_1)x &= k_1 r \cos \varphi \\ I\ddot{\varphi} &= M(\dot{\varphi}, \alpha) + k_1 r(-x + x_{st} + r \cos \varphi) \sin \varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

kde k_1 je tuhost pružiny vibrátoru
 r excentricita vačky
 $k_1 x_{st}$ předpětí pružiny (v práci [8] $x_{st}=0$).

Po zavedení bezrozměrových veličin a nové proměnné úhel φ místo času t – jsou pohybové rovnice ($\mathcal{G} = d\varphi / d\tau$).

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^2 y'' + \mathcal{G}(\mathcal{G}' + \varepsilon d)y' + y &= \varepsilon \chi \cos \varphi \\ \mathcal{G}\mathcal{G}' &= \varepsilon \mu_0(\alpha) - \varepsilon \mu_1(\alpha)\mathcal{G} + \varepsilon^2 \chi \rho \sin \varphi (\cos \varphi - y). \end{aligned} \quad (12)$$

Tato soustava nelineárních rovnic byla řešena asymptotickou metodou ve tvaru

$$\begin{aligned} y &= a \cos(\varphi - \psi) + \varepsilon u_1(a, \psi, w, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi, w, \varphi) + \dots \\ \mathcal{G} &= w + \varepsilon v_1(a, \psi, w, \varphi) + \varepsilon^2 v_2(a, \psi, w, \varphi) + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

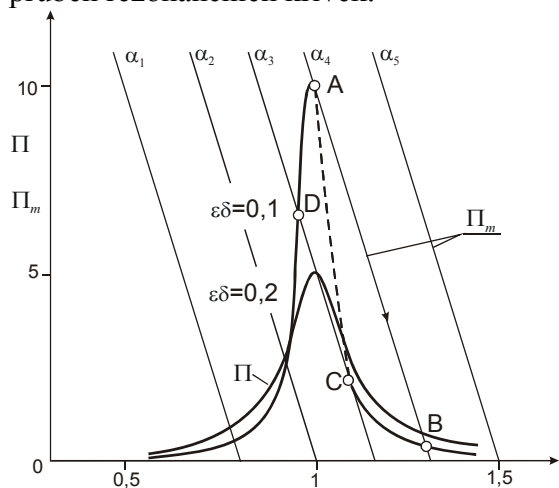
kde nové proměnné a, ψ, w jsou určeny vztahy

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\varphi} &= \varepsilon A_1(a, \psi, w) + \varepsilon^2 A_2(a, \psi, w) + \dots \\ \frac{d\psi}{d\varphi} &= 1 - w + \varepsilon B_1(a, \psi, w) + \varepsilon^2 B_2(a, \psi, w) + \dots \\ \frac{dw}{d\varphi} &= \varepsilon D_1(a, \psi, w) + \varepsilon^2 D_2(a, \psi, w) + \dots\end{aligned}\tag{13a}$$

Pracným výpočtem byly získány analytické vztahy popisující kmitání systému

$$\begin{aligned}y &= a\left(1 + \varepsilon^2 \frac{\chi\rho}{16w^2}\right) \cos(w\Omega t - \psi) + \varepsilon^2 a \frac{\chi\varphi}{16w^2} \cos(3w\Omega t - \psi)t\dots \\ \vartheta &= w - \varepsilon^2 \frac{\chi\rho}{4w} \cos 2w\Omega t + \dots\end{aligned}\tag{14}$$

Malý výkon a malá setrvačnost zdroje budící síly má vliv na nerovnoměrnost otáčení ϑ , které obsahuje sudé (od předpětí i liché) harmonické složky. Ani průběh kmitů oscilačního systému není již čistě harmonický, nýbrž opět obsahuje vyšší harmonické složky, tentokrát však především lichého řádu. Zatímco malá setrvačnost ovlivňuje hlavně velikost vyšších harmonických, charakteristika motoru má naproti tomu značný vliv na stabilitu kmitů a na průběh rezonančních křivek.



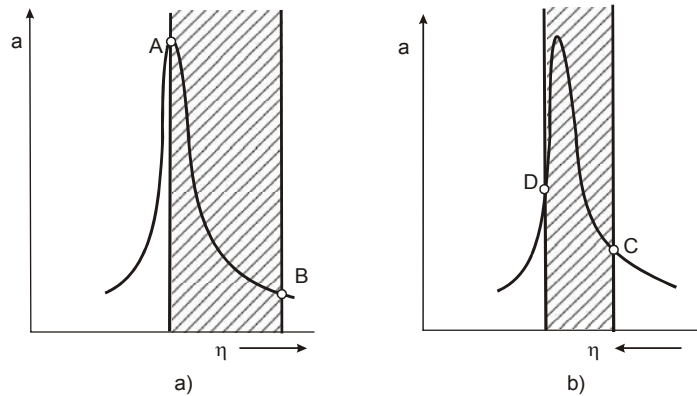
Obr.8 Interakce zdroje energie s tlumenou soustavou

Tento vliv je vidět z obr. 8, kde jsou vykresleny 2 různě tlumené rezonanční výkonové křivky pro tlumení $\varepsilon\delta = 0,1$ a $0,2$. a několik linearizovaných charakteristik motoru vibrátoru s různě nastaveným přívodem energie α_i .

Je vidět, že při postupném přívodu energie se vzrůst otáček daný průsečíky motorových charakteristik α s křivkou odběru energie $\varepsilon\delta = 0,1$ před rezonancí silně zpomalí. Po přechodu vrcholu rezonance (bod A) nastane rychlý přeskok do bodu B. Při snižování přívodu energie nastane rychlý přechod z bodu C do D. Maximální amplitudy při přejezdu rezonance nahoru a dolů se tedy liší. Část rezonanční křivky A,B je nestabilní a nelze ji experimentálně

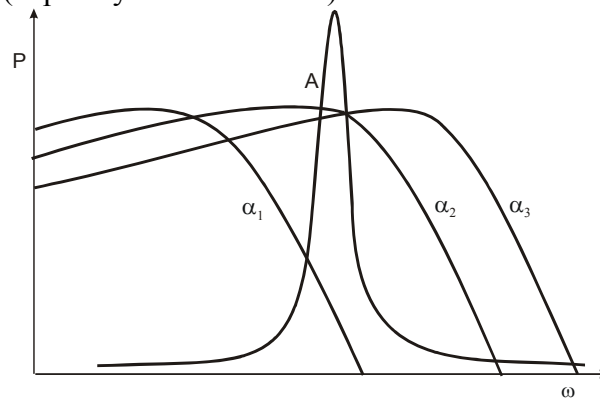
změřit.

Zvýšení tlumení na $\varepsilon\delta = 0,2$ odstraní všechny tyto jevy, všechny stacionární stavy jsou stabilní a pouze mírné zpomalení vzrůstu otáček před rezonancí a rychlejší vzrůst otáček za rezonancí zůstává.



