



## **INFLUENCE OF CORNER POINT SINGULARITY ON CRACK BEHAVIOUR**

**P. Hutař\*, L. Náhlík\***

**Summary:** *The influence of corner singularity on crack behaviour for a three-dimensional structure is described in this paper. The distribution of stress singularity through the thickness of a specimen provides us with an indication of crack behaviour close to a free surface. A decrease in fatigue crack propagation rate in the area influenced by the free surface was carried out. The change of fatigue crack propagation rate in the boundary layer, leads to different intersecting angles between crack front and free surface as a function of Poisson's ratio.*

### **1. Úvod**

Důležitým aspektem při určení životnosti tenkých součástí a dílů může být fakt, že v blízkosti volného povrchu má rozdělení napětí v okolí čela trhliny prostorový charakter. Nelze tedy jednoduše rozdělit těleso na jednotlivé plošné řezy s podmínkou rovinné napjatosti nebo s podmínkou rovinné deformace. To je způsobeno tím, že k singularitě vyvolané samotnou existencí trhliny se superponuje singularita, která vzniká v místě kde trhlina vybíhá na volný povrch (rohová singularita). Výpočtu a analýze napětí vznikajících od této rohové singularity se věnuje poměrně značná řádka autorů např. (Bažant & Estenssoro 1979, Benthem 1977, Pictu & Gupta 1997, Shivakumar & Raju 1990). Bažant & Estenssoro (1979) stanovili jako první velikost exponentu singularity v místě průsečíku čela trhliny a volného povrchu pomocí variačního principu založeného na minimu deformační energie. Jeho výsledky ověřil pomocí separace proměnných Benthem (1977). Výsledky těchto studií ukazují, že rohový exponent singularity závisí pouze na Poissonově čísle  $\nu$ . Jestliže budeme předpokládat, že změna exponentu singularity v místě styku čela trhliny s volným povrchem vede ke změně rychlosti šíření únavové trhliny, potom změna rychlosti šíření únavové trhliny na volném povrchu by měla být také funkcí Poissonova čísla. To bylo experimentálně potvrzeno Pookem (1994) a Heyderem (2005, 2006). Na základě těchto numerických a experimentálních výsledků je možno konstatovat, že pro  $\nu = 0$  rohová singularita nemá žádný vliv na chování trhliny a pro tyto materiály platí klasický popis pomocí hodnoty faktoru intenzity napětí.

\* Ing. Pavel Hutař, PhD., Ing. Luboš Náhlík, PhD.: Ústav fyziky materiálů, Akademie věd ČR; Žižkova 22; 616 62 Brno; tel.: +420.532 290 351; e-mail: [hutar@ipm.cz](mailto:hutar@ipm.cz)

Většina technicky používaných materiálů však vykazuje hodnotu  $\nu = 0,3 - 0,4$ , kde je vliv rohové singularity na chování trhliny poměrně silný.

Cílem tohoto článku je tedy objasnit vliv rohové singularity na rychlost šíření únavové trhliny. Proto byla stanovena změna exponentu singularity v jednotlivých bodech čela únavové trhliny a zjištěna oblast, kde je změna exponentu singularity významná. Na základě částečné analogie okrajových podmínek byl zvolen V-vrub jako model obecného singulárního koncentrátoru napětí se singularitou menší než 0,5 a s jeho pomocí byla stanovena rychlost šíření únavové trhliny s ohledem na vliv rohové singularity.

