National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2007
Svratka, Czech Republic, May 14 – 17, 2007

MATRIX EXPONENTIAL AND GEOMETRICAL MEANING OF LOGARITHMIC STRAIN

Z. Fiala [1]

Summary: *On the space of all symmetric positive definite matrices (the space of deformation tensor fields) one can introduce a Riemannian geometry, so that the matrix exponential represents a geodesic (i.e. a generalised straight line, the shortest connecting line of two points) emanating from an initial point - the identity matrix, in a direction given by a vector - the prescribed matrix. Based on this approach, we prove that the logarithmic strain can be interpreted as a vector, determined by a geodesic connecting an undeformed and a deformed states. This approach applies also to deformation tensor fields, but unlike previous papers the deformation process of the whole continuum will be described by mutually uninteracting tensors, developed in separate points. As a consequence of this interpretation, it follows that for hyperelastic materials there exists a one-to-one correspondence between solution of a problem in the framework of small, and finite deformations, which is given by this very matrix exponential. As a result, the solution in the framework of finite deformations is determined by the corresponding solution in the framework of small deformations.*

1. Úvod

Průběh deformace tělesa $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ lze popsat buď globálně pomocí zobrazení $\Phi : I \times \mathcal{B} \to \mathcal{E}^3$ parametrizované časem z intervalu I, a nebo, což je typické pro mechaniku kontinua lokálně pomocí časově závislých symetrických pozitivně definitních kovariantních 2-tenzorových polí, která každému bodu tělesa přiřadí metrický tenzor. Ten pak charakterizuje lokální geometrii okolí bodu tělesa pomocí skalárního součinu libovolných dvou vektorů se společným počátkem.

Z pohledu velkých deformací tak lze deformační proces tělesa reprezentovat křivkou $C^\flat$: $I \to \mathcal{M}$ v prostoru všech tenzorových polí deformačních tenzorů nad referenční konfigurací $\mathcal{B}$ - zde budeme uvažovat *pravá Cauchyho-Greenovy deformační pole* $C^\flat$, která popisují geometrii deformovaného tělesa z hlediska pozorovatele pevně spojeného s nedeformovaným tělesem $\mathcal{B}$. Prostor $\mathcal{M}$ jako prostor všech Riemannových metrik představuje nekonečně dimenzionální varietu, na které lze navíc zavést Riemannovu geometrii, což umožňuje analyzovat deformační proces geometrickými prostředky.

V případě malých deformací bude deformační proces reprezentován trajektorií v lineárním vektorovém prostoru, v tomto kontextu tvořeném tečným prostorem $T_{C^\flat}\mathcal{M}$ k varietě $\mathcal{M}$ v bodě $C^\flat$, přičemž tento bod zároveň představuje počáteční deformovaný stav tělesa.

[1] RNDr. Zdeněk Fiala, CSc., Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Prosecká 76, 190 00 Prague 9, tel. +420 286 88 21 21, e-mail: fiala@itam.cas.cz

Metrické tenzory jsou vlastně symetrické pozitivně definitní matice, které tvoří otevřený symetrický kužel ve vektorovém prostoru všech reálných symetrickým matic. Na něm lze dále definovat Riemannovu metriku a tak z něj vytvořit Riemannův symetrický prostor [Faraut 2001]. Jeho geometrie pak umožňuje z netradičního úhlu nově interpretovat logaritmický tenzor přetvoření.

V následující části příspěvku krátce zavedeme základní pojmy a označení. Poté shrneme geometrii prostoru symetrických pozitivně definitních matic, která bude v další části rozšířena na prostor deformačních polí. Protože se budeme opírat o jednodušší geometrii než v předchozích příspěvcích, shrneme starší výsledky z oblasti mechaniky kontinua modifikované touto geometrií. V šesté části příspěvku pak předložíme geometrickou interpretaci logaritmického tenzoru přetvoření a v sedmé její důsledky pro mechaniku kontinua.

2. Pojmy a označení

V této části pouze zavedeme pojmy a označení, výklad lze nalézt zejména v [Fiala 2001] a [Fiala 2006]. V dalším budeme označovat kuzívou 2-tenzory, a tučně jejich odpovídající lineární zobrazení (matice).

2.1 Deformace tělesa je zobrazení z referenční konfigurace do aktuální $\Phi : \mathcal{B} \to \mathcal{S} \subset \mathcal{E}^3$. Pro polární rozklad odpovídajícího deformačního gradientu $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}$ platí

$$\mathbf{F} : T_X\mathcal{B} \to T_x\mathcal{S} \qquad \mathbf{R} : T_X\mathcal{B} \to T_x\mathcal{S} \tag{1}$$

$$\mathbf{U} : T_X\mathcal{B} \to T_X\mathcal{B} \qquad \mathbf{V} : T_x\mathcal{S} \to T_x\mathcal{S}\,. \tag{2}$$

$\mathbf{F}$ a $\mathbf{R}$ jsou dvoubodové tenzory, $\mathbf{U}$ je symetrický pozitivně definitní smíšený 2-tenzor v bodě $X \in \mathcal{B}$, a $\mathbf{V}$ je symetrický pozitivně definitní, smíšený 2-tenzor v bodě $x \in \mathcal{S}$ a platí

$$\mathbf{U}^n \;=\; \Phi^*(\mathbf{V}^n) \equiv \mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{V}^n\mathbf{F}\,(= \mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{V}^n\mathbf{R}) \tag{3}$$

$$\mathbf{V}^n \;=\; \Phi_*(\mathbf{U}^n) \equiv \mathbf{F}\mathbf{U}^n\mathbf{F}^{-1}\;(= \mathbf{R}\mathbf{U}^n\mathbf{R}^{-1})\,, \tag{4}$$

kde Φ^* a Φ_* označují odpovídající zobrazení mezi příslušnými prostory tenzorů v referenční a aktuální konfiguraci.

2.2 Metrika $\mathbf{G} : T_X\mathcal{B} \to T^*_X\mathcal{B}$ a $\mathbf{g} : T_x\mathcal{S} \to T^*_x\mathcal{S}$. $\mathbf{G}$ je symetrické pozitivně definitní kovariantní 2-tenzorové pole určené v každém bodě $X \in \mathcal{B}$ referenční konfigurace, $\mathbf{g}$ pak symetrické pozitivně definitní kovariantní 2-tenzorové pole určené v každém bodě $x \in \mathcal{S}$ aktuální konfigurace. Obě tenzorová pole definují skalární součiny na příslušných prostorech, a tedy lokální geometrii těles před, a po deformaci.