Obr. 9 Oblasti nerealizovatelných stacionárních režimů

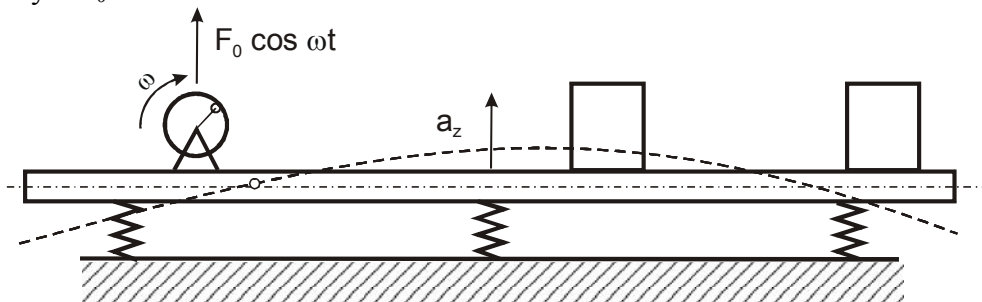
Oblasti nerealizovatelných stacionárních režimů při pomalém zvyšování (a) nebo snižování (b) přívodu energie do zdroje buzení jsou naznačeny vyšrafovanými plochami na obr. 9. Může však nastat případ, že zdroj energie je tak malý, že k přechodu rezonance vůbec nedojde. Toto je vidět z obr. 10, kde jsou vykresleny charakteristiky motoru s omezeným maximálním výkonem (např. asynchronní motor). Mluvíme o tzv. rezonanční bariéře.



obr. 10 Rezonanční bariéra při zvyšování přívodu energie

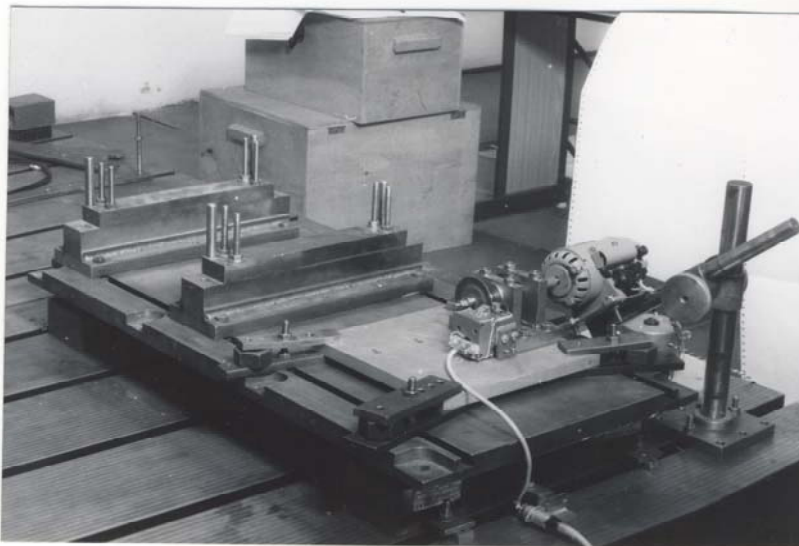
Tyto jevy byly studovány též experimentálně na fyzikálních modelech. V [10] je popsán přechod rezonance ocelové desky buzené odstředivým vibrátorem. Schéma měřeného systému je na obr. 11, jeho fotografie na obr. 12a a pohled na rotační vibrátor – poháněný elektromotorem je na obr.12 b. Na volném konci vibrátoru je vidět kotouč s výřezy pro optické měření fázového posunutí a okamžité úhlové rychlosti otáčení.

Rezonanční frekvence byla 162,5 Hz a amplituda budicí síly při těchto rezonančních otáčkách byla $F_0=830$ N.

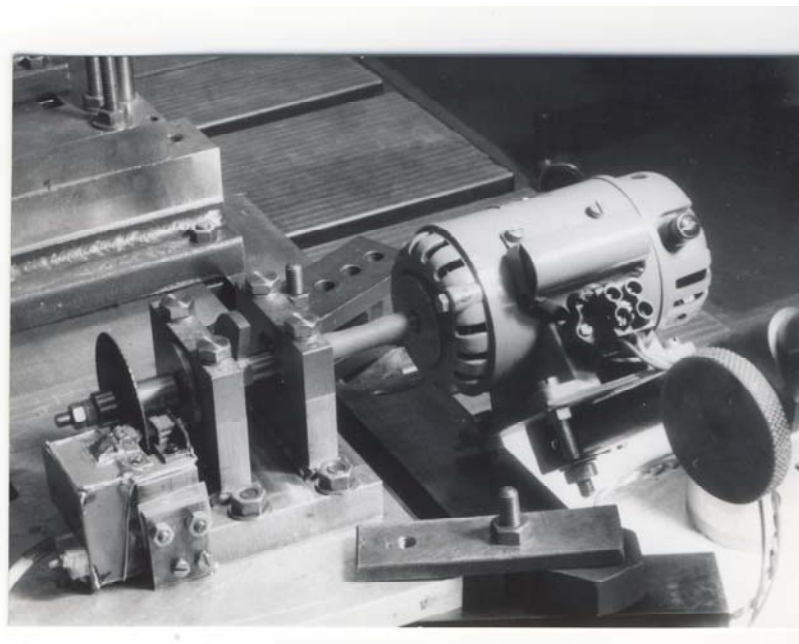


obr. 11 Schéma experimentálního zařízení

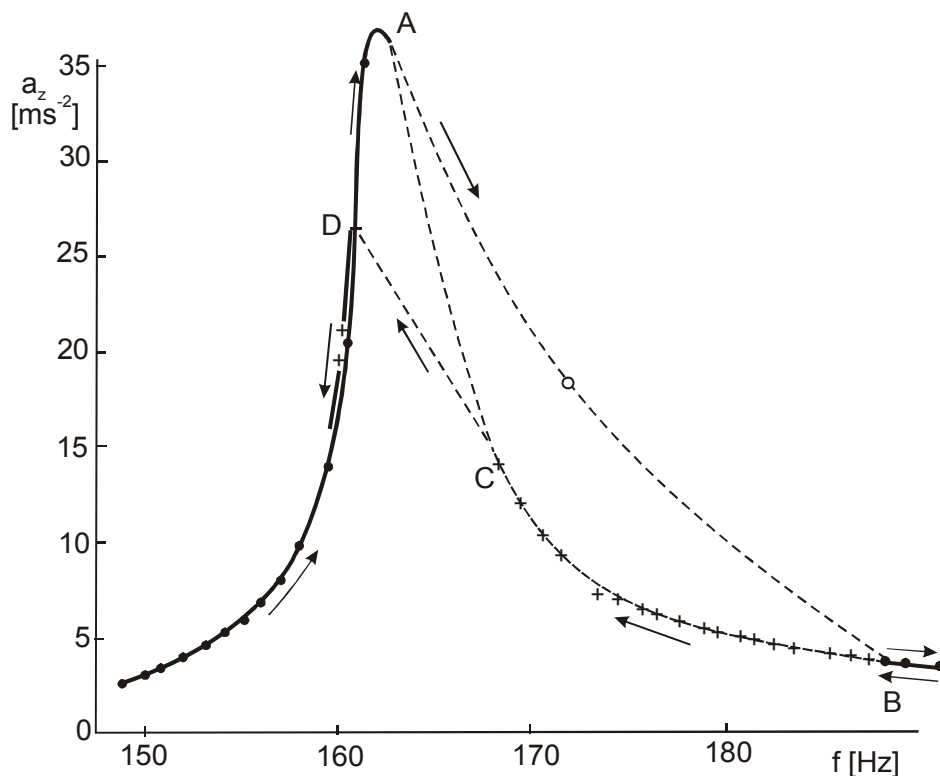
Ukázka v ÚT-ČSAV naměřeného kmitání při obousměrném přejíždění rezonance je na obr. 13. Byla zkoumána málo tlumená ($D=0,015$) třetí dvou-uzlová rezonance, jejíž v tvar je na obr. 11 vyznačen čárkovaně. Body naměřené při pomalém snižování otáček jsou označeny kroužky, při zvyšování otáček křížky.



