



## NUMERICAL SIMULATION OF TRANSVERSE FATIGUE CRACK IN THE ROTOR SYSTEM SUPPORTED BY RADIAL ACTIVE MAGNETIC BEARINGS

P. Ferfecki\*

**Summary:** *For the purpose of efficient diagnostics of fault conditions the influence of transverse fatigue crack on dynamical behaviour of a rotor system supported by active magnetic bearings must be clarified. A so-called breathing behaviour of the crack is introduced when static deflection of shaft is considered larger than vibration amplitude of a shaft. In this work the opened and breathing models of the crack are incorporated into computational model of the rotor system. The opening and closing of the crack is governed by the status of stress intensity factor along the crack edge. The influence of different models of the crack, depth of the crack and external damping coefficient is investigated with help of frequency spectra, vibration responses and orbit plots.*

### 1. Úvod

V současné době se výzkum v rotorových soustavách uložených v aktivních magnetických ložiskách (AML) zaměřuje na oblasti vývoje regulačních obvodů, senzorů a zkoumání poruchových stavů (elektronických a mechanických částí). Příspěvek je věnován poslední z uvedených oblastí, protože pouze úzká část bádání se doposud zabývala problematikou příčných únavových trhlin v rotorových soustavách s aktivní zpětnou vazbou. Rozšíření poznání v této oblasti umožní konstrukci „chytrých“ rotorových soustav, ve kterých bude integrováno aktivní řízení, diagnostika a regulace k zaručení jejich optimálních provozních podmínek. Za účelem diagnostiky poruchových stavů způsobených příčnou únavovou trhlinou se musí plně objasnit vliv trhliny na dynamické chování rotorové soustavy s AML.

Dimarogonas a Papadopoulos (1987a) jako první uvedli matici poddajnosti způsobené trhlinou, která je odvozena na základě vztahů z lomové mechaniky ze součinitelů intenzity napětí a hustoty deformační energie. Řád této matice  $6 \times 6$ , jestliže se uvažuje se stupni volnosti odpovídajícím dvěma příčným posunutím a natočením a jednomu axiálnímu posunutí a torznímu natočení. Vliv nenulových mimodiagonálních členů v této matici, na spojení příčného, podélného a torzního kmitání s hřídelem s otevřenou trhlinou, později zkoumal Dimarogonas a Papadopoulos (1987b).

Pokud je amplituda kmitání buzeného nevyváhou větší než statický průhyb hřídele zůstane trhlina v hřídeli během jedné otáčky (stále) otevřená. Příklad otevírající a zavírající trhliny se

---

\* Ing. Petr Ferfecki, Ph.D.: Centrum pokročilých inovačních technologií, VŠB-TUO, třída 17. listopadu 15; 708 33 Ostrava-Poruba; tel.: +420.597 325 752, fax: +420.597 321 228; e-mail: [petr.ferfecki@vsb.cz](mailto:petr.ferfecki@vsb.cz)

v literatuře nazývá jako „dýchající“ („breathing“) nebo „zavírající“ („closing“) trhlina, jak uvádí Dimarogonas (1996). Tento případ nastane, jestliže amplituda kmitání od nevyvážení je menší než statický průhyb hřídele.

V odborné literatuře existuje několik odlišných přístupů zahrnutí „dýchání“ trhliny do výpočtového modelu rotorové soustavy. „Dýchání“ trhliny v oblasti ustáleného stavu a při otáčkách rotorové soustavy nacházejících se dostatečně daleko od kritických otáček, může být přibližně modelováno pomocí „dvou stavového“ modelu trhliny uvedeném v Earmme et al. (1992), ve kterém jeden stav odpovídá otevřenému a druhý zavřenému stavu trhliny. Poddajnost hřídele bez trhliny je v jejím otevřeném stavu snížena o celkovou poddajnost otevřené trhliny a v zavřeném stavu trhliny odpovídá poddajnosti hřídele bez trhliny. Mezi těmito dvěma stavy se rozhoduje podle změny znaménka průhybu hřídele, stanoveném v pevném souřadnicovém systému a směru kolmém k hraně trhliny.

Dimarogonas a Papadopoulos (1988) zahrnuli „dýchání“ příčné trhliny do výpočtového modelu rotorové soustavy pomocí rozvinutí prvků matice tuhosti hřídele do kosinové řady s jedním absolutním a prvními čtyřmi harmonickými členy. Koeficienty v tomto rozvoji jsou stanoveny za podmínky, že trhlina je zpočátku zavřená, pootočením hřídele o  $90^\circ$  se trhlina otevře z poloviny, následným pootočením hřídele o  $90^\circ$  se trhlina otevře, dalším pootočením o  $90^\circ$  trhlina zůstane z jedné poloviny zavřená a pootočením hřídele o celou otáčku se trhlina opět zavře.

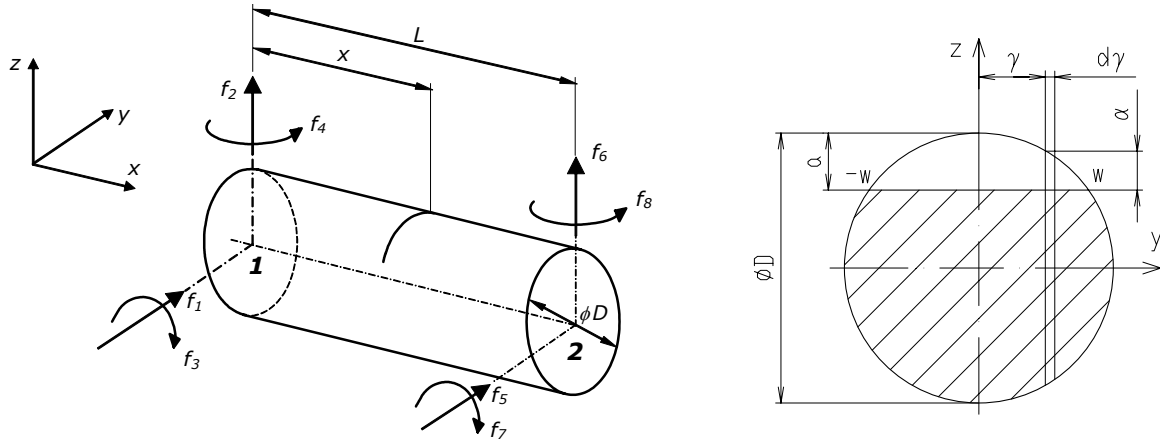
Model „dýchání“ trhliny použitelný v celém rozsahu provozních otáček rotorové soustavy nacházející se v přechodovém i ustáleném stavu a postihující přesnější fyzikální podstatu „dýchání“ trhliny je představen v článku Earmme et al. (1992). Jeho rozšíření o axiální stupeň volnosti pro Jeffcottův model rotorové soustavy se třemi stupni volnosti je uvedeno v práci Chawla et al. (2002) a pro rotorovou soustavu modelovanou hřídelovými konečnými prvky s dvanácti stupni volnosti prvku je v článku Chawla et al. (2004). V tomto modelu „dýchání“ trhliny se o velikosti jejího otevření rozhoduje na základě znaménka součinitele intenzity napětí numericky vypočítaného v bodech ležících na hraně trhliny. Zjištění záporné hodnoty součinitele intenzity napětí v daném bodě představuje zavřenou trhlinu (tlakové napětí) a naopak jeho kladná hodnota znamená otevřenou trhlinu (tahové napětí).