## 2. Numerické stanovení exponentu singularity a zobecněného faktoru intenzity napětí

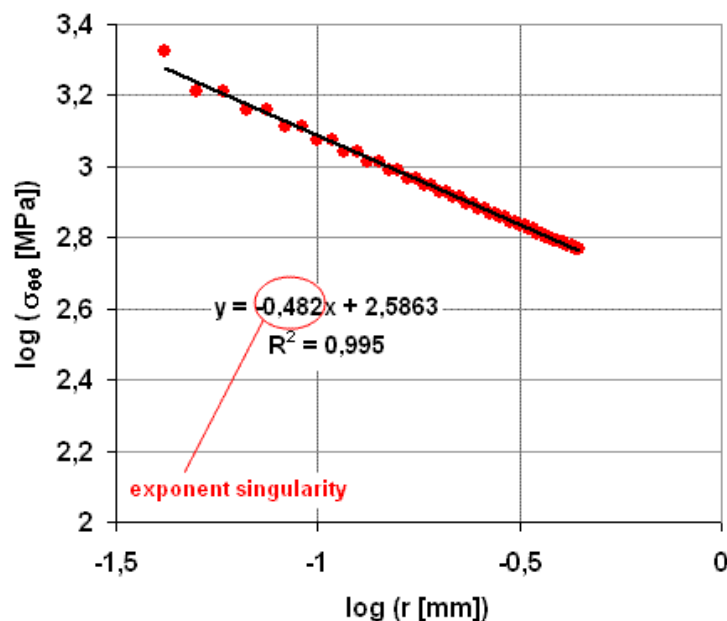
Předpokládáme-li rozdělení napětí v okolí čela trhliny (platí pro obecný singulární koncentrátor napětí) ve tvaru:

$$\sigma_{ij} = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi r^p}} \cdot f_{ij}(p, \theta), \quad (1)$$

kde  $H_I$  je zobecněný faktor intenzity napětí,  $r$  a  $\theta$  jsou polární souřadnice s počátkem na čele trhliny,  $p$  je exponent singularity napětí a  $f_{ij}$  je tvarová funkce. Jedna z možností jak stanovit velikost exponentu singularity je přímá metoda. Pro danou geometrii a zatížení je napětí funkcí polárních souřadnic a můžeme tedy pro daný úhel  $\theta$  přepsat vztah (1) do tvaru:

$$\sigma_{ij} \approx r^{-p}. \quad (2)$$

Pomocí regrese některé složky napětí v logaritmických souřadnicích získáme přímo velikost exponentu singularity  $p$ . Stanovení exponentu singularity z napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  před čelem trhliny pomocí logaritmické regrese je vidět na obr.1.



Obrázek 1 Regresní analýza potřebná pro numerické stanovení exponentu singularity.

Stanovení exponentu singularity pomocí této metody, je poměrně přesné, a tam kde neznáme přesné analytické řešení problému je i jedno z mála možných. Pro použití tohoto postupu je ale nezbytné vytvořit dostatečně kvalitní síť konečných prvků a několika výpočty s postupným zhušťováním sítě v okolí kořene trhliny se ujistit, že je hodnota exponentu singularity nezávislá na síti konečných prvků (Náhlík 2006).

Stejný způsob stanovení exponentu singularity jako z napětí lze odvodit i z posuvů, potom závislost mezi jednotlivými složkami posuvů a exponentem singularity lze vyjádřit formálně vztahem:

$$u_{ij} \approx r^{1-p} \quad (3)$$

Tento postup stanovení exponentu singularity není příliš známý a v literatuře užívaný, proto přesnost tohoto postupu byla testována na dvojdimensionálních úlohách, kde je velikost exponentu singularity známa z analytického řešení. Jako testovací úloha bylo vybráno tahově zatížené bi-materiálové těleso, kde se mění exponent singularity v závislosti na poměrech elastických konstant  $E1/E2$ . Kde  $E1$  je elastický modul pružnosti jednoho materiálu a  $E2$  je modul pružnosti druhého materiálu přičemž se trhlina šíří z materiálu 1 do materiálu 2. Porovnání hodnot určených numericky a analyticky je vidět v tabulce 1.

Tabulka1 Porovnání jednotlivých metod výpočtu exponentu singularity napětí pro bi-materiálové těleso v závislosti na různých poměrech elastických konstant  $E1/E2$ .