Pole *pravých Cauchyho-Greenových deformačních tenzorů* $\mathbf{C}^\flat : T_X\mathcal{B} \to T^*_X\mathcal{B}$

$$\mathbf{C}^\flat = \Phi^*(\mathbf{g}) \equiv \mathbf{F}^*\mathbf{g}\,\mathbf{F} = \mathbf{G}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \mathbf{G}\mathbf{C}\,, \tag{5}$$

kde $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \mathbf{U}^2 : T_X\mathcal{B} \to T_X\mathcal{B}$ a pro skalární součin vektorů D, H platí

$$C^\flat(D, H) = \langle \mathbf{C}^\flat D, K\rangle_{T_X\mathcal{B}} = G(\mathbf{C}D, H) = G(\mathbf{U}D, \mathbf{U}H)\,, \tag{6}$$

tj. určuje lokálně geometrii deformovaného tělesa z hlediska pozorovatele v nedeformované konfiguraci.

Pole *levých Cauchyho-Greenových deformačních tenzorů* $\mathbf{b}^\sharp : T_x\mathcal{S} \to T^*_x\mathcal{S}$

$$\mathbf{b}^\sharp = \Phi_*(\mathbf{G}^{-1}) \equiv \mathbf{F}\,\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^* = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}, \tag{7}$$

kde $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}^2 : T_x\mathcal{S} \to T_x\mathcal{S}$ a pro skalární součin vektorů d, h platí

$$b^\sharp(d,h) = \langle \mathbf{b}^\sharp d, h\rangle_{T_x\mathcal{S}} = g(\mathbf{b}\, d, h) = g(\mathbf{V}d, \mathbf{V}h)\,, \tag{8}$$

tj. určuje lokálně geometrii nedeformovaného tělesa z hlediska pozorovatele v deformované konfiguraci. Pro oba tenzory zároveň platí (viz. (3)-(4))

$$\mathbf{C} \;=\; \Phi^*(\mathbf{b}) \equiv \mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{b}\mathbf{F} \tag{9}$$

$$\mathbf{b} \;=\; \Phi_*(\mathbf{C}) \equiv \mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{F}^{-1}. \tag{10}$$

Připomínám, že transponované zobrazení $\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^*\mathbf{g}$, kde $\mathbf{F}^* : T^*_X\mathcal{B} \to T^*_x\mathcal{S}$ je zobrazení mezi duálními prostory. Dále označíme *Piolovo* $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}$ a *Almasiovo* $\mathbf{c} = \mathbf{b}^{-1}$ deformační pole, nebo-li $B^\sharp = (C^\flat)^\sharp$ a $c^\flat = (b^\sharp)^\flat$. Symbol $\flat$ označuje kovariantní, symbol $\sharp$ kontravariantní tenzorové pole. Bez symbolu budeme označovat smíšená tenzorová pole.

2.3 Pro časové derivace platí

$$(\Phi_* \circ \partial t \circ \Phi^*)(g) = \mathcal{L}_{v_t}\, g = 2(\nabla v_t^\flat)_{sym} = 2d^\flat, \tag{11}$$

kde $\nabla v_t^\flat = (v_t)_i|_j\, dx^i \otimes dx^j$, a symbol $\mathcal{L}_{v_t}$ označuje Liovu (též Olroydovu) derivaci. Pozorovatel spojený s vlastním tělesem pak veličinu $2d^\flat$ interpretuje jako

$$\partial C^\flat := \frac{\partial}{\partial t}\, C^\flat = 2\Phi_t^* d^\flat. \tag{12}$$

Protože Cauchyho-Greenovo tenzorové pole $C^\flat$ představuje konvektivní metriku na tělese $\mathcal{B}$, můžeme jeho časovou derivaci vyjádřit rovněž vztahem [Simo et al. 1988]

$$\partial C^\flat = \mathcal{L}_{\mathbf{v}_t}\, C^\flat = 2(\widetilde{\nabla}\mathbf{v}_t^\flat)_{sym} \tag{13}$$

kde $\widetilde{\nabla} = \Phi_t^*(\nabla)$ označuje kovariantní derivaci asociovanou s konvektivní metrikou $C^\flat$ prostoru $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}_{\mathbf{v}_t} = \Phi_t^*(\mathcal{L}_{v_t})$ odpovídající Liovu derivaci a $\mathbf{v}_t$ konvektivní rychlost. V operátorovém tvaru pak můžeme vztah (12) zapsat ve tvaru

$$\partial\mathbf{C} = \mathbf{G}^{-1}\partial\mathbf{C}^\flat = 2\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^*\mathbf{g}\mathbf{d}\mathbf{F} = 2\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^*\mathbf{g}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{d}\mathbf{F} = 2\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{d}\mathbf{F} = 2\mathbf{C}\mathbf{D}, \tag{14}$$

kde $\mathbf{D} = \Phi^*(\mathbf{d}) \equiv \mathbf{F}^{-1}\mathbf{d}\mathbf{F}$.

2.4 ***Logaritmické tenzory přetvoření*** [Xiao et al. 1997] jsou smíšená 2-tenzorová pole

$$\mathbf{H} \;=\; \log\mathbf{U} = \tfrac{1}{2}\log\mathbf{C} \tag{15}$$

$$\mathbf{h} \;=\; \log\mathbf{V} = \tfrac{1}{2}\log\mathbf{b}\,, \tag{16}$$

určená symetrickou maticí $\mathbf{X} = \sum_i^3 \lambda_i\, N_i \otimes N_i$ vztahem

$$\log\mathbf{X} = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n}\,(\mathbf{X}^n - \mathbf{I}) = \sum_i^3 \log(\lambda_i)\, N_i \otimes N_i\,. \tag{17}$$

Opět platí (cf. (9)-(10))

$$\mathbf{H} \;=\; \Phi^*(\mathbf{h}) \equiv \mathbf{F}^{-1}\mathbf{h}\mathbf{F} \tag{18}$$

$$\mathbf{h} \;=\; \Phi_*(\mathbf{H}) \equiv \mathbf{F}\mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}. \tag{19}$$