obr. 12a Ocelová deska – kmitající systém



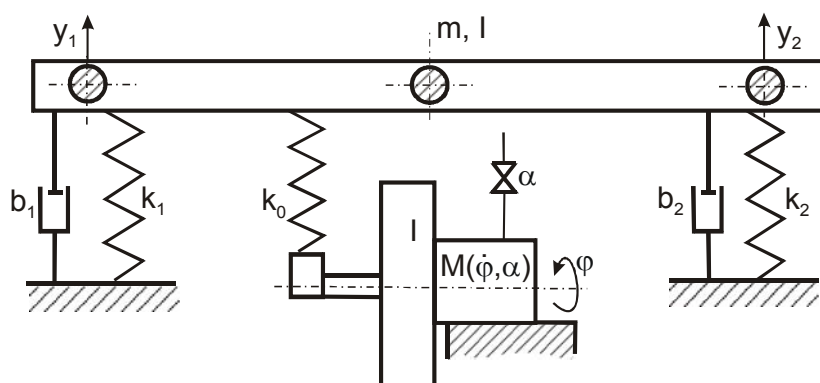
obr. 12b Rotační vibrátor s elektromotorem



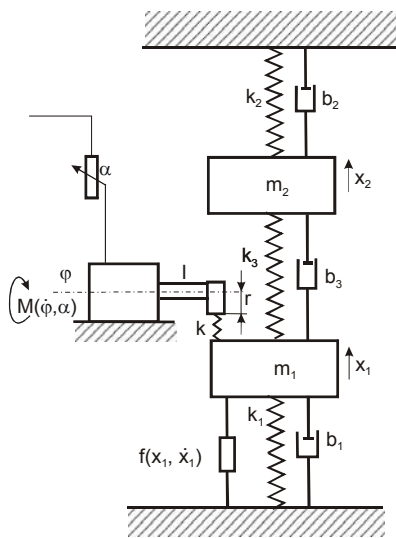
obr. 13 Záznam měření přechodu přes rezonanci

Řada měření ověřujících výsledky teorie jsou realizované nejen na fyzikálních modelech, ale také na analogových a digitálních počítačích [12,14].

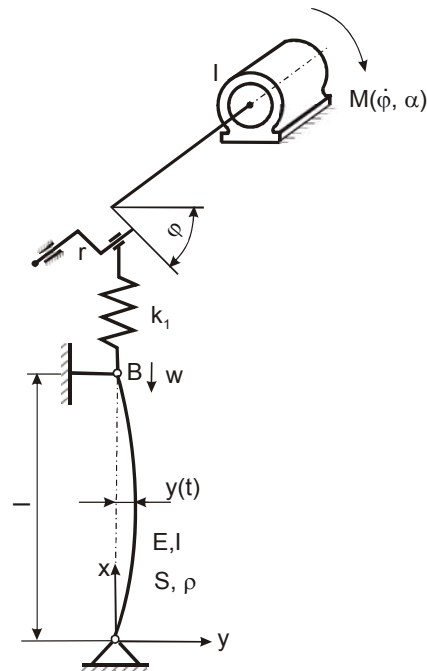
V další etapě výzkumu interakce omezeného zdroje energie a kmitající soustavy byla pozornost zaměřena na soustavy o 2 stupních volnosti. Byly to soustavy nosníkové typu s inerciální vazbou – obr. 14, lit [10], nebo dvou-hmotové soustavy modelující např. laděný tlumič – obr. 15 [1,12]. Při řešení byly zkoumány stacionární i přechodové děje, jejich stabilita a chování v nestabilních oblastech, především v případech nelineárních pružin.



obr. 14 Systém s dvěma stupni volnosti



obr. 15 Dvuhmotový systém



obr. 16 Parametricky buzená tyč na vzpěr

Vliv konečného výkonu vibrátoru se projevuje nejen u vynucených kmitů, ale také u ostatních typů buzení, např. parametrického nebo samobuzeného. V [13] je řešeno kmitání a stabilita systému se tyčí zatíženou statickou a periodickou silou na vzpěr. Schéma je naznačeno na obr. 16.

Pohybové rovnice vychýlení y tyče uprostřed a ve frekvenční oblasti její první rezonance jsou

$$\ddot{y} + \frac{b\dot{y}}{m} + (\Omega^2 + k_2 / m \sin \varphi)y + \gamma y^3 = 0 \quad (16)$$

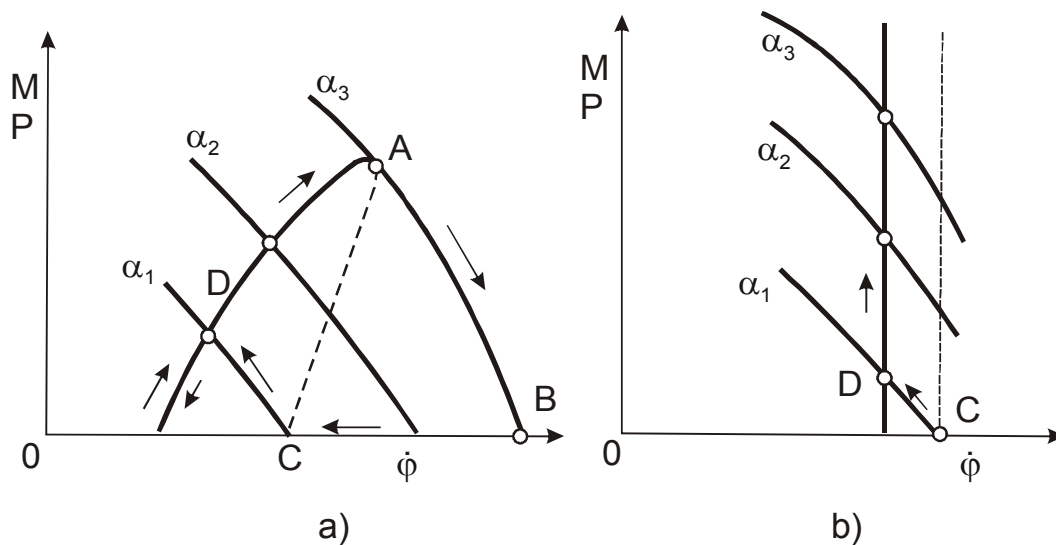
$$I\ddot{\varphi} = M(\varphi, \alpha) + k_1(x_0 + r \sin \varphi - \frac{\pi^2}{4l} y^2)r \cos \varphi$$

Při kmitání prutu se horní konec B pohybuje podle vztahu

$$w = \pi^2 y^2 / (4l) \quad (16a)$$

a umožňuje přenos energie mezi prutem a vibrátorem.

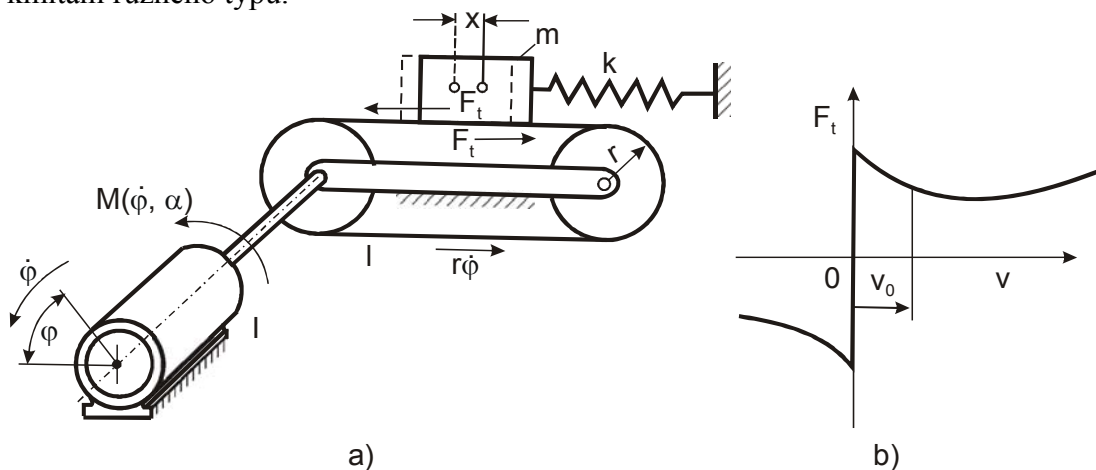
Děje při postupném zvyšování výkonu vibrátoru (α), který parametricky rozkmitává tlumený prut s nelineární kubickou charakteristikou, jsou schematicky znázorněny na obr. 17a. Kmitání se ustaví na režimech daných body na stoupající větvi samobuzených kmitů. Po dosažení bodu A nastane rychlý přechod do bodu B a prut přestane kmitat. V klidu zůstává i při následujícím poklesu napětí α , a teprve v bodě C vzroste amplituda příčného kmitání do bodu D. Obrazec ABCDA udává dynamickou hysterezní smyčku parametrické tlumené soustavy s měkkým buzením.