Doposud byly dynamické charakteristiky rotoru s trhlinou a aktivním zpětnovazebním řízením analyzovány v příspěvcích Ewins et al. (2000), (2003) a Kasarda et al. (2006). V těchto článcích je zkoumán Jeffcottův model rotorové soustavy uložený v absolutně tuhých ložiskách a AML použitým jako aktivní ovládací člen.

V předloženém příspěvku jsou prostřednictvím numerických simulací v programovém systému MATLAB zkoumány dynamické projevy příčné únavové trhliny na chování rotorové soustavy uložené v radiálních AML, která je řízena s proudovým PD regulátorem. Výpočtový model rotorové soustavy je sestaven pro otevřenou a „dýchající“ trhlinu využívající součinitele intenzity napětí. Odezva rotorové soustavy na buzení odstředivými silami rotujících částí je stanovena pomocí Newmarkovy integrační metody a funkcí implementovaných v MATLABu a k výpočtu její ustálené složky je použita metoda trigonometrické kolokace. Na základě Floquetovy věty je posouzena stabilita ustáleného periodického kmitání rotorové soustavy. Vybuzené harmonické násobky v rezonančních křivkách z rotorové soustavy s trhlinou a bez trhliny jsou porovnány s hodnotami kritických otáček vypočítaných z Campbellova diagramu. Z tvaru ustálených trajektorií středu hřídele, rezonančních křivek, diagramů stability pohybu a frekvenčních spekter je studován vliv modelu trhliny, hloubky trhliny a vnějšího tlumení na dynamické chování rotorové soustavy.

## 2. Stanovení matice tuhosti hřídelového prvku s příčnou trhlinou

Uvažuje se hřídelový prvek o průměru  $D$  ( $R = D/2$ ) a délce  $L$ , který obsahuje ve vzdálenosti  $x$  od prvního uzlu elementu příčnou trhlinu. Hřídelový prvek z obr. 1 je namáhán v prvním uzlu smykovými silami  $f_1, f_2$  ve směru os  $y, z$  a ohybovými momenty  $f_3, f_4$  kolem souřadnicových os  $y, z$ . Druhý uzel prvku je namáhán smykovými silami  $f_5, f_6$  a ohybovými momenty  $f_7, f_8$ .



Obr. 1 Hřídelový prvek s příčnou trhlinou (vlevo) a řez hřídele v místě trhliny (vpravo)

Celková matice poddajnosti  $\mathbf{C}^e$  hřídelového prvku s trhlinou je dána součtem matice poddajnosti prvku bez trhliny  $\mathbf{C}_{\text{btr}}^e$  a přídatné matice poddajnosti způsobené trhlinou  $\mathbf{C}_{\text{tr}}^e$ .

Prvky přídatné matice poddajnosti hřídelového prvku  $\mathbf{C}_{\text{tr}}^e$  jsou podle knihy Dimarogonas a Paipetis (1983) určeny vztahem

$$c_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial f_i \partial f_j} \int_0^a \int_{-w}^w J(\alpha) d\alpha d\gamma, \quad (1)$$

kde  $f_i, f_j$  jsou zatěžující účinky (síly, momenty) působící v uzlech prvku (levý obr. 1) pro  $i, j$ -tý směr zatížení v uzlu prvku ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ),  $J(\alpha)$  je funkce hustoty deformační energie,  $w$  je polovina šířky trhliny,  $\gamma$  je vzdálenost elementu obdélníkového proužku od svislé osy průřezu,  $\alpha$  je okamžitá hloubka trhliny,  $a$  celková hloubka trhliny (pravý obr. 1).

Z článku Chawla (2004) je matice přídatné poddajnosti způsobené trhlinou  $\mathbf{C}_{\text{tr}}^e$  a matice poddajnosti hřídelového prvku bez trhliny dána

$$\mathbf{C}_{\text{tr}}^e = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\text{btr}}^e = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EJ} & 0 & 0 & -\frac{L^2}{2EJ} \\ 0 & \frac{L^3}{3EJ} & \frac{L^2}{2EJ} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2EJ} & \frac{L}{EJ} & 0 \\ -\frac{L^2}{2EJ} & 0 & 0 & \frac{L}{EJ} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

V matici poddajnosti rotoru bez trhliny  $\mathbf{C}_{\text{br}}^e$  (2) je  $J$  kvadratický moment plochy průřezu  $J = \pi D^4 / 64$  a  $E$  je modul pružnosti materiálu v tahu.

Pro jednotlivé prvky  $c_{ij}$  v matici přídavné poddajnosti způsobené trhlinou  $\mathbf{C}_{\text{tr}}^e$  (2) platí

$$\begin{aligned} c_{11} &= I_{g5} + x^2 I_{g4}, \quad c_{12} = -x^2 I_{g3}, \quad c_{13} = -x I_{g3}, \quad c_{14} = -x I_{g4}, \\ c_{21} &= c_{12}, \quad c_{22} = I_{g1} + x^2 I_{g2}, \quad c_{23} = x I_{g2}, \quad c_{24} = x I_{g3}, \\ c_{31} &= c_{13}, \quad c_{32} = c_{23}, \quad c_{33} = I_{g2}, \quad c_{34} = I_{g3}, \\ c_{41} &= c_{14}, \quad c_{42} = c_{24}, \quad c_{43} = c_{34}, \quad c_{44} = I_{g4}. \end{aligned} \quad (3)$$