3. Geometrie prostoru symetrických pozitivně definitních matic $Sym^+(n)$

Na vektorovém prostoru $M(n)$ všech reálných matic rozměru $n \times n$ lze zavést *exponenciální zobrazení*

$$\exp(t\mathbf{A}) := \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + ... \tag{20}$$

s hodnotami v podprostoru $GL^+(n) := \{\mathbf{A} \in M(n) \,|\, \det(\mathbf{A}) > 0\}$. $GL^+(n)$ společně s grupovou operací - maticovým násobením tvoří Liovu grupu, tj. grupu, která je zároveň diferencovatelnou varietou a ve které jsou operace násobení a inverze matic diferencovatelná zobrazení. Její Liova algebra se značí $\mathfrak{gl}(n)$ a je tvořena tečnými vektory ke křivkám v $GL^+(n)$ procházejícími jednotkovou maticí, přičemž platí $\mathfrak{gl}(n) = M(n)$. Exponenciální zobrazení

$$\exp : \mathfrak{gl}(n) \to GL^+(n) \tag{21}$$

však nezobrazuje algebru na celou grupu, ale pouze jisté okolí nulové matice algebry se vzájemně jednoznačně zobrazí na odpovídající okolí jednotkové matice grupy. Proto k němu obecně neexistuje inverzní zobrazení. Omezíme-li se však na symetrické matice, exponenciální zobrazení zobrazí prostor všech symetrických matic $sym(n)$ na celý prostor symetrických pozitivně definitních matic $Sym^+(n) \subset Gl^+(n)$, a to vzájemně jednoznačné. Můžeme k němu tedy definovat inverzní zobrazení

$$\log : Sym^+(n) \to sym(n)\,, \tag{22}$$

které pro matice blízké jednotkové matici $\mathbf{I}$ můžeme vyjádřit vztahem

$$\log(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{A}^n}{n+1}\,. \tag{23}$$

Na prostoru $Sym^+(n)$ lze navíc zavést Riemannovu metriku tak, že exponenciální zobrazení bude odpovídat geodetikám spojeným s touto metrikou.

S ohledem na polární rozklad můžeme prostor $Sym^+(n)$ vyjádřit následovně

$$Sym^+(n) \cong GL^+(n)/SO(n) = \mathbb{R}^+ \times SL(n)/SO(n), \tag{24}$$

kde $SL(n) = \{\mathbf{A} \in GL^+(n) \,|\, \det(\mathbf{A}) = 1\}$ je grupa matic s determinantem rovným jedné, $SO(n) = \{\mathbf{A} \in SL(n) \,|\, \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}\}$ je grupa ortogonálních matic a $\mathbb{R}^+$ grupa kladných reálných čísel s grupovou operací - násobením čísel. Prostor $Sym^+(n)$, ani prostor symetrických pozitivně definitních matic s determinantem rovným jedné $SSym^+(n) = SL(n)/SO(n)$ již netvoří grupu, ale tzv. *Riemannův symetrický prostor*, tj. Riemannovu varietu s globálně definovanou "středovou" symetrií. V našem případě ji charakterizuje Riemannova metrika

$$\langle\, \mathbf{D}, \mathbf{H} \rangle_{\mathbf{C}} := \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}^0) + \tfrac{1}{n}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}^0)\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}^0)\,, \tag{25}$$

vyjádřená pomocí skalárního součinu libovolných dvou vektorů $\mathbf{D}, \mathbf{H} \in T_{\mathbf{C}}Sym^+ \cong sym(n)$, vycházejích ze společného bodu $\mathbf{C} \in Sym^+(n)$.

Tato Riemannova metrika je invariantní vzhledem k grupě translací $GL^+(n)$ působících na prostoru $Sym^+(n)$, tj. platí vztah

$$\langle\, \mathbf{D}, \mathbf{H} \rangle_{\mathbf{C}} = \langle\, \rho(\mathbf{A})_*(\mathbf{D}), \rho(\mathbf{A})_*(\mathbf{H}) \rangle_{\rho(\mathbf{A})(\mathbf{C})}\,, \tag{26}$$

kde působení grupy $GL^+(n)$ na prostoru $Sym^+(n)$, tj. translace, je daná vztahem

$$\rho(\mathbf{A})(\mathbf{C}) := \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,, \tag{27}$$

přičemž $\mathbf{A} \in GL^+(n)$ a $\mathbf{C} \in Sym^+(n)$. Pro odpovídající zobrazení příslušných prostorů tvořených vektory - operaci push-forward $\rho(\mathbf{A})_* : T_C Sym^+ \to T_{\rho(\mathbf{C})} Sym^+$ pak dostáváme

$$\rho(\mathbf{A})_*(\mathbf{H}) = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,. \tag{28}$$

Stejné vztahy platí i pro podgrupu $SL(n)$ grupy translací $GL(n)$ na prostoru $SSym^+(n)$. Říkáme, že prostor $Sym^+(n)$, resp. $SSym^+(n)$ je homogenní vzhledem ke grupě translací $GL(n)$, resp. $SL(n)$ - tzn. že geometrie v okolí každého bodů je stejná. Oba prostory jsou dále izotropní vzhledem ke grupě rotací $SO(n)$ - tj. mají ve všech směrech stejné vlastnosti, a na rozdíl od vektorového prostoru $M(n)$, který je euklidovský, $SSym^+(n)$ má zápornou konstatní křivost a tvoří tedy hyperbolický prostor $\mathbb{H}^p$ dimenze $p(n) = \frac{1}{2}\,n(n+1) - 1$. Prostor $\mathbb{R}^+$ je plochý. Více o prostoru $SSym^+(n)$ viz. [Jost 2002], kap. 5.4, o hyperbolickém prostoru obecně viz. [Cannon et al. 1997].

Riemannova metrika určuje kovariantní derivaci i rovnici *geodetiky*, a její řešení v případě, kdy prochází jednotkovou maticí $\mathbf{I}$, je právě exponenciální zobrazení (20). Tato geodetika je charakterizovaná směrem - vektorem s počátkem v bodě $\mathbf{I}$. V obecném případě, kdy je zadaná libovolným bodem $\mathbf{C}$ a směrem $\mathbf{D} \in T_{\mathbf{C}} Sym^+$, ji lze zapsat vztahem

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}}\,\exp\!\Big(t\,\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}}\Big)\,\mathbf{C}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{C}\exp\!\big(t\,\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\big)\,. \tag{29}$$

Pokud je geodetika zadaná dvěma body $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1$, pro směrový vektor $\mathbf{H}_{01}$ v bodě $\mathbf{C}_0$ platí

$$\mathbf{H}_{01} = \mathbf{C}_0 \log(\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{C}_1)\,, \tag{30}$$

přičemž zároveň platí $\mathbf{C}(0) = \mathbf{C}_0$ a $\mathbf{C}(1) = \mathbf{C}_1$.