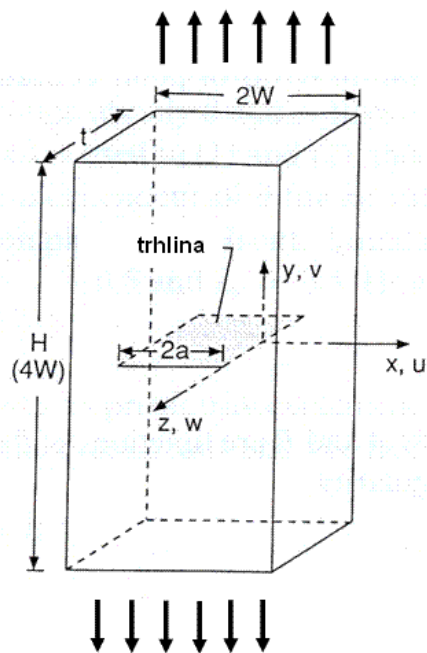
bi-materiálové těleso			
$E1/E2$	analytické řešení	určeno z napětí	určeno z posuvů
[ - ]	$p$ [ - ]	$p$ [ - ]	$p$ [ - ]
0,2	0,3662	0,347885	0,364841
0,5	0,4339	0,422755	0,429351
1	0,5	0,504078	0,499555
2	0,5745	0,59521	0,580495
5	0,6788	0,704087	0,682536

Lze tedy konstatovat, že přímá metoda pro určování exponentu singularity je dostatečně přesná aby se dala využít pro jejich stanovení na 3D tělesech. Ve všech sledovaných konfiguracích je rozdíl mezi analytickým řešením a řešením určeným numericky menší než 5%. Pokud stanovíme exponent singularity z posuvů (pracujeme s deformační variantou MKP) v blízkosti čela trhliny je přesnost ještě větší a rozdíl mezi analytickým a numerickým řešením se pohybuje kolem 1%. Všechny další presentované exponenty singularity u trojdimensionálních těles byly stanoveny pomocí přímé metody regrese analýzou posuvů.

Velikosti zobecněných faktorů intenzity napětí  $H$  byly stanoveny také pomocí přímé metody ve smyslu práce Knésla a kol. (2003) a Náhlíka (2002). Protože je stanovení  $H$  založeno na extrapolaci napětí do kořene trhliny ( $r \rightarrow 0$ ), jde o metodu, která je stejně jako přímé určení exponentu singularity napětí poměrně náročná na kvalitu sítě konečných prvků.

### 3. Použitý numerický model

Pro detailní analýzu napjatosti v okolí kořene trhliny ovlivněné rohovou singularitou byl vybrán vzorek s centrální trhlinou tloušťky 5,10,20 mm. Schematicky je modelovaný vzorek vidět na obr 2.



Obrázek 2 Ukázka geometrie modelovaného vzorku s centrální trhlinou zatíženého tahově v zatěžovacím módu I.

Geometrie vzorku odpovídá standardnímu zkušebnímu tělesu, kde délka trhliny  $a = 12,5$  mm, a poměr  $a/W = 0,5$ . Materiál se předpokládá homogenní a izotropní definovaný elastickými materiálovými charakteristikami  $E = 200$  GPa a  $\nu$ . Poissonovo číslo se pohybovalo v intervalu hodnot od 0 do 0,5. Vzhledem k trojnásobné symetrii vzorku jak v geometrii tak v zatěžování byla modelována pouze osmina modelovaného tělesa s odpovídajícími symetrickými okrajovými podmínkami. Síť konečných prvků byla navržena tak aby bylo možno pro jednotlivé body čela trhliny stanovit velikost exponentu singularity, popř.  $H$  pomocí přímé metody.