Integrály  $I_{g1}$ ,  $I_{g2}$ ,  $I_{g3}$ ,  $I_{g4}$ ,  $I_{g5}$  v (3) se vyčíslí ze vztahů

$$\begin{aligned} I_{g1} &= \int_0^a \int_{-w}^w \frac{2k^2 \alpha F_{\text{II}}^2(\alpha/h)}{\pi E' R^4} d\alpha d\gamma, \quad I_{g2} = \int_0^a \int_{-w}^w \frac{8h^2 \alpha F_2^2(\alpha/h)}{\pi E' R^8} d\alpha d\gamma, \\ I_{g3} &= \int_0^a \int_{-w}^w \frac{16h\gamma \alpha F_1(\alpha/h) F_2(\alpha/h)}{\pi E' R^8} d\alpha d\gamma, \quad I_{g4} = \int_0^a \int_{-w}^w \frac{32\gamma^2 \alpha F_1^2(\alpha/h)}{\pi E' R^8} d\alpha d\gamma, \\ I_{g5} &= \int_0^a \int_{-w}^w \frac{2(1+\mu)k^2 \alpha F_{\text{III}}^2(\alpha/h)}{\pi E' R^4} d\alpha d\gamma, \end{aligned} \quad (4)$$

kde je  $h = 2\sqrt{R^2 - \gamma^2}$ ,  $k = 6(I + \mu)/(7 + 6\mu)$  je koeficient tvaru kruhového průřezu rotoru,  $E'$  je rovno  $E$  pro rovinnou napjatost nebo  $E/(1 - \mu^2)$  pro rovinnou deformaci,  $\mu$  je Poissonovo číslo a součinitele tvaru a zatížení trhliny  $F_1(\alpha/h)$ ,  $F_2(\alpha/h)$ ,  $F_{\text{II}}(\alpha/h)$ ,  $F_{\text{III}}(\alpha/h)$  jsou definovány vzorci

$$\begin{aligned} F_1(\alpha/h) &= \sqrt{\frac{\tan(\lambda)}{\lambda}} \frac{0,752 + 2,02(\alpha/h) + 0,37[1 - \sin(\lambda)]^3}{\cos(\lambda)}, \\ F_2(\alpha/h) &= \sqrt{\frac{\tan(\lambda)}{\lambda}} \frac{0,923 + 0,199[1 - \sin(\lambda)]^4}{\cos(\lambda)}, \\ F_{\text{II}}(\alpha/h) &= \frac{1,1222 - 0,561(\alpha/h) + 0,085(\alpha/h)^2 + 0,18(\alpha/h)^3}{\sqrt{1 - \alpha/h}}, \\ F_{\text{III}}(\alpha/h) &= \sqrt{\frac{\tan(\lambda)}{\lambda}}, \quad \lambda = \frac{\pi\alpha}{2h}. \end{aligned} \quad (5)$$

Z celkové matice poddajnosti prvku  $\mathbf{C}^e = \mathbf{C}_{\text{br}}^e + \mathbf{C}_{\text{tr}}^e$  se vypočítá matice tuhosti hřídelového prvku s trhlinou ve spolurotující souřadnicovém systému  ${}^R \mathbf{K}_{\text{tr}}^e$ . Tato matice transformována do pevného souřadnicového systému  $\mathbf{K}_{\text{tr}}^e$  se vřadí do globální matice tuhosti rotorové soustavy  $\mathbf{K}(t)$ , jak je uvedeno ve Ferfecki (2007).

Prvky matice přídavné poddajnosti od trhliny (2) jsou u otevřené trhliny vypočítány pro celou její šířku ( $-w$  do  $+w$ ). Během jedné otáčky rotorové soustavy může u „dýchající“ trhliny postupně dojít ke změně jejího stavu ze zavřeného, k plně otevřenému až ke zcela zavřenému. Přístup navržený v článku Chawla (2004) „crack closure line“ (CCL) umožňuje zahrnout do výpočtového modelu rotorové soustavy postupnou změnu hodnot prvků matice přídavné poddajnosti  $C_{tr}^e$  („dýchání“ trhliny). V tomto přístupu CCL představuje myšlenou čáru kolmou k hraně trhliny, která odděluje její zavřenou část od otevřené. Jestliže se hřídel otáčí, postupně se měnící poloha CCL na hraně trhliny určuje hodnoty integračních mezí  $v$  (4) k výpočtu prvků přídavné poddajnosti trhliny.

### 3. Sestavení pohybové rovnice příčného kmitání rotorové soustavy s příčnou „dýchající“ trhlinou a stanovení vazbových sil radiálního AML

Kmitání rotorové soustavy s příčnou trhlinou uloženou v radiálních AML je v pevném souřadnicovém systému popsáno pohybovou rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \eta_v \mathbf{K}_{SH} + \omega \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + \{\mathbf{K}[\mathbf{q}(t)] + \omega \mathbf{K}_C\}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_M(\mathbf{q}, \mathbf{i}) + \mathbf{f}_A(t) + \mathbf{f}_V, \quad (6)$$

$$\mathbf{q}_{OP} = \mathbf{q}_{OP}(t), \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0,$$

kde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_{SH}$ ,  $\mathbf{K}_C$  jsou matice hmotnosti, tlumení (vnějšího a materiálového stacionární části), gyroskopických účinků, tuhosti rotorové soustavy s příčnou trhlinou, tuhosti hřídele a cirkulační matice rotorové soustavy,  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$  jsou vektory, zobecněných posuvů, rychlostí a zrychlení,  $\mathbf{q}_{OP}$ ,  $\mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0$  jsou vektory okrajových a počátečních podmínek,  $\mathbf{f}_M$ ,  $\mathbf{f}_A$ ,  $\mathbf{f}_V$ ,  $\mathbf{i}$  jsou vektory magnetických sil, zobecněných sil působících na soustavu (vnějších, vazbových sil), řídicích proudů procházejících cívkami elektromagnetů,  $\eta_v$  je součinitel viskózního tlumení materiálu hřídele,  $\omega$  je úhlová rychlost otáčení hřídele a  $t$  je čas.

Pohybová rovnice (6) je nelineární a její matice tuhosti závisí na vypočítané odezvě a v případě otevřeného modelu trhliny závisí jen na čase. O trhlíně v hřídeli se předpokládá, že neovlivňuje matici hmotnosti, matici tlumení, matici gyroskopických účinků a cirkulační matici rotorové soustavy.