Geodetiky, jako nejkratší spojnice dvou bodů, představují pro Riemannovu varietu zobecnění přímky. Obecně platí, že v prostoru $Sym^+(n)$ lze libovolné dva body (tj. symetrické pozitivně definitní matice) spojit právě jedinou geodetikou, kterou lze dále neomezeně prodloužit. Pro vzdálenost bodů $\mathbf{C}_0$ a $\mathbf{C}_1$ platí vztah

$$d(\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1) = \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{\mathbf{C}(t)}, \dot{\mathbf{C}(t)} \rangle_{\mathbf{C}(t)}}\, dt = \|\log(\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{C}_1)\|. \tag{31}$$

Soubor geodetik procházejících bodem $\mathbf{C}_0$ dále umožňuje zavést tzv. *normální souřadnice* bodu $\mathbf{C}$ vzhledem k bodu $\mathbf{C}_0$

$$\mathbf{C}_0^{\log} \equiv \mathbf{H}_{01} = \mathbf{C}_0 \log(\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{C}_1)\,, \tag{32}$$

které jsou v našem prostoru $Sym^+(n)$ definovány z libovolného bodu $\mathbf{C}_0$ globálně, tj. pro všechny matice.

A poznámka nakonec: Protože prvky $GL^+(n)$, resp. $Sym^+(n)$ jsou zobrazení z vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ do sebe, reprezentují tak zároveň smíšené 2-tenzory (1-kovariantní, 1-kontra-variantní), resp. *smíšené symetrické 2-tenzory*.

4. Geometrie prostoru deformačních tenzorových polí $\mathcal{M}$

V této části rozšíříme výsledky z předchozí části na prostor $\mathcal{M}$, tvořený symetrickými pozitivně definitními poli deformačních 2-tenzorů nad referenční konfigurací $\mathcal{B}$. Vzhledem k tomu, že deformační proces tělesa je v tomto prostoru reprezentován křivkou $C^\flat\colon I \to \mathcal{M}$, znalost jeho geometrie nám umožní podrobnou analýzu deformačního procesu geometrickými prostředky.

Na prostoru $\mathcal{M}$ lze podobně jako na prostoru $Sym^+(n)$ zavést Riemannovu geometrii. *Riemannovu metriku* zde definujeme pomocí skalárního součinu na vektorovém prostoru $T_{C^\flat}\mathcal{M}$ tvořeném souborem tečných vektorů $\{\partial C^\flat\}$ ke všech křivkám procházejících bodem $C^\flat$. Klíčovou roli při tom sehraje vztah (12)

$$\partial C^\flat = 2\Phi_t^*(d^\flat)\,,$$

který spojuje vektory $\partial C^\flat$ v prostoru $\mathcal{M}$ se symetrickými 2-tenzorovými poli v prostoru $\mathcal{S}$ - poli rychlosti deformace $d^\flat$.

Protože přirozeným rozšířením skalárního součinu vektorů $g(u,v)$ v prostoru $\mathcal{S}$ je skalární součin symetrických 2-tenzorů

$$g(d^\flat, h^\flat) = d_{ij}\, h^{ij} = g^{ik} g^{jl}\, d_{ij}\, h_{kl}\,, \tag{33}$$

v referenční konfiguraci $\mathcal{B}$ mu díky vztahu (12) bude odpovídat skalární součin symetrických 2-tenzorů $D^\flat = \Phi_t^*(d^\flat)$, $H^\flat = \Phi_t^*(h^\flat)$, který má tvar (cf. (25))

$$C^\flat(D^\flat, H^\flat) = B_t^{ik} B_t^{jl}\, D_{ij}\, H_{kl} = B^i_k D^k_l B^l_n H^n_i \equiv \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H})\,, \tag{34}$$

přičemž $(C^{-1})^i_j \equiv B^i_j = B^{ik} G_{kj}$. Pro zavedení Riemannovy metriky na $\mathcal{M}$ zbývá jen rozšířit tento skalární součin na 2-tenzorová pole. Opět začneme u vektorových polí na $\mathcal{S}$, pro která lze zavést dva přirozené skalární součiny [Binz 1980]

$$G^\alpha_\Phi(u,v) = \int_{\Phi(\mathcal{B})} g(u,v)\, dv(g) = \int_{\mathcal{B}} C^\flat(U,V)\, dV(C^\flat_t) \equiv \Phi_t^*[G^\alpha_\Phi(u,v)] \ \text{ a} \tag{35}$$

$$G^\beta_\Phi(u,v) = \int_{\Phi(\mathcal{B})} g(u,v)\, \rho\, dv(g) = \int_{\mathcal{B}} C^\flat(U,V)\, \rho_{\mathcal{B}}\, dV(G) \equiv \Phi_t^*[G^\beta_\Phi(u,v)], \tag{36}$$

kde $U = \Phi_t^*(u)$, $V = \Phi_t^*(v)$ a $J dV(G) = \Phi_t^*[dv(g)]$. Jakobián $J = C^{1/2} = (C^\flat)^{1/2} G^{-1/2}$, $dv(g) = g^{1/2}\, dx$, $dV(G) = G^{1/2}\, dX$ a $dV(C^\flat_t) = (C^\flat_t)^{1/2}\, dX$. Stejný symbole zde označuje jak tenzor, tak i deteminant odpovídající matice. Veličiny ρ a $\rho_{\mathcal{B}}$ pak představují hustotu, přičemž celková hmotnost zůstává konstantní. Budeme-li navíc uvažovat homogenní materiál, $\rho_{\mathcal{B}}$ zůstává konstantní a není třeba ji věnovat pozornost, podobně jako koeficientu $G^{-1/2}$ (viz. (39)). První skalární součin G^α_Φ je invariantní vzhledem k transformacím souřadnic, druhý G^β_Φ, který byl zavedem v hydrodynamice [Arnold 1966], naopak vyjadřuje kinetickou energii systému $T(u) = \frac{1}{2}\, G^\beta_\Phi(u,u)$, která už na vztažné soustavě souřadnic závisí.