Obr. 17 parametrický systém

Pokud by parametricky rozkmitávaný systém byl lineární a zcela netlumený, pak nestabilní oblast je shora neomezená (obr. 17b) a tvoří barieru znemožňující jí překročit při pomalé změně budící frekvence. Pokud ji rychlým přechodem nebo impulsem přeskochíme, klesne kmitání prutu na nulu a při návratu dojde k malému rozkmitání podél křivky CD.

Další případ zpětného působení kmitající soustavy na zdroj energie je samobuzené kmitání různého typu.



obr.18 Samobuzený systém

Na obrázku 18a je schéma základního systému v němž vznikají samobuzené kmity vlivem nelineární charakteristiky třecích sil (obr. 18b).

Pohybové rovnice jsou:

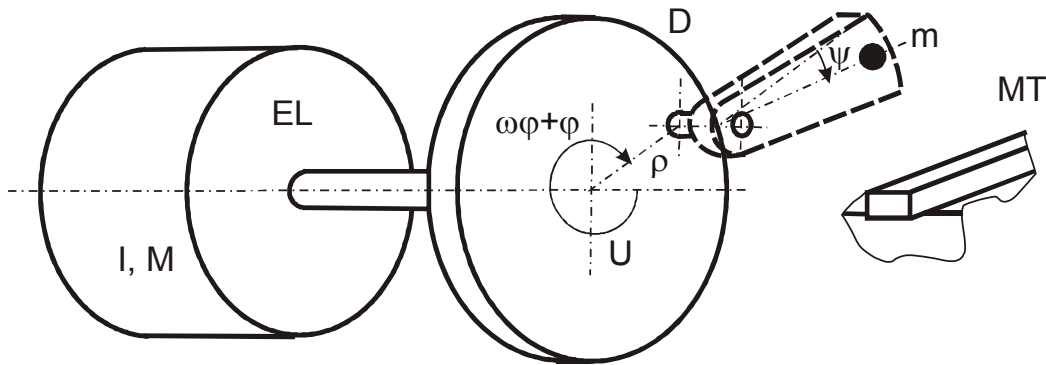
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_t(v)$$

$$I\ddot{\varphi} = M(\dot{\varphi}, \alpha) - rF_t(v),$$

kde $v = r\dot{\varphi} - \dot{x}$.

Tento systém je podrobně analyticky i pomocí analogových počítačů řešen v pracích [13,14], kde je ukázáno, že malá strmost momentové charakteristiky motoru silně ovlivňuje oblast a intenzitu samobuzených resp. relaxačních kmitů a může dokonce zabránit jejich vzniku.

Vazba silně nelineární soustavy s motorem je tématem práce [15], kde je analyzováno chování kladivového drtiče kovového šrotu.



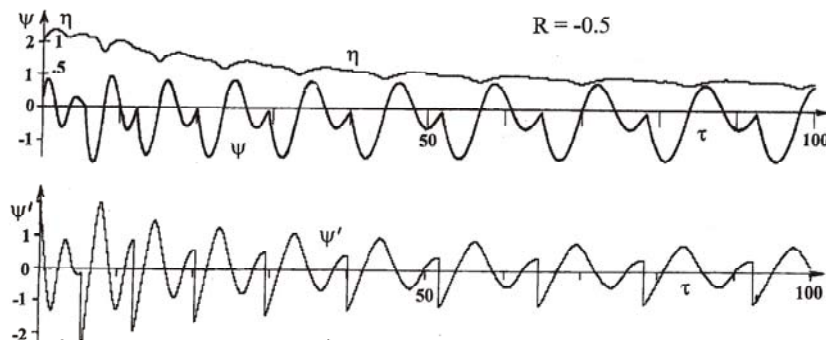
obr. 19 Schéma kladivového drtiče

Pohybové rovnice drtiče v časovém úseku, kdy kladivo se volně kýve jsou

$$\begin{aligned}
 & mr(\rho \cos \psi + r)\ddot{\phi} + mr^2\ddot{\psi} + m\rho r(\omega + \dot{\phi})^2 \sin \psi = \\
 & = -f\rho_c m \left\{ r(\omega + \dot{\phi} + \dot{\psi})^2 + \rho(\omega + \dot{\phi})^2 \cos \psi - \zeta\ddot{\phi} \sin \psi \right\} \frac{\dot{\psi}}{|\dot{\psi}|} \\
 & [I + (m_1 + m)\rho^2 + mr^2]\ddot{\phi} + m\rho r \cos \psi (2\ddot{\phi} + \ddot{\psi}) + mr^2\ddot{\psi} - \\
 & - m\rho r(2\omega + 2\dot{\phi} + \dot{\psi})\dot{\psi} \sin \psi = M_0(\omega_0 - \omega - \dot{\phi}) + \\
 & + \left(\rho \sin \psi + f\rho_c \frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}} \right) m \left\{ r(\omega + \dot{\phi} + \dot{\psi})^2 + \rho(\omega + \dot{\phi})^2 \cos \psi - \rho\ddot{\phi} \sin \psi \right\}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Průběh rázu na drcený předmět MT je popsán jednoduchým vztahem s použitím koeficientu restituice R , který však nyní musí popisovat nejen odraz, ale i průchod materiálem, a proto může být i záporný $-1 < R < 1$.

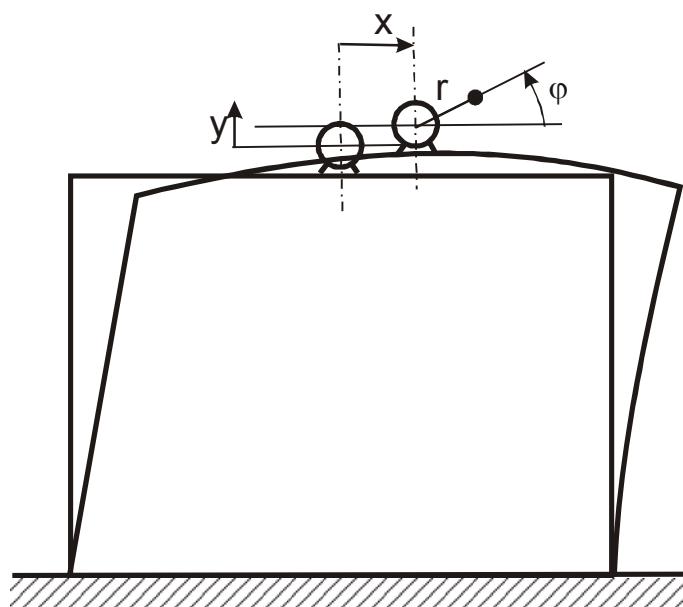
Ukázka začátku drcení po rozběhu motoru naprázdno je na obr. 20. Z poklesu otáček (křivka η), kývání kladiva (ψ) a z průběhu jeho rychlosti (ψ') je dobře vidět vzájemná interakce motoru a mechanické soustavy.