Zkoumána rotorová soustava je uložena v radiálních AML složených ze čtyř elektromagnetů, které jsou rovnoměrně rozloženy po obvodu čepu hřídele. Složky magnetické síly působící na čep hřídele ve vodorovném  $f_{m,y}$  a svislém  $f_{m,z}$  směru kmitání jsou podle práce Ferfecki (2005) dány vztahy

$$f_{m,y}(i_y, y) = \frac{1}{4} \cos(\alpha_0) \mu_0 N^2 S_m \left[ \left( \frac{I_0 - i_y}{c_0 - y} \right)^2 - \left( \frac{I_0 + i_y}{c_0 + y} \right)^2 \right], \quad (7)$$

$$f_{m,z}(i_z, z) = \frac{1}{4} \cos(\alpha_0) \mu_0 N^2 S_m \left[ \left( \frac{I_0 - i_z}{c_0 - z} \right)^2 - \left( \frac{I_0 + i_z}{c_0 + z} \right)^2 \right],$$

kde  $y, z$  jsou zobecněné složky posunutí ve vodorovném a svislém směru kmitání,  $c_0$  je velikost vzduchové mezery mezi rotorem a státorem,  $i_y, i_z$  jsou řídicí proudy (ve vodorovném a svislém směru),  $I_0$  je předmagnetizační proud,  $S_m$  je plocha pólu elektromagnetu ve vzduchové části magnetického obvodu,  $N$  je počet závitů cívky elektromagnetu,  $\mu_0$  je permeabilita vakua a  $\alpha_0$  je úhel mezi magnetickou silou a svislou osou ložiska.

Samotná rotorová soustava uložená v AML je nestabilní a k řízení jejího pohybu jsou použity dva proudové PD zpětnovazební regulátory, které zajišťují pohyb rotoru ve vodorovném a svislém směru. Rovnice řízení PD regulátoru proudu pro rotorovou soustavu uloženou ve dvou stejných AML jsou

$$\mathbf{i} = \mathbf{D}[k_p]\mathbf{q} + \mathbf{D}[k_d]\dot{\mathbf{q}}, \quad (8)$$

kde  $\mathbf{D}[k_p]$  a  $\mathbf{D}[k_d]$  jsou diagonální matice s prvky proporcionálních a derivačních konstant regulátoru,  $\mathbf{i} = (\mathbf{0}_1 \quad \mathbf{i}_1 \quad \mathbf{0}_2 \quad \mathbf{i}_2 \quad \mathbf{0}_3)^T$  je vektor řídicích proudů procházející oběma magnetickými ložisky a  $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2, \mathbf{0}_3$  jsou nulové vektory takového řádu, aby řád vektorů  $\mathbf{i}$  a  $\mathbf{q}$  byl stejný.

Předpoklady odvození pohybové rovnice rotorové soustavy, vyjádření složek magnetických sil (7) a rovnic řízení PD regulátoru proudu (8) lze najít v práci Ferfecki (2005).

#### 4. Výpočetní postupy ke stanovení odezvy na buzení odstředivými silami rotujících částí rotorové soustavy s trhlinou a posouzení stability její ustálené periodické složky

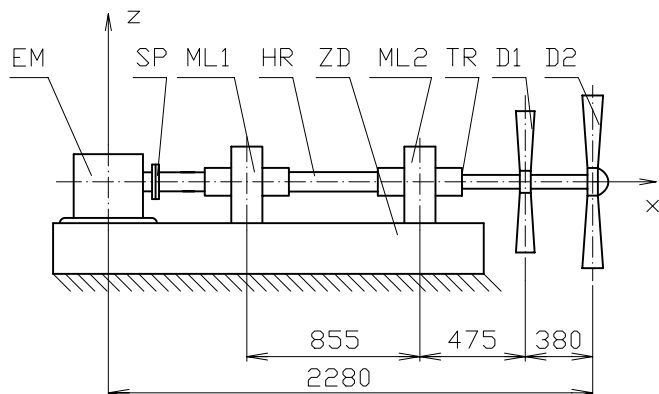
Odezva rotorové soustavy bez a s otevřenou trhlinou je v oblasti přechodového děje a v nestabilním pásmu otáček vypočítána pomocí Newmarkovy integrační metody. Po utlumení počátečního přechodového kmitání je k výpočtu odezvy použita metoda trigonometrické kolokace. U této metody se řešení pohybové rovnice předpokládá ve tvaru konečné Fourierovy řady. Protože prvky matice tuhosti rotorové soustavy s otevřenou trhlinou závisí na čase, může se vypočítaná odezva nacházet v oblasti parametrické rezonance. K posouzení stability ustálené periodické složky odezvy je použita Floquetova věta ve spojení s Newmarkovou integrační metodou. Podrobnější popis použitých metod a předpoklady jejich použití jsou uvedeny v práci Ferfecki (2005).

K výpočtu odezvy rotorové soustavy s „dýchající“ trhlinou jsou použity řešiče z programového systému MATLAB (Ode15s, Ode45). Matice tuhosti v pohybové rovnici (6) závisí na vypočítané odezvě, proto se za dostatečně krátký časový okamžik (např. jeden stupeň pootočení hřídele) musí předpokládat, že matice tuhosti je konstantní. Po tomto časovém okamžiku se musí její prvky přepočítat na základě velikosti uzlových sil působících na trhlinu podle článku Chawla (2004). Ze zjištěných uzlových sil je vypočítán ve zvolených bodech rovnoměrně rozložených po hraně trhliny součinitel intenzity napětí z I. módu zatížení trhliny. Jeho kladná hodnota znamená, že trhlina je v daném místě namáhána tahovým napětím. Poloha čáry CCL se určí ze změny znaménka součinitele intenzity napětí v sousedních bodech. Na základě integračních mezí ve vztazích (4) stanovených z CCL je vypočítána přídatná poddajnost způsobená trhlinou (3), a ta je použita k přepočítání matice tuhosti rotorové soustavy.

## 5. Ověření výpočetních postupů prostřednictvím počítačových simulací na testovací rotorové soustavě

Představené výpočetní postupy byly algoritmizovány ve výpočetním prostředí programového systému MATLAB a odzkoušeny cestou počítačových experimentů na sestavené testovací úloze z obr. 2.

Rotorová soustava (obr. 2) se skládá z hřídele (HR), který je poháněn elektromotorem (EM) přes spojku (SP) a dvou disků (D1, D2) nasazených na převislém konci. Spojení rotoru se základovou deskou (ZD) je provedeno pomocí dvou radiálních AML (ML1 a ML2). V místě změny průřezu hřídele převislé části a čepu ML2 se nachází příčná únavová trhlinka (TR). AML jsou vytvořena ze čtyř elektromagnetů a k jejich řízení je použit zpětnovazební PD regulátor proudu.