Nyní snadno získáme odpovídající dvě Riemannovy metriky na $\mathcal{M}$, jako skalární součiny symetrických 2-tenzorových polí na $\mathcal{B}$

$$\Gamma^\alpha_{C^\flat}(D^\flat, H^\flat) \equiv \Phi_t^*\big(\Gamma^\alpha_g(d^\flat, h^\flat)\big) = \int_{\mathcal{B}} B^{ik} B^{jl} D_{ij} H_{kl}\, dV(C^\flat) \ \text{ a} \tag{37}$$

$$\Gamma^\beta_{C^\flat}(D^\flat, H^\flat) \equiv \Phi_t^*\big(\Gamma^\beta_g(d^\flat, h^\flat)\big) = \int_{\mathcal{B}} B^{ik} B^{jl} D_{ij} H_{kl}\, \rho_{\mathcal{B}}\, dV(G)\,. \tag{38}$$

Skalární součin $\Gamma^{\alpha}_{C^\flat}$ je rovněž invariantní vzhledem k transformacím souřadnic, ale Riemannova geometrie prostoru $\mathcal{M}$ s ním spojená je výrazně složitější než v případě metriky $\Gamma^{\beta}_{C^\flat}$. Tato druhá metrika totiž vede k tomu, že se jednotlivé body kontinua během deformace chovají na sobě vzájemně nezávisle, tzn. že kontinuum je možné popisovat lokálně bod od bodu, a charakterizovat jej Riemannovou metrikou (34). V případě první metriky $\Gamma^{\alpha}_{C^\flat}$ je totiž dodatečný člen $(C^\flat)^{1/2}$ zodpovědný za vzájemnou interakci mezi různými body kontinua, což celou analýzu výrazně komplikuje (viz. [Freed et al. 1989], [Gill-Medrano et al. 1991], [Binz 1980] a [Fiala 2006]). Rozdílnost geometrií odpovídající metrikám (37) a (38) je dobře patrná ze srovnání příslušných geodetik: (55) a [Gill-Medrano et al. 1991].

V tomto příspěvku se s ohledem na přirozenou souvislost s hydrodynamikou (a narozdíl od předchozích příspěvků) soustředíme na Riemannovu metriku $\Gamma_{C^\flat}$ odvozenou od druhé metriky $\Gamma^{\beta}_{C^\flat}$

$$\Gamma_{C^\flat}(D^\flat, H^\flat) := \int_{\mathcal{B}} C^\flat(D^\flat, H^\flat)\, dX = \int_{\mathcal{B}} B_t^{ik} B_t^{lj}\, D_{ij} H_{kl}\, dX\,, \tag{39}$$

kde $D^\flat, H^\flat \in T_{C^\flat}\mathcal{M}$ označují vektory se společným počátkem v bodě $C^\flat$. Tato metrika nám umožní bezprostředně využít výsledků pro exponenciální a logaritmické zobrazení symetrických pozitivně definitních matic z předchozí části příspěvku. V další části proto ještě shrneme výsledky z [Fiala 2006] modifikované touto volbou metriky.

5. Mechanika kontinua v rámci Riemannovy variety Riemannových metrik

5.1 Nechť křivka $C_t^\flat$ reprezentuje deformační proces $C^\flat\colon I \to \mathcal{M}$, pak z hlediska geometrie variety $\mathcal{M}$ představují její tečny $\partial C_t^\flat$ vektory, a množina těchto tečen $\{\partial C_t^\flat\}$ vektorové pole podél ní. Ukážeme, že časový průběh druhého Piolova-Kirchhoffova pole napětí během deformace tvoří podél této křivky kovektorové pole.

Výkon vnitřních sil můžeme zapsat několika způsoby:

$$\frac{\delta E_i}{\delta t} = \int_{\mathcal{S}} \langle \sigma^\sharp, d^\flat \rangle_{T_x\mathcal{S}}\, dv = \int_{\mathcal{B}} \langle P^\sharp, D^\flat \rangle_{T_X\mathcal{B}}\, dV = \Gamma_{C_t^\flat}(K^\flat, \tfrac{1}{2}\,\partial C_t^\flat) = \langle P^\sharp, \tfrac{1}{2}\,\partial C_t^\flat \rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}}\,, \tag{40}$$

kde $K^\flat = \Phi_t^*(J\sigma^\flat)$ je konvektivní pole napětí, $P^\sharp = \Phi_t^*(J\sigma^\sharp)$ je druhé Piolovo-Kirchhoffovo pole napětí a symbol σ reprezentuje Cauchyho napětí. Vztahy (40) znamenají, že *druhé Piolovo-Kirchhoffovo pole napětí $P^\sharp$ představuje z hlediska prostoru $\mathcal{M}$* ***kovektor*** (kovariantní vektor), zatímco konvektivní pole napětí $K^\flat$ vektor (kontravariantní vektor) – podobně jako veličina $\partial C_t^\flat$. Časový průběh druhého Piolova-Kirchhoffova pole napětí během deformace pak tvoří podél křivky $C_t^\flat$ kovektorové pole.

Změnu vnitřní energie ΔE_i v tělese na konci deformačního procesu $C_t^\flat$ lze zapsat jako křivkový integrál

$$\Delta E_i = \int_{\langle t_0, t\rangle} \langle P^\sharp, \tfrac{1}{2}\,\partial C_t^\flat \rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}}\, dt \equiv \int_{C_t^\flat} \tfrac{1}{2} P^\sharp. \tag{41}$$

Pokud se deformace odehrává v ***elastickém kontinuu***, tato změna vnitřní energie nezávisí na integrační cestě (můžeme volit ty nejjednodušší – geodetiky), a samotná vnitřní energie je na prostoru $\mathcal{M}$ potenciálem, tj.

$$P^\sharp = 2 d^{\mathcal{M}} E_i\,, \tag{42}$$

kde $d^{\mathcal{M}}$ představuje vnější diferenciál na varietě $\mathcal{M}$, a tedy

$$P^{ij} = 2\frac{\partial \epsilon_i}{\partial C_{ij}}\,, \tag{43}$$

kde $E_i = \int_{\mathcal{B}} \epsilon_i \, dV(G)$.

5.2 Rychlost změny tenzorových polí podél křivky $C_t^\flat$, tj. jejich časové derivace, jsou určeny kovariantní derivací

$$\frac{D}{Dt}\,\Theta \equiv \frac{\partial}{\partial t}\,\Theta + \nabla_{\partial C_t^\flat}\Theta \qquad \text{v referenční konfiguraci} \tag{44}$$

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\,\theta \equiv \Phi_{t*}\left[\frac{D}{Dt}\,\Theta\right] \qquad \text{v aktuální konfiguraci} \tag{45}$$