Obr. 20 Otáčky η a kývání ψ, ψ' kladiva drtiče

Mimo Evropu se problémem omezeného zdroje buzení zabývá skupina většinou jihoamerických odborníků vedená prof. Balthazarem J.M. Kromě přehledu dosavadních

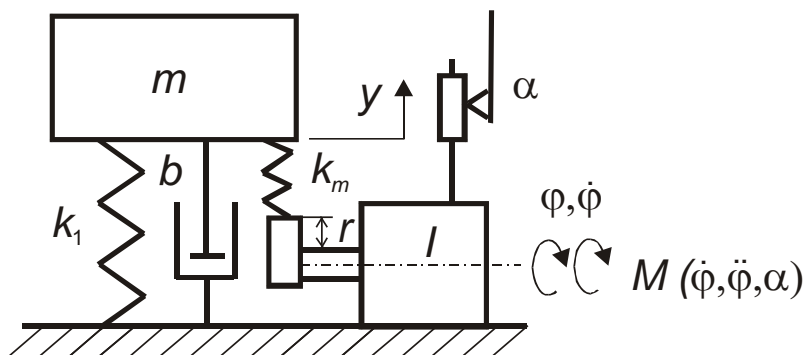
hlavně západních prací [16] se tato skupina zaměřila na teoretická a experimentální řešení nosníkových konstrukcí [17], [18]. Příklad jednoduché rámové konstrukce je na obr. 21. Numerické řešení pohybových rovnic této velmi málo tlumené soustavy umožnilo studovat jak Sommerfeldův efekt, tak rezonanční bariéru i různé typy pohybu, včetně chaotických. Chaotické děje byly podrobněji studovány v [19] [20] na systému kyvadla rozkmitávaného klikovým mechanismem.



Obr. 21 Kmitání rámové konstrukce

Interakci asynchronního motoru s klikovým mechanismem je věnována také práce [21], především z hlediska nerovnoměrnosti chodu.

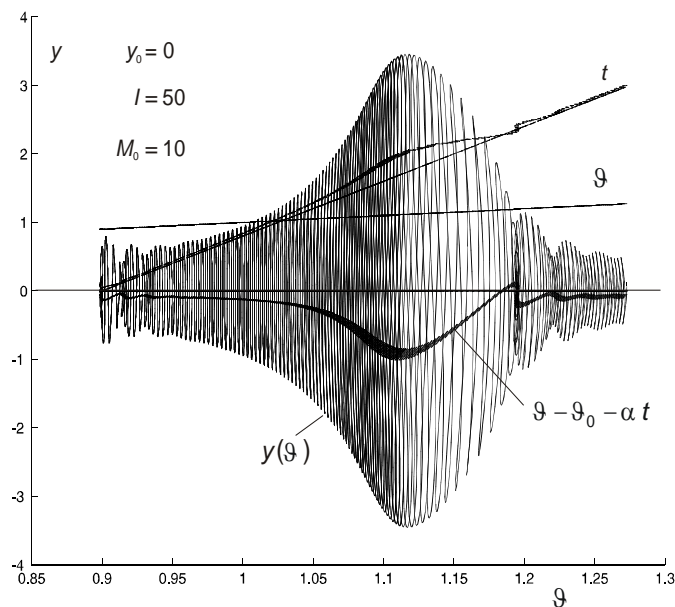
Problematikou nestacionárních kmitů u soustav s omezeným zdrojem budící síly jsme se v ÚT-AV ČR zabývali poslední tři roky. V [22] je řešen případ přechodu přes rezonanční oblast jednoduchého lineárního systému buzeného vačkovým mechanismem ($F_0 \cong konst.$), nakresleného na obr. 22a. Motorová charakteristika byla zjednodušena na lineární závislost $M_0(\alpha - \vartheta)$, $\vartheta = \dot{\varphi}$.



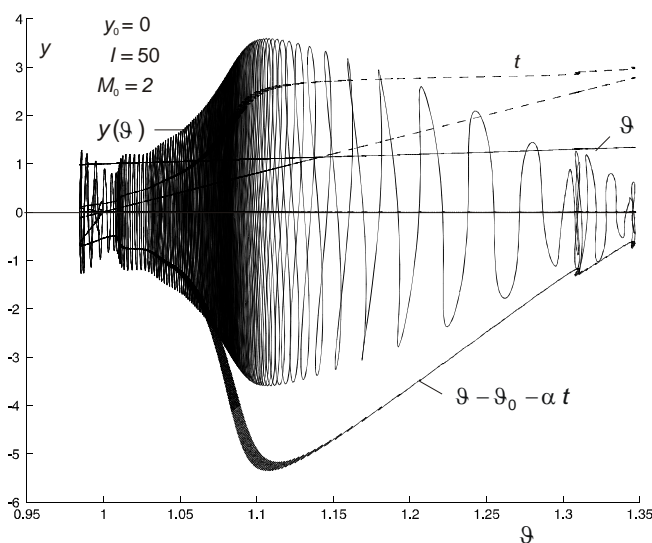
Obr. 22a Systém pro studium přechodu přes rezonanci

Průběh kmitů v závislosti na okamžité úhlové rychlosti ϑ je nakreslen na obr. 22b spolu s průběhem času t a rozdílem okamžité rychlosti oproti jejímu rovnoměrnému zvyšování $\vartheta - \vartheta_0 - \alpha t$. Lineární závislost frekvence a času ($\vartheta = \alpha t$) platí pro tvrdý zdroj energie ($M_0 = \infty$). Pružina mezi vačkou a kmitajícím systémem byla bez předpětí ($y_0 = 0$) a proto kmity obsahovaly druhou harmonickou složku.

Zatímco moment setrvačnosti I ovlivňuje především nerovnoměrnost chodu během jednotlivých kmitů, strmost M_0 momentové charakteristiky mění celkový průběh přejezdu přes rezonanci. Z obr. 23, kde byla strmost snížena z $M_0=20$ na $M_0=2$, je vidět výrazné zpomalení vzrůstu úhlové rychlosti ϑ v oblasti $\vartheta = 1,05 - 1,1$ (tmavé pole) následované rychlou změnou frekvence za rezonancí ($\vartheta = 1,1 - 1,3$). Průběhy t a $\vartheta - \vartheta_0 - \alpha t$ tyto změny kvantifikují