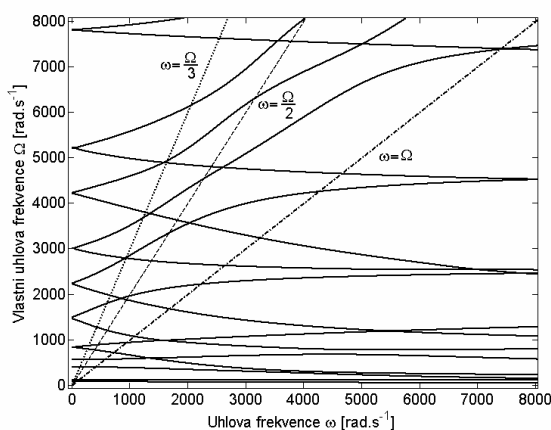
Obr. 2 Schéma rotorové soustavy

Rotor se otáčí konstantní úhlovou rychlostí a je zatížen vlastní tíhou a odstředivými silami způsobenými nevyváhou disků (D1 a D2).

Úkolem bylo vypočítat odezvu rotorové soustavy bez a s otevřenou a „dýchající“ trhlinou na buzení odstředivými silami od nevyváhy disků a posoudit stabilitu ustálené periodické složky odezvy.

Hřídel je ve výpočtovém modelu nahrazen prutem, který je diskretizován na 24 konečných hřídelových prvků.

Sestavení Campbellova diagramu (obr. 3) rotorové soustavy bez trhliny je provedeno z vlastních úhlových frekvencí vypočítaných v malém okolí rovnovážné polohy. Za tímto



Obr. 3 Campbellův diagram

účelem se vypočítala rovnovážná poloha rotorové soustavy a v jejím okolí se do Taylorovy řady rozvinul nelineární vektor magnetických sil. K řešení problému vlastních hodnot sestaveného z linearizované pohybové rovnice byla použita funkce Eig z MATLABu. Na obr. 3 je vykreslena závislost prvních dvaceti vlastních úhlových frekvencí  $\Omega$  na úhlové frekvenci  $\omega$ . V diagramu průsečky vlastních úhlových frekvencí  $\Omega$  se třemi přímkami ( $\omega = \Omega$ ,  $\omega = \Omega/2$  a  $\omega = \Omega/3$ ) určují úhlové frekvence, při nichž může nastat rezonance.

Hodnoty základních, druhých a třetích harmonických násobků otáčkové frekvence určují polohu kritických otáček a jejich hodnoty jsou uvedeny v tab. 1. Hodnoty kritických otáček jsou seřazeny vzestupně vzhledem k jejich velikosti a tučně označené otáčky byly vybudeny při výpočtu odezvy na buzení nevyváhou disků. Většina hodnot kritických otáček pro základní násobek otáčkové frekvence byla zjištěna v rezonančních křivkách pro ML1 a ML2 (obr. 4). Kritické otáčky pro druhý a třetí

harmonický násobek otáčkové frekvence se vybudily až v odezvě rotorové soustavy s otevřenou trhlinou (obr. 5). Ukazuje se, že hodnoty kritických otáček druhého a třetího násobku, které leží v okolí nevybuzených základních násobků otáčkové frekvence, se vybudí v odezvě s otevřenou trhlinou a zvětšují se s rostoucí hloubkou trhliny.

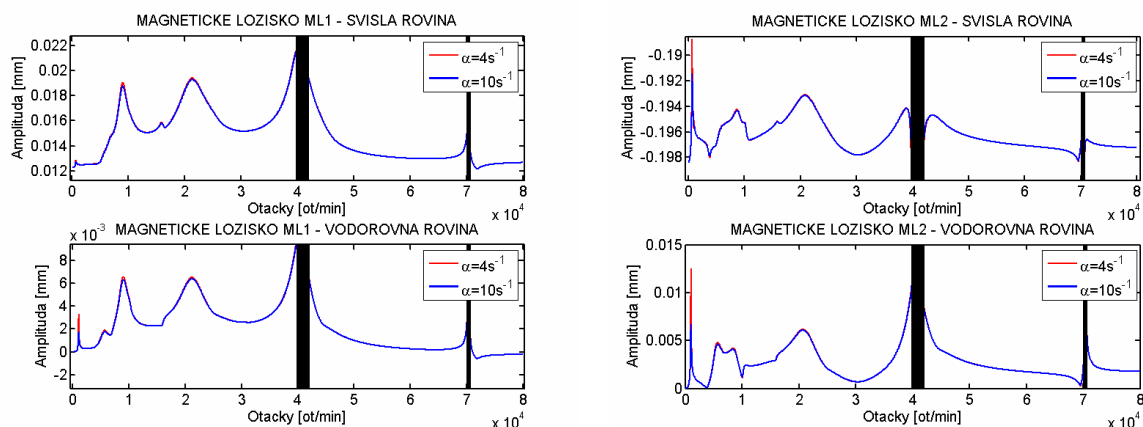
Tab. 1 Kritické otáčky z Campellova diagramu

Hodnoty kritických otáček					
Pro $\omega=\Omega$ [ot/min]		Pro $\omega=\Omega/2$ [ot/min]		Pro $\omega=\Omega/3$ [ot/min]	
<b>729</b>	<b>70394</b>	364	22910	243	<b>15551</b>
1054	<b>70579</b>	527	<b>30005</b>	352	<b>15670</b>
3816	-	<b>1921</b>	36056	1282	19541
<b>5390</b>	-	2670	38481	1777	24250
<b>6844</b>	-	3702	<b>52970</b>	2531	26370
<b>8892</b>	-	4224	<b>53281</b>	2762	35671
<b>10245</b>	-	<b>5769</b>	-	<b>4065</b>	37819
16029	-	8973	-	<b>5698</b>	<b>49809</b>
<b>21157</b>	-	9303	-	6285	<b>52875</b>
25101	-	13037	-	8882	58703
30908	-	<b>15904</b>	-	8897	62242
<b>40589</b>	-	17321	-	11673	<b>66931</b>
<b>44358</b>	-	21581	-	12093	<b>71571</b>

Metodou trigonometrické kolokace je stanovena periodická ustálená složka odezvy rotorové soustavy na buzení odstředivými silami od nevyváhy disků. Rezonanční křivky jsou vypočítány pro hřídel bez trhliny (obr. 4) a s trhlinou orientovanou podle pravého obr. 2 a hloubkou 4.4mm (5%), 8.8mm (10%), 17.6mm (20%) a 35.2mm (40%) z průměru hřídele (obr. 5).