#### 4. Diskuse výsledků

Z prací (Bažant & Estenssoro 1979, Benthem 1977) je známo, že rozdělení napětí v průřezu mezi čelem rovné trhliny a volným povrchem lze popsat pomocí sférického singulárního pole ve tvaru:

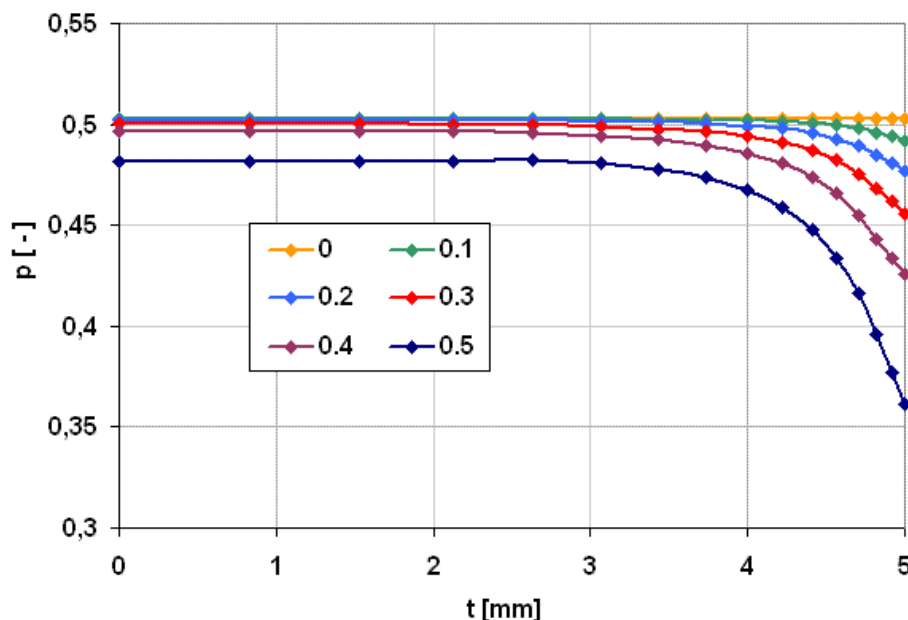
$$\sigma_{ij} \approx r^{-p} f_{ij}(p, \theta, \varphi), \quad (4)$$

kde  $r, \theta, \varphi$  jsou sférické souřadnice se středem v průřezu mezi čelem trhliny a volným povrchem (rohem trhliny) a  $p$  je exponent singularity. Naproti tomu uprostřed tělesa je singulární pole popsáno klasickým výrazem pro rozdělení napětí :

$$\sigma_{ij} \approx r^{-0,5} f_{ij}(\theta). \quad (5)$$

Abychom mohli kvantifikovat vzdálenost na, které je trhlina ještě ovlivněna volným povrchem a zjistit míru tohoto ovlivnění, s pomocí přímé metody byla stanovena velikost exponentu singularity podél čela přímé průchozí trhliny ve vzorku z obr.2. Výsledky na obr.3

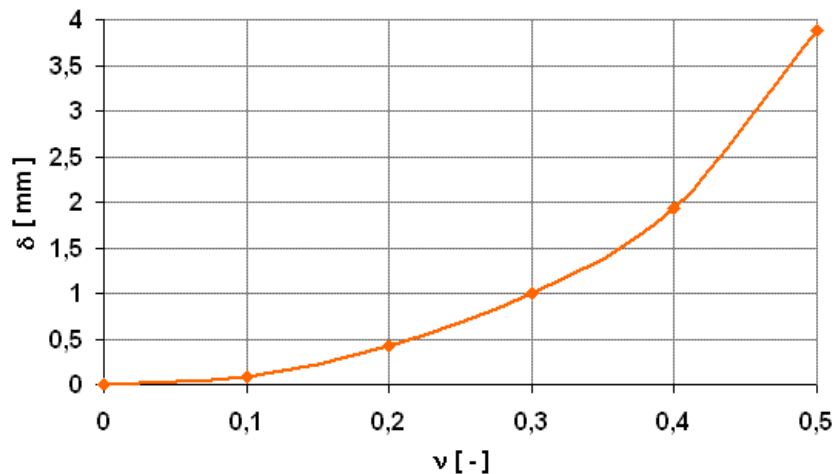
odpovídají vzorku s centrální trhlinou o tloušťce 10 mm. Vzdálenost  $t$  je měřena od geometrického středu tělesa, to znamená že:  $t=0$  mm odpovídá středu tělesa a  $t=5$  mm odpovídá volnému povrchu. Z grafu je jasně patrné, že čím větší je Poissonovo číslo tím silnější je ovlivnění napjatosti v okolí volného povrchu.