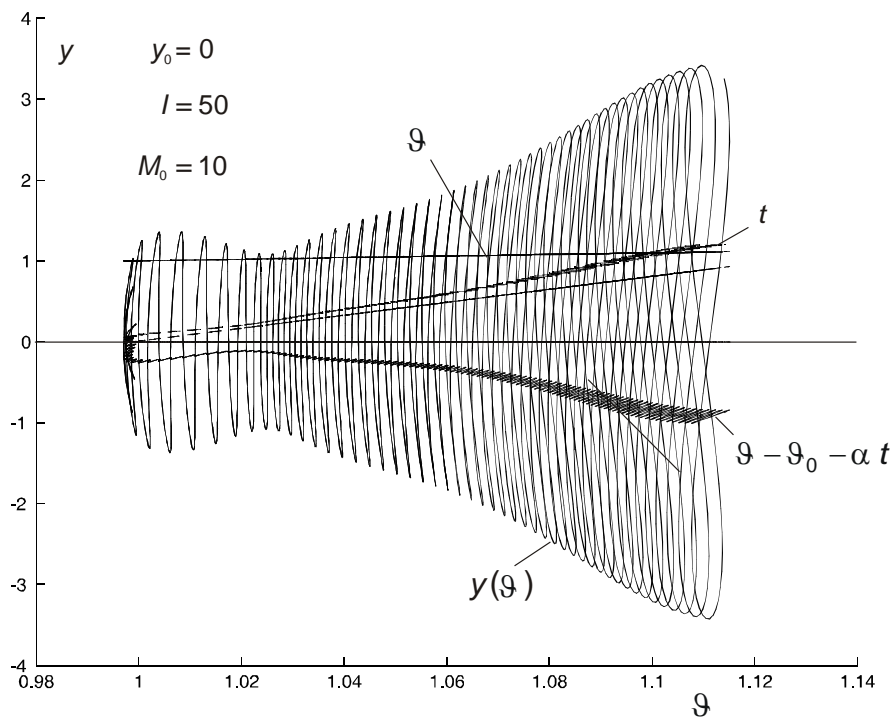


Obr. 22b Záznam přechodu

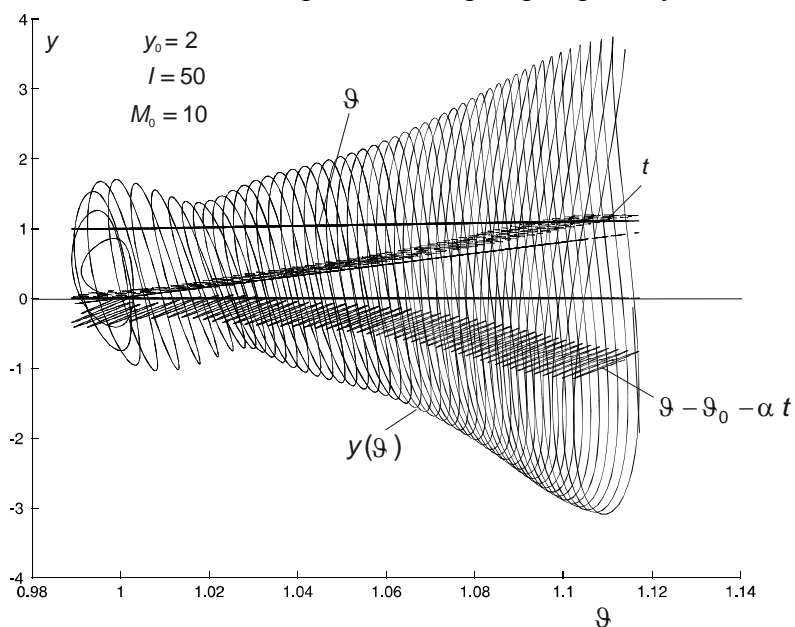


Obr. 23 Přejíždění rezonance s měkkým zdrojem energie

Vliv předpětí na průběh kmitů je znázorněn na obr. 24a,b., kde je zaznamenáno najíždění do resonance. Při nulovém předpětí kmitů i otáčky obsahují především druhou harmonickou složku, předpětí způsobuje vzrůst první harmonické.



Obr. 24a Průběh kmitů při nulovém předpětí pružiny vibrátoru



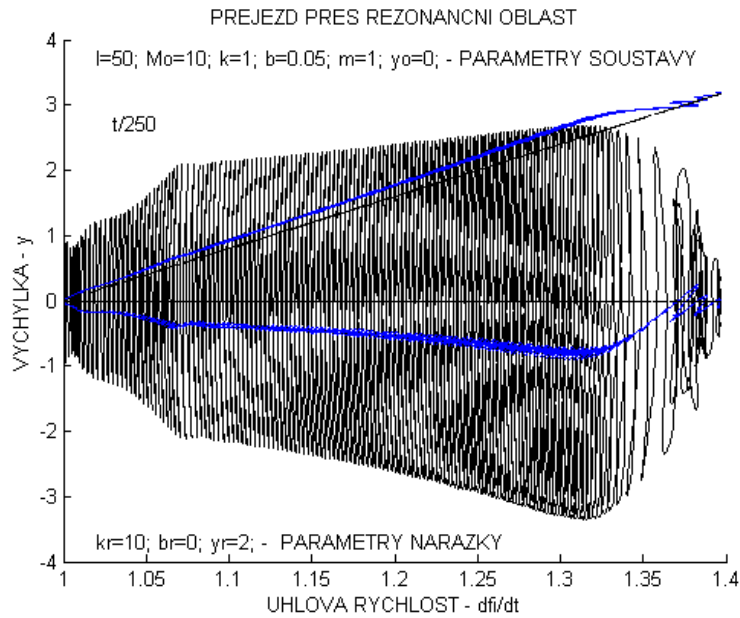
Obr. 24b Průběh kmitů při předpětí pružiny

Vliv jednostranné nárazky na nestacionární kmitání byl studován v [23]. Pohyb systému s jednostrannou nárazkou je popsán rovnicemi

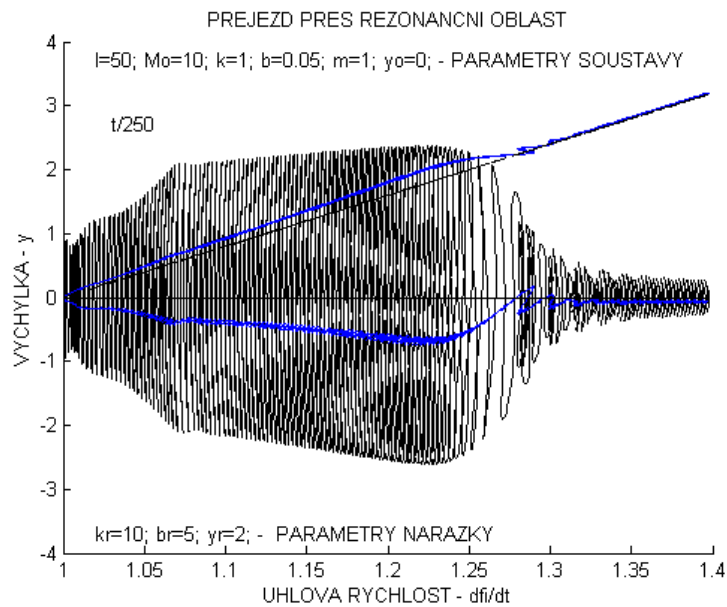
$$m\ddot{y} + b\dot{y} + k_1 y + H(y - y_r)k_r (y - y_r)(1 + b_r \dot{y}) = k_m (r \cos \varphi - y + y_0)$$

$$I\ddot{\varphi} = M(\dot{\varphi}, \alpha) + k_m r \sin \varphi (r \cos \varphi - y + y_0).$$

Záznam přejíždění rezonanční oblasti při vůli $y_r=2$ a při nulovém tlumení v rázu $b_r=0$ je na obr. 25. Tlumená nárazka omezila rozsah maximálních amplitud – obr. 26.

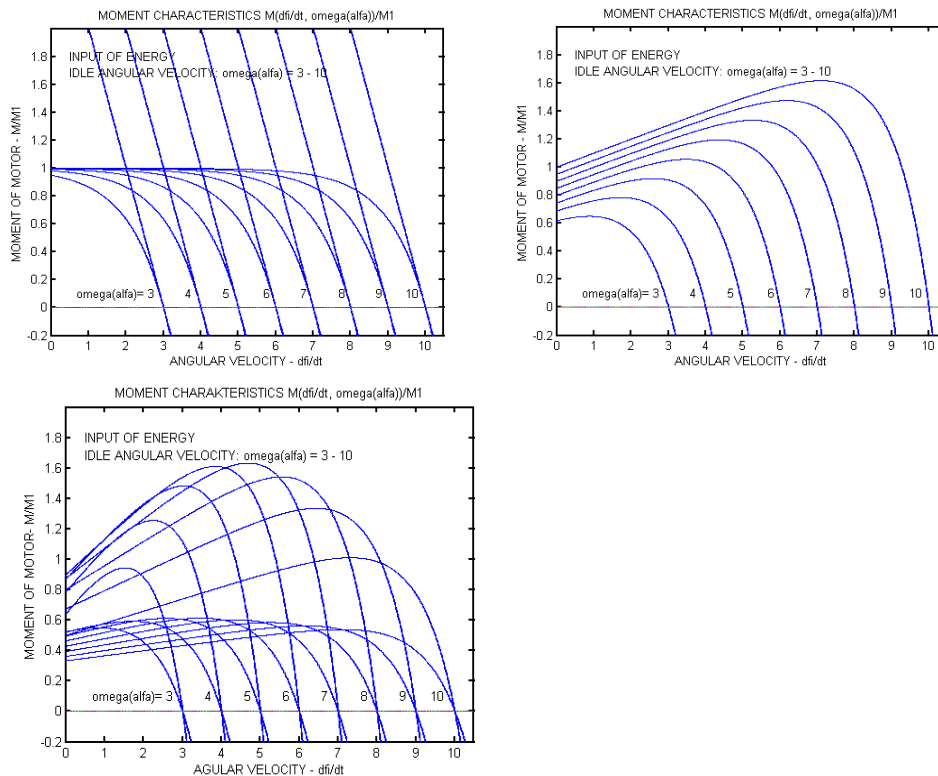


Obr. 25 Vliv jednostranné elastické nárazky



Obr. 26 Vliv tlumení v nárazce

V předešlých výpočtech byla motorová charakteristika zjednodušena na lineární závislost $M_0(\omega - \alpha)$. Statické charakteristiky skutečných motorů však při větším zatížení jsou silně nelineární jak je vidět z obr. 27.