Pro vektorové pole U podél $C_t^\flat$ a jemu odpovídajícímu časově závislému *symetrickému 2-kovariantnímu* tenzorovému poli u na $\mathcal{S}$ tak dostáváme

$$\left(\frac{D}{Dt}\,U\right)_{mp} = \left(\frac{dU}{dt}\right)_{mp} - \frac{1}{2}\left(\partial C_{ma}B^{ab}U_{bp} + U_{ma}B^{ab}\partial C_{bp}\right) \tag{46}$$

$$\left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}u\right)_{mp} = \left(\mathcal{L}_{v_t}\,u\right)_{mp} - \left(d_{ma}g^{ab}u_{bp} + u_{ma}g^{ab}d_{bp}\right) = \left(\mathring{u}^{\mathbf{ZJ}}\right)_{mp}, \tag{47}$$

pro kovektorové pole Ω podél $C_t^\flat$ a jemu odpovídajícímu časově závislému *symetrickému 2-kontravariantnímu* tenzorovému poli ω na $\mathcal{S}$

$$\left(\frac{D}{Dt}\,\Omega\right)^{ij} = \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^{ij} + \frac{1}{2}\left(\Omega^{ia}\partial C_{ab}B^{bj} + B^{ia}\partial C_{ab}\Omega^{bj}\right) \tag{48}$$

$$\left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\omega\right)^{ij} = \left(\mathcal{L}_{v_t}\,\omega\right)^{ij} + \left(\omega^{ia}d_{ab}g^{bj} + g^{ia}d_{ab}\omega^{bj}\right) = \left(\mathring{\omega}^{\mathbf{ZJ}}\right)^{ij}, \tag{49}$$

kde **ZJ** označuje ***Zarembovu-Jaumannovu*** časovou derivaci

Časová derivace pole napětí $P^\sharp$ jakožto rychlost změny kovektorového pole podél trajektorie $C_t^\flat$ v $\mathcal{M}$ je tak daná vztahem (49). Protože $D/Dt(J^{-1}) = -\frac{1}{2}(\partial C_{ab}B^{ab})J^{-1}$, dále platí

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{J}\,P^\sharp\right) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{J}\right)P^\sharp + \frac{1}{J}\frac{D}{Dt}P^\sharp = -\frac{1}{2}\left(\partial C_{ab}\,B_t^{ab}\right)\frac{1}{J}P^\sharp + \frac{1}{J}\frac{D}{Dt}P^\sharp \tag{50}$$

a ***časovou derivaci pole Cauchyho napětí*** $\sigma^\sharp$ během deformačního procesu tak můžeme vyjádřit pomocí Zarembovy-Jaumannovy časové derivace Kirchhoffova pole napětí $\tau^\sharp$

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\,\sigma^\sharp \;&\equiv\; \Phi_{t\,*}\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{J}\,P^\sharp\right)\right] \equiv \mathring{\sigma}^{\sharp\,\mathbf{ZJ}} = \\ &=\; -\left(d_{ab}\,g^{ab}\right)\sigma^\sharp + \frac{1}{J}\Phi_{t\,*}\left[\frac{D}{Dt}P^\sharp\right] = -\sigma^\sharp\,\mathrm{tr}\left(d^\flat\right) + \frac{1}{J}\mathring{\tau}^{\sharp\,\mathbf{ZJ}}.\end{aligned} \tag{51}$$

6. Geodetiky a logaritmický tenzor přetvoření

V zakřiveném prostoru geodetika představuje zobecnění přímky, kterou stejně jako přímku v Euklidovském prostoru charakterizuje to, že její tečné vektory tvoří paralelní vektorové pole. Splňují tedy rovnici [Jost 2002]

$$\left(\nabla_{\partial C^\flat_t}\, \partial C^\flat_t\right)_{ij} = 0\,. \tag{52}$$

Protože pro naši Riemannovu metriku platí (viz. (46))

$$\left(\nabla_{\partial C^\flat_t}\, \partial C^\flat_t\right)_{ij} \equiv \partial^2 C_{ij} - \partial C_{ik} B^{kl} \partial C_{lj} = C_{ik}\, \partial(B^{kl} \partial C_{lj}) = 0\,, \tag{53}$$

pole smíšených tenzorů $2D^k_j \equiv B^{kl}(t)\, \partial C_{lj}(t)$ zůstává v průběhu deformace konstatntní a rovnice (52) nabývá tvar (cf. (29))

$$\partial C_{ij}(t) = C_{ik}(t) 2D^k_j\,. \tag{54}$$

Jejím řešení je geodetika vyjádřená pomocí exponenciály konstantního maticového pole $\mathbf{D}$ tvořeného složkami D^i_j

$$C_{ij}(t) = C_{ik}(0)\, [\, \exp 2t\mathbf{D}]^k_j\,. \tag{55}$$

Srovnej též [Rougée 1997].

Pokud tato geodetika prochází počátečním bodem $C^\flat_0$ rychlostí $\partial C^\flat_0$, je maticové pole $\mathbf{D}$ dáno vztahem (cf. (14))

$$2\mathbf{D} = \mathbf{B}^\sharp_0\, \partial \mathbf{C}^\flat_0 = \mathbf{B}^\sharp_t\, \partial \mathbf{C}^\flat_t\,, \tag{56}$$

v případě, kdy je určena dvěma body $C^\flat_0$ a $C^\flat_\tau$, pak vztahem (viz. (22),(23))

$$2\mathbf{D} = \log\, [\, \mathbf{B}^\sharp_0 \mathbf{C}^\flat_\tau]/\tau = \log\, [\, \mathbf{B}^\sharp_0 \mathbf{C}^\flat_1]\,. \tag{57}$$

Symboly $\mathbf{B}^\sharp$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}^\flat$, $\mathbf{C}$ zde opět označují maticová pole tvořená složkami tenzorových polí $B^\sharp$, B, $C^\flat$, C, nebo jejich reprezentace jako lineární zobrazení. Protože $\mathbf{B}_t\, \partial \mathbf{C}_t = \mathbf{B}^\sharp_t\, \partial \mathbf{C}^\flat_t$, vztah (56) lze také zapsat ve tvaru (viz. (28))

$$2\mathbf{D} = \rho_*(\mathbf{B}^{1/2}_0)(\partial \mathbf{C}_0) = \rho_*(\mathbf{B}^{1/2}_t)(\partial \mathbf{C}_t)\,, \tag{58}$$

z kterého vyplývá, že geodetika (55), vyjádřená pomocí smíšeného tenzoru $\mathbf{C}_t = \mathbf{G^{-1}} \mathbf{C}^\flat_t$

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C}_0 \exp[\, t\mathbf{B}_0\, \partial \mathbf{C}_0]\,, \tag{59}$$

vznikne translací geodetiky procházející počátečním bodem $\mathbf{I}$ rychlostí $2\mathbf{D} = \mathbf{B}_0\, \partial \mathbf{C}_0$ do bodu $\mathbf{C}_0 = \rho(\mathbf{C}^{1/2}_0)(\mathbf{I})$ (viz. (27)-(29)).