Obrázek 3 Změna singularity napětí od středu tělesa po volný povrch pro vzorek tloušťky 10 mm

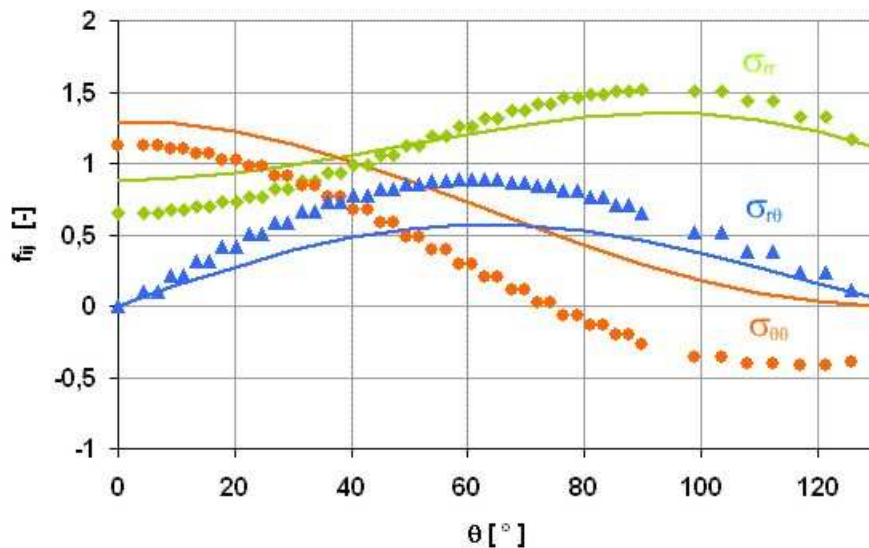
Pro  $\nu = 0$  trhlinka rohovou singularitou není ovlivněna vůbec, respektive exponent singularity na volném povrchu je roven 0,5. Proto pro materiály s nulovou hodnotou Poissonova čísla lze použít klasický popis pomocí faktoru intenzity napětí bez jakýchkoli omezení. S rostoucí hodnotou Poissonova čísla klesá velikost exponentu singularity napětí v blízkosti volného povrchu. Hodnoty exponentů singularity přímo v rohu trhliny jsou v porovnání s hodnotami, které publikovali Bažant & Estenssoro (1979) a Benthem (1977) v dobré shodě. Z výsledků tedy vyplývá, že pro větší Poissonovy čísla dochází u trhliny k poklesu exponentu singularity směrem k volnému povrchu a dochází tedy i díky „slabší singularitě“ k poklesu rychlosti šíření únavových trhlin směrem k volnému povrchu. Tento závěr je ve shodě s experimentálním pozorováním např. Heyder (2005, 2006). Pro Poissonovo číslo 0,5 je vidět, že ani uprostřed tělesa nezískáme exponent singularity roven 0,5, to znamená, že i u tělesa tloušťky 10mm se stále rohové singularity vzájemně ovlivňují. Klasické postupy lineárně elastické lomové mechaniky (LELM) tedy nelze použít v tomto případě ani uprostřed tělesa.