Rezonanční křivky jsou vykresleny ve středu hřídele v místech ML1 a ML2 pro vodorovnou a svislou rovinu kmitání (obr. 4 a obr. 5). Odezva byla aproximována s jedním absolutním a šesti harmonickými členy Fourierova rozvoje a o její periodě se předpokládalo, že je rovna periodě buzení. V černě vyznačených oblastech (obr. 4 a obr. 5) nebylo nalezeno řešení pohybových rovnic (6), z důvodu nezkonvergování Newton-Raphsonovy metody při výpočtu koeficientů Fourierova rozvoje.

Zvětšená hodnota vnějšího tlumení  $\alpha = 10 s^{-1}$  ve vypočítané rezonanční křivce ovlivnila především velikost rezonanční špičky u prvních kritických otáček (pravý obr. 4). Pokud není níže uvedeno jinak je vnější tlumení rovno  $\alpha = 4 s^{-1}$ .

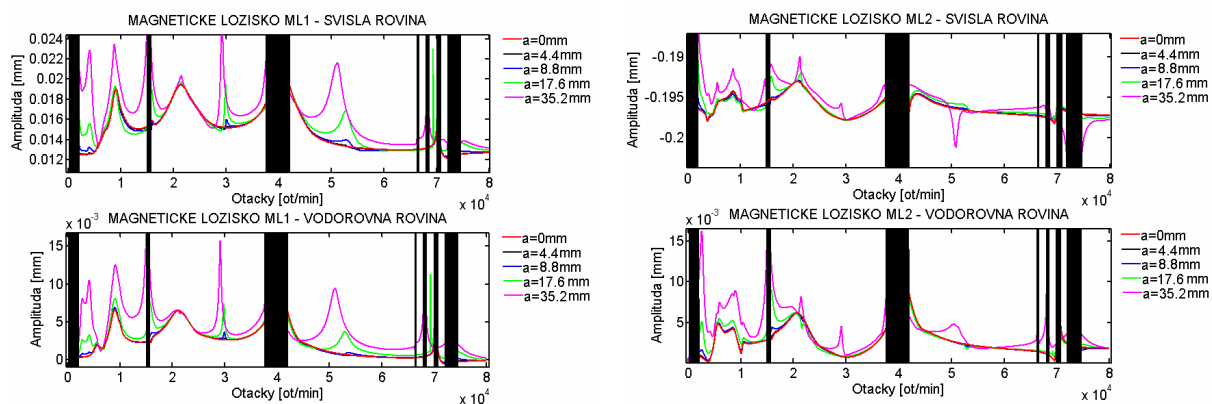


Obr. 4 Rezonanční křivky ve středu hřídele bez trhliny pro vnější tlumení o velikosti  $\alpha = 4 s^{-1}$  a  $\alpha = 10 s^{-1}$

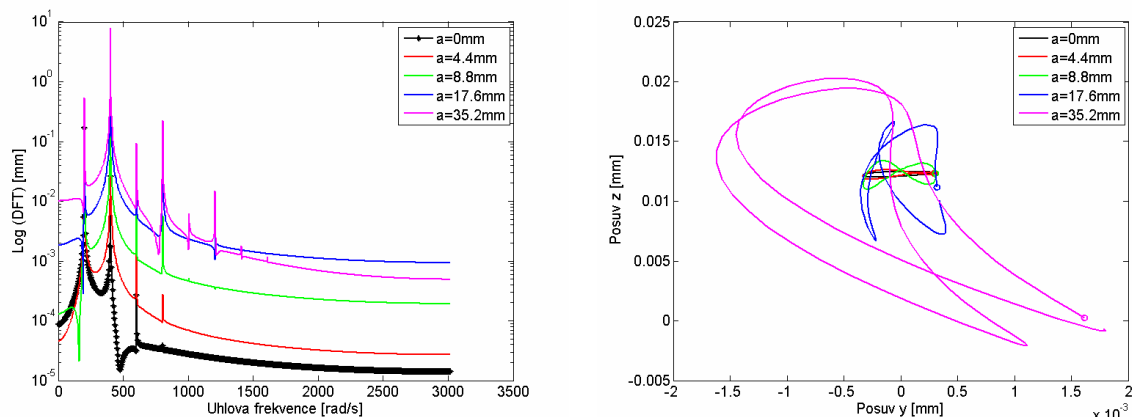
S rostoucí hloubkou trhliny (obr. 5) dochází k vybudění vyšších násobků otáčkové frekvence, a to především při nižších otáčkách rotorové soustavy. Rezonanční křivky hřídele bez trhliny a s trhlinou hloubkou až 10% průměru hřídele jsou skoro stejné. K výraznějšímu



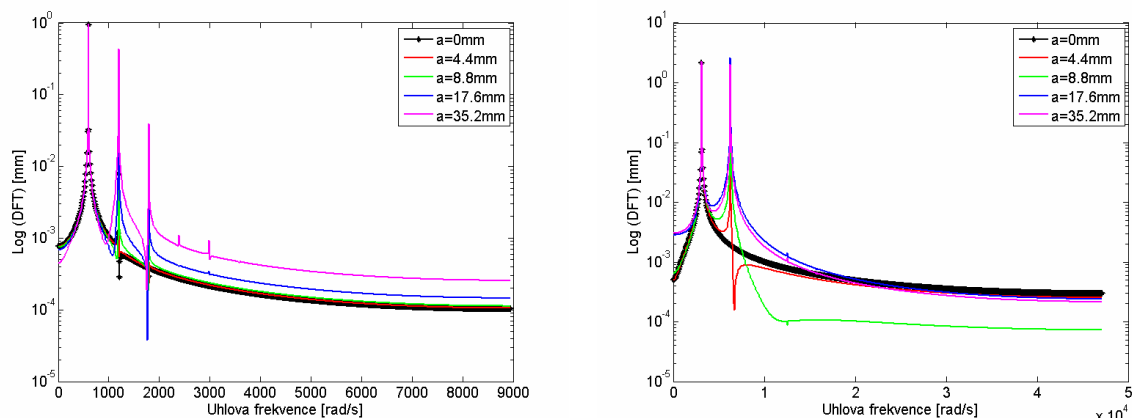
zvýšení vibrací dochází až u trhliny hluboké okolo 20% průměru hřídele. Z obr. 5 je vidět, že některé vedlejší rezonanční špičky rostou s hloubkou trhliny a posouvají se směrem k nižším velikostem otáček.