Soubor geodetik vycházejících z libovolného bodu $C^\flat_0$ dále umožňuje definovat *exponenciální zobrazení* (cf. (21)) vektorového prostoru $T_{C^\flat_0}\mathcal{M}$ na celý prostor $\mathcal{M}$

$$H^\flat \longmapsto\ \exp_{C^\flat_0}(H^\flat) := C^\flat_{H^\flat}(1) \cong \mathbf{C}^\flat_0 \exp[\, 2\mathbf{B}^\sharp_0\, \mathbf{H}^\flat] \tag{60}$$

pomocí geodetik $C^\flat_{H^\flat}(t)$ procházejících tímto bodem $C^\flat_{H^\flat}(0) = C^\flat_0$ různými směry $\partial C^\flat_{H^\flat}(0) = 2H^\flat$. Vzhledem k tomu, že v každém bodě $X \in \mathcal{B}$ je prostor deformačních tenzorů $\mathcal{M}(X)$ izomorfní prostoru symetrických pozitivně definitních matic $Sym^+(n)$, zobrazuje exponenciální zobrazení vektorový prostor $T_{C^\flat_0}\mathcal{M}$ na celý prostor $\mathcal{M}$ vzájemně jednoznačně. Proto také k němu existuje, vzhledem k libovolnému bodu $C_0^\flat$, inverzní *logaritmické zobrazení* (cf. (30)) celého prostoru $\mathcal{M}$ na vektorový prostor $T_{C_0^\flat}\mathcal{M}$

$$C^\flat \longmapsto \log_{C_0^\flat}(C^\flat) := H_0^\flat \cong \tfrac{1}{2}\mathbf{C}_0^\flat \log\left[\mathbf{B}_0^\sharp \mathbf{C}^\flat\right]. \tag{61}$$

Z hlediska geometrie prostoru $\mathcal{M}$ tedy veličina $\log_{C_0^\flat}(C^\flat) \in T_{C_0^\flat}\mathcal{M}$ reprezentuje ***vektor*** s počátkem v bodě $C_0^\flat$. Vzhledem k tomu, že logaritmické zobrazení zobrazuje celý prostoru $\mathcal{M}$ na celý vektorový prostor $T_{C_0^\flat}\mathcal{M}$ vzájemně jednoznačně, každému bodu $C^\flat$ odpovídá právě jedem vektor $H^\flat$, a naopak. V případě, kdy referenční bod C_0 odpovídá jednotkové matici, tedy identickému zobrazení, a tedy nedeformovanému stavu, $\log_{C_0}(C) \approx \mathbf{H} = \frac{1}{2}\log\mathbf{C}$ (cf. (15)).

7. Korespondence řešení v rámci malých a konečných deformací pro hyperelastické materiály

Uvažujme deformační proces tělesa $\Phi : I \times \mathcal{B} \to \mathcal{E}^3$. Jemu odpovídá časově závislé pravé Cauchyho-Greenovo deformační pole $C_t^\flat = \Phi_t^*(g)$, Eulerovu poli rychlostí v pak rychlost deformace $\partial C^\flat = 2\Phi_t^*(d^\flat)$, přičemž platí (viz. (11) a (12))

$$d^\flat(v) \equiv \tfrac{1}{2}\,\mathcal{L}_v\, g = (\nabla v^\flat)_{sym}\,. \tag{62}$$

Protože $d(v) = \partial e$, kde $e^i_j = \frac{1}{2}(u^i|_j + u^j|_i)$ označuje tenzor malých deformací a $v = \partial u$, přírůstek deformace $\partial C^\flat$, resp. $d^\flat(v)$ se získá z výchozího deformovaného stavu $C_0^\flat$ řešením úlohy v rámci malých deformací, tj. řešením linearizované úlohy v okolí bodu $C_0^\flat$.

Abychom odvodili tuto linearizovanou úlohu, uvažujme kvazistatický deformační proces popsaný trajektorií v prostoru polí deformačních tenzorů $C^\flat : I \to \mathcal{M}$. Pro každý bod této trajektorie pak musí platit *princip virtuálních prací*

$$\int_{\partial\mathcal{S}_T} g_x(T,\psi)\,ds + \int_{\mathcal{S}} g_x(f,\psi)\,dv = \int_{\mathcal{S}} \langle \sigma^\sharp, d^\flat(\psi)\rangle_{T_x\mathcal{S}}\,dv\,. \tag{63}$$

Princip virtuálních prací v inkrementálním tvaru, a tedy linearizovanou úlohu, získáme porovnáním virtuálních výkonů vnitřních sil v dvou různých, po sobě jdoucích stavech $(C_t^\flat, P_t^\sharp)$ v čase t, a $(C_{t+dt}^\flat, P_{t+dt}^\sharp)$ v čase $t+dt$. Protože tyto výkony jsou vyjádřeny veličinami z tečných a kotečných prostorů nad různými body $C_t^\flat$ a $C_{t+dt}^\flat$ prostoru $\mathcal{M}$ (viz. (40)), jejich srovnání lze uskutečnit jen pomocí paralelního přenosu, v limitě pak pomocí kovariantní derivace vzhledem k přírůstku deformace $\partial C_t^\flat$. Pro ***inkrementální princip virtuálních prací*** pro neznámou $\partial C^\flat$, resp. $d^\flat(v)$, pak dostáváme [Fiala 2006]

$$\int_{\partial\mathcal{S}_T} g_x(\dot{T},\psi)\,ds + \int_{\mathcal{S}} g_x(\dot{f},\psi)\,dv = \int_{\mathcal{S}} \left\langle \frac{1}{J}(\mathring{\tau}^\sharp)^{\mathbf{ZJ}}(v), d^\flat(\psi)\right\rangle_{T_x\mathcal{S}} dv\,, \tag{64}$$

kde (viz. (51))

$$\frac{1}{J}(\mathring{\tau}^\sharp)^{\mathbf{ZJ}}(v) = \left[(\mathring{\sigma}^\sharp)^{\mathbf{ZJ}} + \sigma^\sharp\,\mathrm{tr}\,(d^\flat)\right](v), \tag{65}$$

přičemž vztah (64) platí pro libovolné virtuální pole posunutí ψ na $\mathcal{S}$. Vzhledem k definici (49), časová derivace (65) představuje *lineární funkcionál nad* $d^\flat(v)$, resp. $\partial C^\flat$.