Podobná analýza změny exponentu singularity po tloušťce tělesa pro různé velikosti  $\nu$  byla provedena pro různé tloušťky těles (5,10,20mm). Bylo zjištěno, že velikost oblasti ovlivněné volným povrchem není závislá na geometrii tělesa, ale pouze na Poissonově čísle daného materiálu. Lze tedy pro každou velikost  $\nu$  definovat tloušťku ovlivněné vrstvy, jak je znázorněno na obr.4. Se růstem  $\nu$  dochází k nárůstu velikosti oblasti, která je rohovou singularitou ovlivněna. Z praktického hlediska jsou nejpoužívanější materiály s  $\nu = 0,3 - 0,4$  pro které je ovlivnění rohovou singularitou poměrně výrazné (např. pro dural ( $\nu = 0,35$ ) je ovlivněná oblast velká kolem 1,5 mm. To znamená, že pro vzorek tloušťky 6 mm je stále 50% průřezu tělesa ovlivněno existencí rohové singularity.



Obrázek 4 Tloušťka vrstvy ovlivněná rohovou singularitou v závislosti na Poissonově čísle.

Pro odhad rychlosti šíření únavové trhliny je nutná znalost tvarových funkcí ve vztahu (1). Vzhledem k tomu, že analytické řešení problému trhliny ovlivněné singulárním polem napětí indukovaným v průřezu mezi čelem trhliny a volným povrchem není známo, je třeba použít analogie s jiným obecným koncentrátorem napětí jehož tvarové funkce se budou blížit rozložení napětí spočtenému numericky pomocí metody konečných prvků. Ukázalo se, že nevhodnější je ostrý V-vrub. Jeho okrajové podmínky jsou částečně analogické s případem trhliny s jinou hodnotou exponentu singularity než 0,5 a velikost exponentu singularity se mění podle velikosti úhlu otevření  $\alpha$  od 0,5 pro  $\alpha = 0^\circ$  (trhlina v homogenním materiálu) až po 0 pro  $\alpha = 180^\circ$  (volný povrch). Navíc porovnáme-li, tvarové funkce dané vztahem (1) určené numericky odpovídající trhlině ovlivněné rohovou singularitou a analytické řešení V-vrubu s odpovídajícím exponentem singularity je shoda poměrně dobrá, viz. obr. 5.



Obrázek 5 Porovnání tvarových funkcí určených numericky z MKP analýzy vzorku centrální s trhlinou na povrchu tělesa (exponent singularity  $p = 0,45$ ) a analyticky určené funkce odpovídající V-vrubu se stejnou singularitou (úhel otevření vrubu  $100^\circ$ ).

V grafu jsou vyznačeny plnou čarou tvarové funkce pro jednotlivé složky napětí určené z analytického řešení pro V-vrub a body se stejnou barvou vyznačují odpovídající funkce

získané z 3D řešení pomocí metody konečných prvků na povrchu pro vzorek s Poissonovým číslem 0,3. Protože o chování trhliny rozhoduje zejména napjatost před čelem trhliny nejdůležitější je oblast pro malý úhel  $\theta$ , tam je shoda mezi analytickým a numerickým řešením poměrně dobrá a lze tedy V-vrub použít jako model trhliny s jinou singularitou než 0,5.

Dále již můžeme postupovat jako u běžného obecného koncentrátoru napětí (Kněsl a kol. 2003, Náhlík 2002) a určit zobecněný faktor intenzity napětí pro model V-vrubu. Předpokládáme-li, že velikost plastické zóny před vrcholem obecného koncentrátoru je parametr, který je řídicí pro rychlost šíření únavové trhliny, lze najít relaci mezi efektivní hodnotou faktoru intenzity napětí a velikostí zobecněného faktoru intenzity napětí. Velikost plastické zóny před čelem trhliny pro podmínku rovinné deformace můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$r_p(\theta=0) = \frac{1+4\nu^2-4\nu}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2 \quad (6)$$

kde  $K_I$  je faktor intenzity napětí,  $\sigma_0$  je mez kluzu daného materiálu a  $\nu$  je Poissonovo číslo. Stejným způsobem lze vyjádřit velikost plastické zóny před čelem trhliny pro zobecněný faktor intenzity napětí :