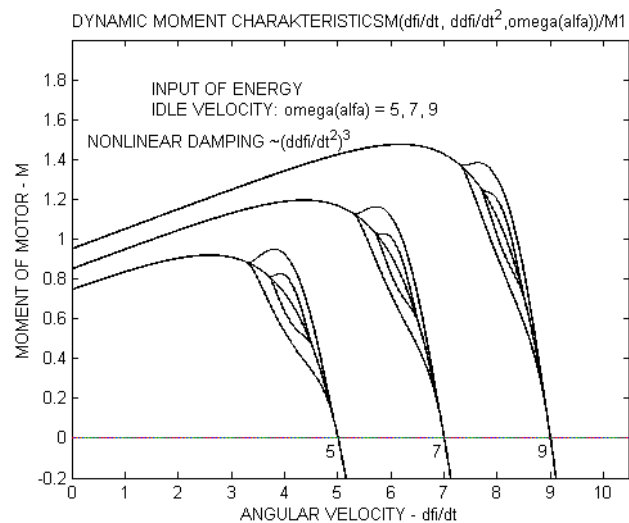


Obr. 27 Příklady statických charakteristik motoru

Statické charakteristiky lze použít pro řešení stacionárních nebo slabě nestacionárních procesů, když moment budicího zdroje závisí pouze na otáčkách ω , nikoliv na její změně $d\omega/dt$. Je-li změna rychlosti $\dot{\varphi} = \omega$ výrazná, musíme použít složitější charakteristiku $M(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \alpha)$ např. s přídavným členem $M_1(\ddot{\varphi})$ k stacionární charakteristice [24].

$$M(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \alpha) = M(\dot{\varphi}, \alpha) + M_1(\ddot{\varphi}). \quad (21)$$

Příklad tří charakteristik pro hodnoty napájecího parametru (běh naprázdno) $\alpha = 5, 7, 9$ a pro nelineární přídavný člen úměrný třetí mocnině zrychlení $M_1(\ddot{\varphi}) = M_2 \ddot{\varphi}^3$ je na obr. 28.



Obr. 28 Dynamická charakteristika motoru

Ještě přesnější model získáme využitím vztahů, které popisují elektrické a magnetické procesy probíhající uvnitř elektromotoru [25]. Pro konstantní hodnoty L indukčnosti, R odporu, $c\Phi$ magnetického toku je závislost mezi proudem i a vstupním napětím U dána vztahem

$$L di/dt + RI + \Phi \dot{\varphi} = U. \quad (22a)$$

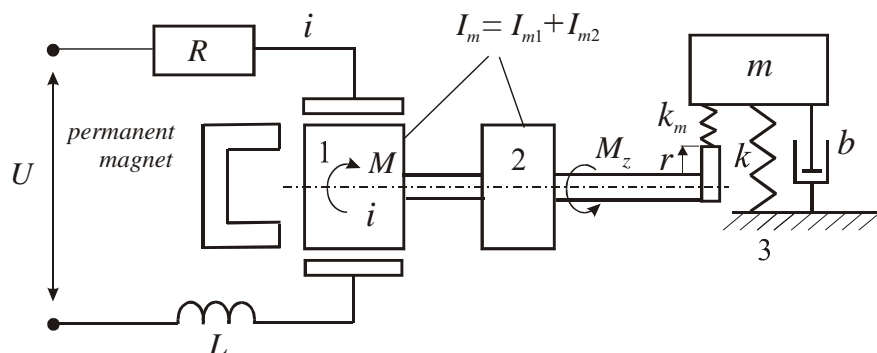
Tato rovnice musí být doplněna rovnicí pro otáčení rotoru φ

$$I_m \ddot{\varphi} = c\dot{\varphi} - M_z(\dot{\varphi}, t) - k_m r \sin \varphi (r \cos \varphi - y + y_0) \quad (22b)$$

a rovnicí kmitajícího systému

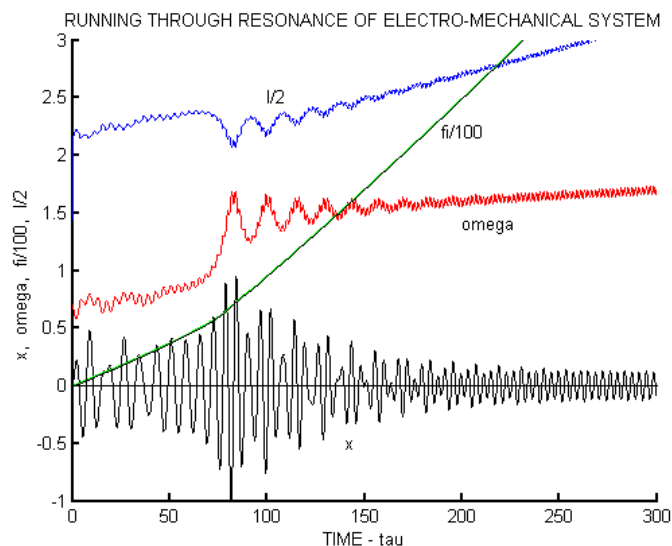
$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky + f(y, \dot{y}) = k_m (r \cos \varphi - y + y_0). \quad (22c)$$

Schéma tohoto elektromechanického systému je na obr. 29.



Obr. 29 Schéma elektromechanického systému

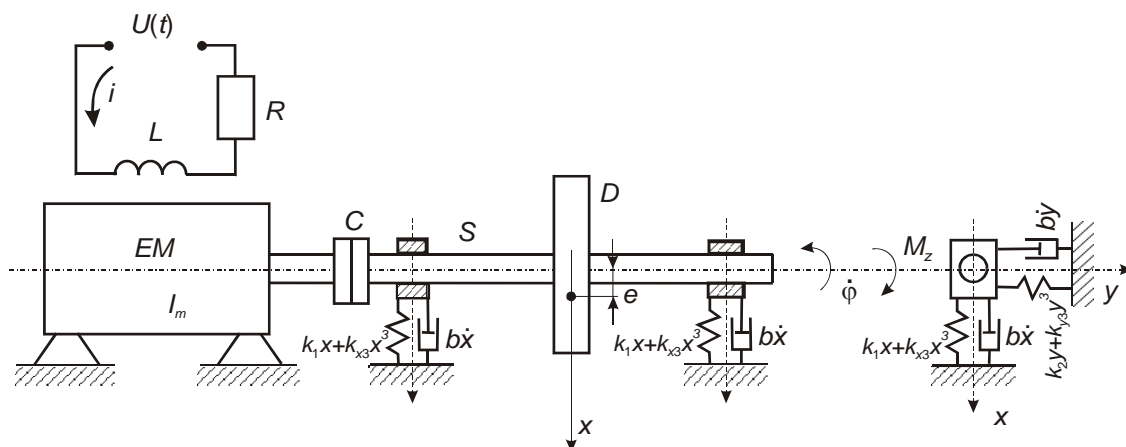
Plynulým zvyšováním vstupního napětí $U(t)$ dojde k přechodu přes rezonanci, jehož průběh je znázorněn na obr. 30.