V rámci okrajových podmínek uvažujme změnu poloh (posunutí) $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ na části hranice tělesa. Body ξ a $\varphi(\xi)$ nyní můžeme propojit v Euklidovkém prostoru $\mathcal{E}^3$ takovou geodetikou $\mathrm{Exp}_\xi(tv)$, že platí $\varphi(\xi) = \mathrm{Exp}_\xi(v)$. Vzhledem k tomu, že deformačnímu procesu, z globálního hlediska popisovanému tímto souborem geodetik - tedy úsečkami určenými jednotlivými vektory pole v (viz. [Ebin et al. 1970], teorem 9.1), bude z lokálního pohledu odpovídat deformační proces $\exp_{C_0^\flat}(\partial C^\flat)$, budou okrajové podmínky (posunutí jako vektory, ale i zatížení jakožto kovektory) pro úlohu v rámci malých (rychlost v) i konečných deformací (konečné posunutí $u_1 = 1 \cdot v$) totožné.

Vypočteme-li pak na základě inkrementálního principu virtuálních prací pro výchozí deformovaný stav $C_0^\flat$ a dané okrajové podmínky deformační přírůstek $\partial C^\flat$, odpovídající deformace $C^\flat$ v rámci konečných deformací bude dána zobrazením tohoto deformačního přírůstku z výchozího stavu do prostoru polí deformačních tenzorů $\mathcal{M}$ – tj. zobrazením vektoru $\partial C^\flat$ z tečného prostoru $T_{C_0^\flat}\mathcal{M}$ v bodě $C_0^\flat$ do prostoru $\mathcal{M}$ (viz. (60)).

8. Závěr

Rozvinutím přístupu k mechanice kontinua v rámci nekonečně dimenzionální Riemannovy diferenciální geometrie bylo ukázáno, že pole deformačních tenzorů a odpovídající pole logaritmického tenzoru přetvoření jsou dvě naprosto odlišné veličiny - bod a vektor v nekonečně dimenzionálním Riemannově prostoru Riemannových metrik, tvořeném pravými Cauchy-Greenovými deformačními poli. V tomto prostoru představuje logaritmické pole přetvoření vektor určující nejkratší spojnici - geodetiku - mezi polem jednotkových tenzorů, reprezentujím nedeformovaný stav, a polem deformačního tenzoru, reprezentujícím deformovaný stav. Tato interpretace navíc umožňuje zavést logaritmický tenzor přetvoření obecněji pro případ, kdy výchozím stavem není nedeformovaný, ale jakýkoliv deformovaný stav (viz. (15) a (61)). To pak umožňuje obejít problémy spojené s tím, že výchozí konfigurace není 'stress-free' (viz. [Bruhns et al. 2002]).

Důsledkem této interpretace pro hyperelastické materiály je zejména vzájemně jednoznačná korespondence mezi řešením elastostatické úlohy v rámci malých a konečných deformací. Této korespondence lze pak použít k řešení úlohy v rámci konečných deformací pomocí odpovídající lineární úlohy v rámci malých deformací. Konkrétní postup, jak toho dosáhnout, je rovněž odvozen na základě geometrických úvah v rámci nekonečně dimenzionální Riemannovy diferenciální geometrie.

9. Poděkování

Příspěvek byl připraven v rámci výzkumného záměru AV0Z20710524 .

10. Literatura

[Arnold 1966] Arnold, V. I. (1966) Sur la géometrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fuids parfaits, *Ann. Inst. Grenoble*, 16(1), 319–361

[Binz 1980] Binz, E. (1980) Two natural metrics and their covariant derivatives on a manifold of embeddings, *Monatshefte für Mathematik*, 89, 275–288

[Bruhns et al. 2002] Bruhns, O. T., Xiao, H. & Meyers, A. (2002) New results for the spin of the Eulerian triad and the logarithmic spin and rate, *Acta Mechanica*, 155, 95–109

[Cannon et al. 1997] Cannon, J. W., Floyd, W. J., Kenyon, R. & Parry, W. R. (1997) Hyperbolic Geometry, in: *Flavors of geometry* (S.Levy ed) MSRI Publications 31, 59–115, Cambridge University Press; http://www.msri.org/communications/books/Book31/contents.html

[Gill-Medrano et al. 1991] Gill-Medrano, O. & Michor, P. W. (1991) The Riemannian manifold of all Riemannian metrics, *Quarterly J. Math. Oxford*, 42, 183–202; arXiv:math.DG/9201259

[Ebin et al. 1970] Ebin, D. G. & Marsden, J. (1970) Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, *Annals of Mathematics*, 92, 102–163; http://www.cds.caltech.edu/ marsden/bib/1970/02-EbMa1970a/

[Faraut 2001] Faraut, J. & Korányi, J. (1994) *Analysis on symmetric cones*, Oxford Science Publications

[Fiala 2001] Fiala, Z. (2001) Theory of finite deformations and differential geometry, in: *Euromech Colloquium 430: Formulations and constitutive laws for very large strains*, (J.Plešek ed), Prague 2000, 37–51

[Fiala 2003] Fiala, Z. (2003) Large deformation - large amount of unknown, in: *Engineering Mechanics 2003* (J. Náprstek & C. Fischer eds), Svratka 2003

[Fiala 2004a] Fiala, Z. (2004a) Time derivative obtained by applying Riemannian manifold of Riemannian metrics to kinematics of continua, *C. R. Mecanique*, 332(2), 97–105

[Fiala 2004b] Fiala, Z. (2004b) Novel objective time derivative obtained from applying Riemannian manifold of Riemannian metrics to kinematics of continua, *Journal of the Mechanical Behaviour of Materials*, 15(6), 391– 400

[Fiala 2004c] Fiala, Z. (2004c) Objective time derivative defined as covariant derivative, in: *Engineering Mechanics 2004* (I. Zolotarev & A. Poživilová eds), Svratka 2004

[Fiala 2006] Fiala, Z. (2006) Stress rate and incremental principle of virtual work in finite deformations, in: *Engineering Mechanics 2006* (J. Náprstek & C. Fischer eds), Svratka 2006

[Freed et al. 1989] Freed, D. S. & Groisser, D. (1989) The basic geometry of the manifold of Riemannian metrics and its quotient by the diffeomorphism group, *The Mitchigan Mathematical Journal*, 36, 323–344

[Jost 2002] Jost, J. (2002) *Riemannian geometry and geometric analysis*, Springer-Verlag

[Rougée 1997] Rougée, P. (1997) *Mécanique des grandes transformations*, in: Mathématique & Applications 25, Springer-Verlag

[Simo et al. 1988] Simo, J. C., Marsden, J. E., & Krishnaprasad, P. S. (1988) The Hamiltonian Structure of Nonlinear Elasticity: The Material and Convected Representations of Solids, Rods, and Plates, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 104, 125–183

[Xiao et al. 1997] Xiao, H., Bruhns, O. T. & Meyers, A. (1997) Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate, *Acta Mechanica*, 124, 89–105