$$r_p(\theta=0) = \left( \frac{s}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2p}} \left( \frac{H_I}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (7)$$

kde  $s = (1-p)^2(3p^2+3p^2q^2+6p^2q-12q^2p-12qp+12q^2+4+16\nu^2-16\nu)$ ,  $p$  je exponent singularity,  $q$  závisí na  $p$  a  $\nu$  je Poissonovo číslo. Předpokládáme-li, že mechanismus poškození bude stejný a řídicím parametrem u únavového šíření trhliny bude velikost plastické zóny před čelem trhliny můžeme napsat vztah to výpočet efektivní hodnoty faktoru intenzity napětí plynoucí z rovnosti vztahů (6) a (7) (Klusák 2002):

$$K_{eff} = \left( \frac{H_I \cdot s^{1/2} (2\pi)^{(p-1)}}{(1+4\nu^2-4\nu)^p \sigma_0^{(1-2p)}} \right)^{\frac{1}{2p}} \quad (8)$$

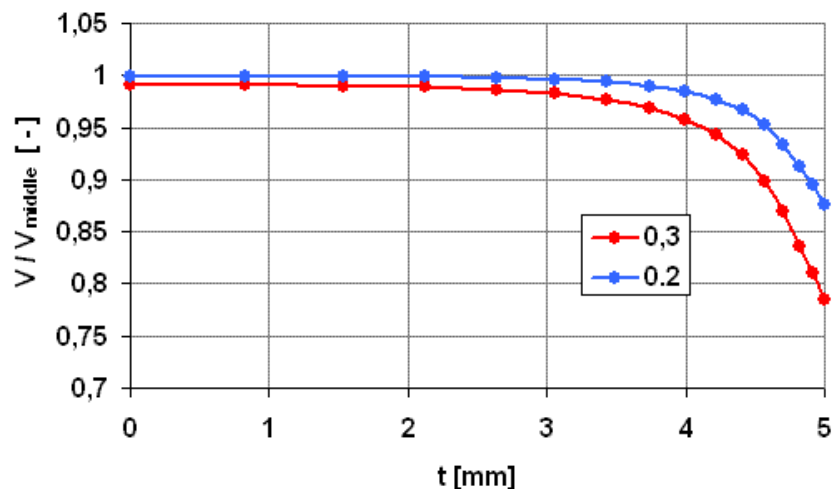
Tento vztah je odvozen pro podmínku rovinné deformace, ale v oblasti která nás nejvíce zajímá (oblast ovlivněná rohovou singularitou) je přechod mezi rovinnou deformací a rovinnou napjatostí, díky existenci volného povrchu. Odvodíme-li si stejný vztah pro rovinnou napjatost zjistíme, že velikost  $K_{eff}$  stanoveného ze vztahu pro rovinnou napjatost a deformaci se liší max. o 15% pro exponenty singularity 0,3, pro exponenty singularity blízké 0,5 jsou hodnoty  $K_{eff}$  ekvivalentní. Pro naše účely je tedy tato aproximace dostatečně přesná.

$K_{eff}$  lze dále používat jako klasickou hodnotu faktoru intenzity napětí a lze již přímo dosadit do Parisova-Erdoganova vztahu a zjistit rychlost šíření únavové trhliny:

$$v = \frac{da}{dN} = C (K_{eff})^m, \quad (9)$$

kde  $C$  a  $m$  jsou materiálové konstanty stanovené na klasických vzorcích s trhlinou. S pomocí tohoto postupu lze vypočítat lokální rychlost šíření trhliny odpovídající singularitě rozdílne od

jedné poloviny a stanovit tak skutečné rychlosti šíření únavové trhliny v oblasti ovlivněné rohovou singularitou.



Obrázek 6 Pokles rychlosti šíření únavové trhliny způsobený existencí rohové singularity, odpovídající Poissonovu číslu 0,2 a 0,3.