Obr. 30 Přechod přes rezonanci

I když napětí U stoupá lineárně s časem, proud i a úhlová rychlost $\omega = \dot{\varphi}$ vykazují značné kolísání a vyšší harmonické složky.

Podobné jevy se vyskytují i u systému buzeného rotačním vibrátorem [26] a u rotorového systému, kde kmitající systém má dva stupně volnosti se stejnými vlastními frekvencemi [27] nebo dvě blízké frekvence [28,29]. Schéma posledního případu je na obr. 31.



Obr. 31 Rotorový elektromechanický systém

4. Závěrečné poznámky

- Je ukázáno, že vazba mechanického vibrátoru odstředivého nebo vačkového typu konečného výkonu s kmitajícím systémem je oboustranná.
- Tato vazba ovlivňuje stabilitu celého systému, průběh kmitání, ustálenou i přechodovou rezonanční křivku, otáčky vibrátoru, atd.
- Mechanické jevy se kopírují i do průběhu elektrického proudu.
- Lineární systém s měkkým buzením má podobné vlastnosti jako nelineární systém s tvrdým buzením: nestabilita, přeskoky, hysteretzní smyčka, rozdíl při stoupání a klesání otáček – Sommerfeldův efekt, rezonanční bariera.
- Z matematického hlediska: Nehomogenní rovnice

$$D(y, \dot{y}, \ddot{y}) = F(t)$$

se změní na homogenní bez pravé strany

$$D(y, \dot{y}, \ddot{y}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, U) = 0.$$

- Z hlediska mechaniky: Neexistuje vynucené kmitání, ale vždy samobuzené. Mechanický systém se mění na elektro-magneticko-mechanický.
- Vzájemná vazba mezi kmitající soustavou a soustavou budící neexistuje jen u mechanických vibrátorů, ale i u elektrodynamických (zvyšují tlumení) a u elektromagnetických (posouvají vlastní frekvenci).
- Také použitím snímače síly u vibrátoru nelze vzájemnou vazbu odstranit, snímač síly často pracuje částečně i jako akcelerometr.

Poděkování

Referát byl vypracován v rámci projektu GAČR č. 101/06/0063.

5. Literatura

- [1] Kratochvíl C., Krejza J.: „Modeling of drive systems“, Inst. of mechanics of solids, VUT Brno 2003.
- [2] Procházka F., Kratochvíl C.: „Úvod do matematického modelování pohonových soustav“. AN CERM, Brno 2002.

- [3] Slavík J., Stejskal V., Zeman V.: „Základy dynamiky strojů“. Vyd. ČVUT 1997.
- [4] Sommerfeld A.: „Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre“, Physikalische Zeitschrift, 3, S. 266-286, 1902.
- [5] Kononěnko V.O.: „Rezonansnyje svojstva centroběžnogo vibrátora“, Trudy seminaru po teorii mehanizmov i mašin r. 71, 1958.
- [6] Kononěnko V.O.: „Rezonanční jevy v pružných soustavách strojů s nevyváženými rotujícími hmotami“. Sborník ÚVS, Zásady novodobé konstrukce strojů, NČSAV, Praha, str. 272-287. 1959.
- [7] Blechman I.I. „Samosinchronizacija vibrátorov někotorych vibracionnyh mašin“, Inž. Sbornik, t. XVI, (1953).
- [8] Půst L.: „Vlijanije svojstv instočnika pereměnoj sily na kolebanij mehaničeskoj sistemy“, Aplikace matematiky, 3, č. 2, str. 428-450, 1958.
- [9] Brepta R., Půst L., Turek F.: „Mechanické kmitání“, Technický průvodce 71, Sobotáles, Praha, 1994.
- [10] Guz A.N., Markuš Š., Půst L.: „Dinamika těl vzájemodějstvujučich so sredoj“, Kijev, Naukova Dumka, 1991.
- [11] Půst L.: „Přechodové děje v nelineárním systému s blízkými resonancemi“, Sborník Dynamika strojů, Vyd. SAV, Bratislava, str. 185-198, 1963.
- [12] Půst L.: „Stability and transient phenomena in the nonlinear systems“, In 9. World Congress on TMM, Politechnico of Milano, Vol 2, p. 1489-1493, 1995.
- [13] Kononěnko V. O.: „Nelinějnije kolebanija mehaničeskich sistem“, Naukova Dumka, Kijev, 1980.
- [14] Alifov A. A., Frolov K.V.: „Vzajimodějstvije nělinějnyh kolebatelnyh sistem s istočnikami energii“, Nauka, Moskva, 1985.
- [15] Půst L.: „Dynamika kladivového drtiče“, In Inženýrská mechanika '96, Svratka, VUT Brno, str. 197-202, 1996.
- [16] Balthazar J.J., et. al.: „An Overview on Non-Ideal Vibrations“, Meccanica 38, p. 613-621, 2003.
- [17] Balthazar J.M. et al.: „Some Remarks on the Behaviour of a Non-ideal Dynamical System“, In Nonlinear dynamics, chaos, control and their application to engineering“, Vol 1., AAM, ABCM, p. 88-95, 1991.
- [18] Brasil R., M., Balthazar J. M.: „Nonlinear Oscillations of a Portal Frame Structure Excited by a Non-ideal Motor. In Control of Oscillations and Chaos“, ed. Fradkov A.L., IPME RAS, St. Petersburg, p. 275-278, 2000.
- [19] Belato D., et al.: „Bifurcational Phenomena in a Non-ideal system. In Control. of Oscillations and Chaos“, ed. Fradkov A.L., IPME RAS, St. Petersburg, p. 286-289, 2000.
- [20] Krasnopolska, T.S., Ševc A.Y.: „Chaotic interaction in a pendulum energy source system“, Prikladaja mehanika, 26, No 5, str. 90-96, 1990.
- [21] Oravský V., Mudrik J.: „Príspevok k dynamike agregátov s asynchrónnym pohonom“, Strojnícky časopis, 35, č. 1-2 str. 153-167, 1984.
- [22] Půst L.: „Vliv zdroje buzení na kmitání soustavy s jedním stupněm volnosti“, 20th Conference Computational Mechanics, ZČU, Nečtiny, pp. 421-428, 2004.
- [23] Půst L.: „Dynamická vazba mezi kmitající soustavou s rázy a zdrojem buzení“, Interaction and Feedbacks, Institute of Thermomechanics AS CR, str.125-134, 2004.
- [24] Půst L.: „Influence of Electric Motors Characteristics on the Behaviour of Driven Systems“, Inženýrská mechanika 205, Svratka, ČR. 12 str., CD ROM version, 2005.

- [25] Kratochvíl C., Procházka F.: „Porovnání dynamických vlastností elektromechanických pohonových soustav se stejnosměrnými motory“, Computational Mechanics., ZČU Plzeň, Nečtiny, str. 231-238, 2004.
- [26] Půst L.: „Vibrations of System Excited by a Motor with Limited Power“, 21th conference Computational mechanics 2005, Nečtiny, ZČU, pp. 493-500, 2005.
- [27] Půst L.: „Interaction between 2DOF Vibrating System and Motor with Limited Power“, Interaction and Feedbacks 2005, Institute of Thermomechanics AS CR. pp. 113-116, 2005.
- [28] Půst L.: „Effect of limited-power motor on vibrations of system with closely spaced resonances“, In. Computational Mechanics, Nečtiny, ZČU, p. 497-504, 2006.
- [29] Půst L.: „Weak excitation of non-linear rotor system with closely spaced resonances“, In. 12th IFTOMM World Congress, Besancon (France) June 18-21, v tisku.