Obr. 5 Rezonanční křivky ve středu hřídele v místě ML1 a ML2 pro několik hloubek trhliny



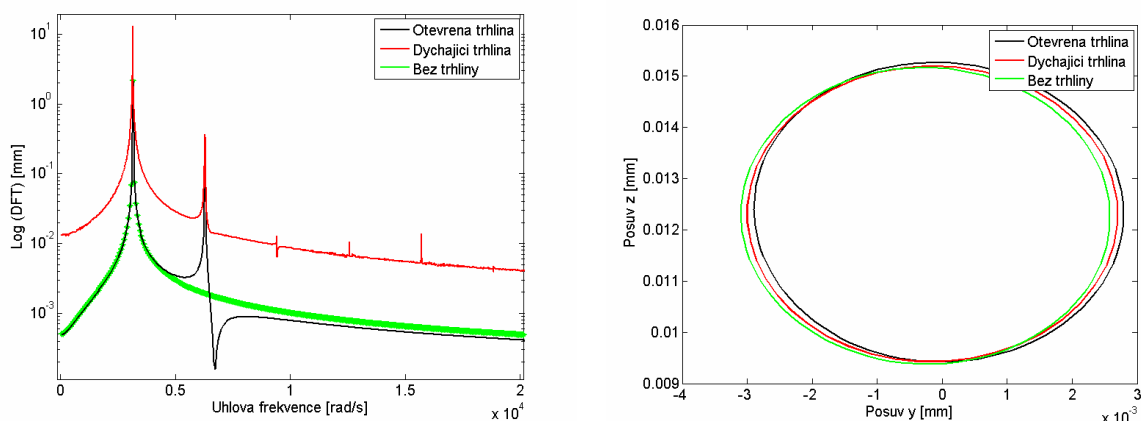
Obr. 6 Fourierova transformace časového průběhu posuvů ML1 ve svislé rovině kmitání (vlevo) a trajektorie středu ML1 (vpravo) pro otáčky rotoru o velikosti 1921ot/min



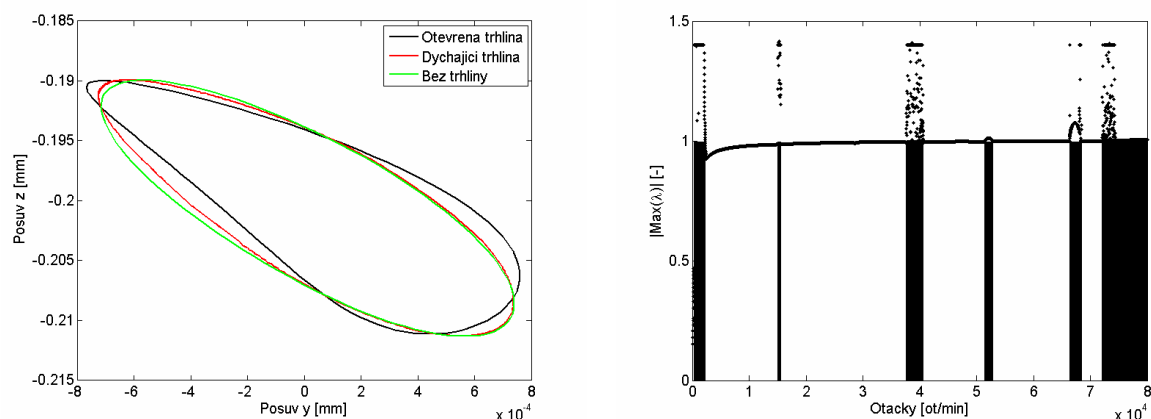
Obr. 7 Fourierova transformace časového průběhu posuvů ML1 ve svislé rovině kmitání pro otáčky rotoru o velikosti 5698ot/min (vlevo) a 30005ot/min (vpravo)

Ustálený tvar trajektorie středu ML 1 pro čtyři hloubky trhliny je vykreslen na pravém obr 6. U vyšetřované rotorové soustavy od hloubky trhliny 8.8mm došlo ke změně smyslu

precesního pohybu (pravý obr. 6). Časové průběhy posuvů ML1 ve svislé rovině kmitání rotorové soustavy s otevřenou trhlinou jsou Fourierovou transformací převedeny do frekvenční oblasti (obr. 6, obr. 7). Narozdíl od rotorové soustavy uložené ve valivých ložiskách, kdy druhý násobek otáčkové se vybudí v okolí poloviny prvních kritických otáček, se u zkoumané rotorové soustavy vybudí i při vyšších otáčkách  $30005\text{ot}/\text{min}$  (pravý obr. 7). V okolí kritických otáček  $5698\text{ot}/\text{min}$  odpovídajících druhému, ale i třetímu násobku otáčkové frekvence (levý obr. 7) se vybudí oba harmonické násobky již u trhliny s menší hloubkou.



Obr. 8 Fourierova transformace časového průběhu posuvů ML1 ve svislé rovině kmitání pro otáčky rotoru o velikosti  $30005\text{ot}/\text{min}$  (vlevo) a trajektorie středu ML1 (vpravo)



Obr. 9 Trajektorie středu ML2 při otáčkách  $729\text{ot}/\text{min}$  (vlevo) a oblasti stabilní, resp. „nestabilní“ ustálené složky odezvy rotorové soustavy s trhlinou hlubokou  $35.2\text{mm}$  (vpravo)

Odezva rotorové soustavy s „dýchající“ trhlinou hlubokou  $4.4\text{mm}$  orientovanou podle pravého obr. 2 byla vypočítána pro otáčky o velikosti prvních kritických  $729\text{ot}/\text{min}$  (levý obr. 9) a otáčky o velikosti  $30005\text{ot}/\text{min}$  (obr. 8). Vypočítané trajektorie středu hřídele pro otevřenou a „dýchající“ trhlinu nejsou výrazně odlišné (pravý obr. 8, levý obr. 9). Trajektorie středu ML 1 rotorové soustavy s otevřenou a „dýchající“ trhlinou je především určena základní otáčkovou frekvencí a jejím druhým násobkem (levý obr. 8).

Při posuzování stability kmitání musí být známa odezva rotorové soustavy, proto k jejímu výpočtu je použita trigonometrická kolokační metoda. Interval jedné periody je rozdělen na krátké časové podintervaly, přičemž na každém z nich se předpokládá, že přechodová matice je konstantní a k jejímu sestavení jsou využity vztahy Newmarkovy integrační metody.