Na obr.6 je vidět výsledný pokles rychlosti šíření únavové trhliny odpovídající Poissonovu číslu 0,2 a 0,3. Poměr  $v/v_{middle}$  je relativní poměr rychlosti šíření uprostřed vzorku (odpovídá to  $t=0$  mm) a lokální rychlosti v daném místě čela trhliny. Pro  $\nu=0,3$  je pokles rychlosti šíření v blízkosti volného povrchu asi 20% v porovnání se středem vzorku, trhlina tedy bude postupně měnit tvar čela trhliny z rovného na zakřivený. Úhel, který bude svírat čelo trhliny s volným povrchem bude potom funkcí Poissonova čísla daného materiálu. Tento závěr je kvalitativně v souladu s experimenty provedenými Pookem (1994), nebo Heyderem (2005, 2006).

## 5. Závěr

Na základě trojdimensionální analýzy pomocí metody konečných prvků byl stanoven vliv rohové singularity na chování vzorku s centrální trhlinou. Tyto závěry se dají zobecnit na vzorek jakékoli geometrie a tvaru jak plyne z provedených simulací, tak i dostupných experimentálních dat. Byla stanovena oblast pro kterou je chování rohové singularity indukované v průřezu mezi čelem trhliny a volným povrchem rozhodující. Velikost této oblasti je dána Poissonovým číslem a je nezávislá na tloušťce tělesa. Pro  $\nu=0$  rohová singularita neovlivňuje chování trhliny, s vzrůstající hodnotou  $\nu$  dochází ke zpomalování trhliny v oblasti blízké volnému povrchu, což vede k rozdílné velikosti úhlu mezi čelem trhliny a volným povrchem.

Protože analytické řešení problému trhliny ovlivněné singulárním polem napětí vznikajícím v průřezu mezi čelem trhliny a volným povrchem není známo, bylo použito analogie s V-vrubem jehož tvarové funkce korespondují s rozložením napětí pro 3D těleso s trhlinou určeným numericky. Na základě této analogie byl kvantifikován pokles rychlosti šíření únavové trhliny v oblasti ovlivněné rohovou singularitou.



#### 4. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory grantu Grantové Agentury ČR č. 106/06/P239.

#### 5. Literatura

- Bažant Z.P., Estenssoro L.F. (1979) Surface singularity and crack propagation. *International Journal of Solids and Structures*, 15, pp. 405-426
- Bentham J.P. (1977) State of stress at vertex of a quarter-infinite crack in a half-space, *International Journal of Solids and Structures*, 13, pp.479-492
- Heyder M., Kuhn G. (2006) 3D fatigue crack propagation: Experimental studies. *International Journal of Fatigue* Vol. 28 (2006), p. 627-634
- Heyder M., Kolk K., Kuhn G. (2006) Numerical and experimental investigations of the influence of corner singularities on 3D fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 28 (2006), p. 627-634
- Knésl, Z., Náhlík, L., Radon, J.C. (2003) Influence of interface on fatigue threshold values in elastic bimetals. *Computational Material Science*, 28, pp.620-627
- Klusák J. (2002) Lineární elastická lomová mechanika V-vrubu. *Disertační práce*, FSI VUT Brno.
- Náhlík, L. (2002) Šíření únavových trhlin v okolí rozhraní dvou elastických materiálů. *Disertační práce*, FSI VUT Brno.
- Náhlík, L. (2006) Odhad exponentu singularity a prahového napětí. *Problémy lomové mechaniky VI.* ( P.Frantík & J. Klusák eds), pp.59-68
- Picu R. C., Gupta V. (1997) Three-dimensional stress singularities at the tip of a grain triple junction line intersecting the free surface. *Journal of Mech. Phys. Solids*, 45, 9, pp.1495-1520
- Pook L.P. (1994) Some implication of corner point singularities, *Engineering Fracture Mechanics*, 48, pp.367-378
- Shivankumar K.N., Raju I.S. (1990) Treatment of singularities in cracked bodies, *International Journal of Fracture*, 45, pp.159-178