Tab. 2 Posouzení stability odezvy z Floquetovy věty

Pásma „nestabilních“ otáček rotorové soustavy bez trhliny a s otevřenou trhlinou		
a=0mm [±10ot/min]	a=17.6mm [±10ot/min]	a=35.2mm [±10ot/min]
-	320-360	260-2260
670	610-740	
-	-	15000-15570
39810-41850	39500-41830	37630-40640
-	-	51460-52880
70250-70600	69340-70260	66350-68420
75310-80000	74000-80000	72060-80000

malá pásma stabilních otáček (maximálně  $\pm 50 \text{ot/min}$ ). Stabilita odezvy při otáčkách, kde Newton-Raphsonova metoda nezkonvergovala, se musí prozkoumat jinými přístupy. V tab. 2 jsou vypsány pásma „nestabilních“ otáček rotorové soustavy bez trhliny a s otevřenou trhlinou. S rostoucí hloubkou trhliny se pásma „nestabilních“ otáček rozšiřují a zvětšuje se jejich počet. Pásma „nestabilních“ otáček leží většinou v okolí vedlejších rezonančních vrcholů.

## 6. Závěr

V příspěvku je zkoumáno kmitání rotorové soustavy s příčnou únavovou trhlinou uloženou v radiálních AML. Numerické experimenty na testovací rotorové soustavě jsou provedeny s výpočtovým modelem otevřené a „dýchající“ trhliny. Ustálená složka odezvy na buzení odstředivými silami způsobenými nevyváhou disků je vypočítána metodou trigonometrické kolokace pro hřídel bez trhliny a s otevřenou trhlinou. Z vypočítané odezvy byly sestaveny rezonanční křivky, ve kterých jsou polohy kritických otáček srovnány s kritickými otáčkami vypočítanými z Campellova diagramu pro rotorovou soustavu bez trhliny. Bylo zjištěno, že poloha všech rezonančních špiček v odezvě rotorové soustavy bez trhliny leží v okolí kritických otáček odpovídajících prvnímu násobku otáčkové frekvence (tab. 1, obr. 4). V odezvě stanovené pro otevřenou trhlinu se vybudí rezonanční špičky při kritických otáčkách druhého a třetího násobku otáčkové frekvence (tab. 1, obr. 5). V rozsahu provozních otáček ( $100-80000$ )ot/min byla posouzena stabilita periodické ustálené složky odezvy pro rotorovou soustavu bez trhliny a s otevřenou trhlinou (tab. 2, pravý obr. 9).

„Dýchání“ trhliny je do výpočtového modelu zahrnuto na základě změny znaménka součinitele intenzity napětí vypočítaného v bodech rovnoměrně rozložených po hraně trhliny. Při výpočtu odezvy na buzení odstředivými silami rotorové soustavy s „dýchající“ trhlinou bylo předpokládáno, že matice tuhosti je konstantní při pootočení o jeden stupeň. Tvary ustálené trajektorie středu ML1 a ML 2 vypočítány při otáčkách  $729 \text{ot/min}$  a  $30005 \text{ot/min}$  jsou pro otevřenou a „dýchající“ trhlinu hlubokou  $4.4 \text{mm}$  skoro stejné.

Následující práce bude zaměřena na posouzení stability pohybu rotorové soustavy s „dýchající“ trhlinou a postupně bude sestaven výpočtový model rotorové soustavy zahrnující kromě příčného také axiální a torzní kmitání.

Na pravém obr. 9 jsou vykresleny pásma stabilních, resp. „nestabilních“ (černě vyznačena) otáček u rotorové soustavy s otevřenou trhlinou. Jestliže Newton-Raphsonova metoda nezkonvergovala při výpočtu aproximace odezvy, pak byla vypočítána hodnota největší absolutní hodnoty vlastního čísla přechodové matice nastavena na hodnotu 1.4. V „nestabilních“ pásmech otáček se mohou nacházet i

## 7. Poděkování

Tento příspěvek byl vypracován za podpory postdoktorského grantu s názvem Numerické modelování kmitání rotorových soustav uložených v aktivních magnetických ložiskách pracujících za nežádoucích provozních podmínek (registrační číslo 101/07P368).

## 8. Literatura

- Chawla, A. & Darpe, A. K. & Gupta, K. (2002) Analysis of the Response of a Cracked Jeffcott Rotor to Axial Excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 249, pp. 429-445.
- Chawla, A. & Darpe, A. K. & Gupta, K. (2004) Coupled Bending, Longitudinal and Torsional Vibrations of a Cracked Rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 269, pp. 33-60.
- Dimarogonas, A. D. & Paipetis, S. A. (1983) Analytical Methods in Rotor Dynamics. London: Applied Science Publishers, ISBN 0-85334-199-0, 217 p.
- Dimarogonas, A. D. & Papadopoulos, C. A. (1987a) Coupling of Bending and Torsional Vibration of a Cracked Timoshenko Shaft. *Ingenieur Archive*, 57, pp. 496-505.
- Dimarogonas, A. D. & Papadopoulos, C. A. (1987b) Coupled Longitudinal and Bending Vibrations of a Rotating Shaft with an Open Crack. *Journal of Sound and Vibration*, 117, pp. 81-93.
- Dimarogonas, A. D. & Papadopoulos, C. A. (1988) Stability of Cracked Rotors in the Coupled Vibration Mode. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110, pp. 356-359.
- Dimarogonas, A. D. (1996) Vibration of Cracked Structures: A State of the Art Review. *Engineering Fracture Mechanics*, 55, 5, pp. 831-857.
- Earmme, Y. Y. & Eun, H. J. & Jun, O. S. & Lee, C.-W. (1992) Modelling and Vibration Analysis of a Simple Rotor with a Breathing Crack. *Journal of Sound and Vibration*, 155, pp. 273-290.
- Ewins, D. J. & Robb, D. A. & Zhu, C. (2000) The Dynamics of a Cracked Rotor with an Active Feedback Control System, in: *Proceedings of the Eighth International Symposium of Magnetic Bearings*, ETH, Zurich, pp. 323-330.
- Ewins, D. J. & Robb, D. A. & Zhu, C. (2003) The Dynamics of a Cracked Rotor with an Active Magnetic Bearing. *Journal of Sound and Vibration*, 265, pp. 469-487.
- Ferfecki, P. (2005) Počítačové modelování rotorové soustavy uložené v radiálních aktivních magnetických ložiskách. Doktorská disertační práce. Ostrava: VŠB-TUO, 120 stran.
- Ferfecki, P. (2007) Přístupy k numerickému modelování únavových trhlin v aktivně řízených rotorových soustavách, in: *Aplikovaná mechanika 2007* (K. Frydryšek & R. Halama eds), 9. ročník vědecké konference s mezinárodní účastí, Malenovice, 12 stran.
- Kasarda, M. & Mani, G. & Quinn, D. D. (2006) Active Health Monitoring in a Rotating Cracked Shaft Using Active Magnetic Bearings as Force Actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 294, pp. 454-465.