



ANALYSIS OF A FOUNDATION SLAB: IMPLEMENTATION OF CONTINUOUS RETARDATION MODEL FOR CONCRETE CREEP

T. Krejčí*, T. Koudelka*, V. Šmilauer*

Summary: *Foundation of buildings in deep ditches under the ground water level highly elevated during floods is a serious problem. Cracking arising due to the combination of hydration processes in concrete and contact forces between the foundation slab and the subsoil impair the impermeability of the slab. Repairs of such damaged structural bodies are inadmissibly expensive. The paper presents computer simulation of a foundation slab in an early stage, when the damage or initials cracks can influence the final permeability of the slab.*

1. Úvod

Základové desky prováděné v hlubokých jámách pod hladinou podzemní vody jsou velmi citlivé na vznik trhlin, které zpravidla vedou k značným průsakům. V případě povodní, kdy se hladina podzemní vody v propustném podloží zvedne, trhliny a s nimi související průsaky mohou dosáhnout takového rozsahu, že základové desky přestávají plnit jednu ze svých podstatných funkcí – nepropustnost. Nepropustnost takovýchto desek mohou do značné míry ovlivnit trhliny vzniklé již v ranném stádiu iniciované například nedostatečným ošetřováním betonu, nadměrným vývinem hydratačního tepla nebo špatně zvoleným postupem betonáže.

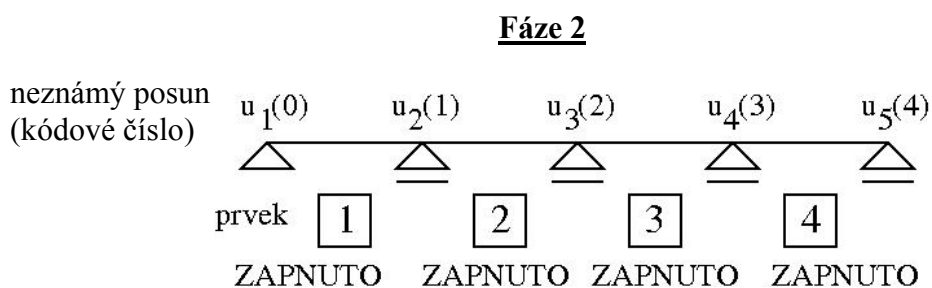
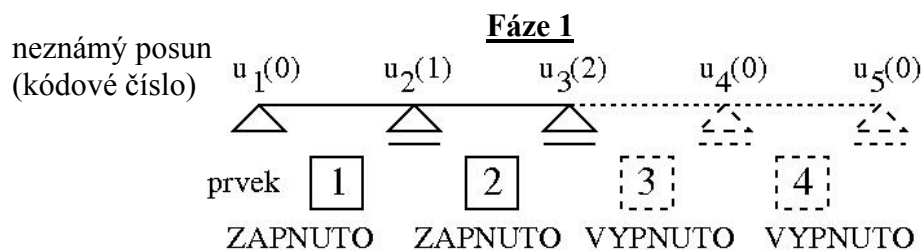
Snaha o co nejpřesnější analýzu chování základových desek v počátečním stadiu vede na řešení sdružené úlohy, ve které je uvažováno mechanické chování společně s vedením tepla a vlhkosti a jejich vzájemná interakce. Řešení sdružené úlohy vedení tepla a vlhkosti a mechanického chování betonových konstrukcí pomocí metody konečných prvků vede na systém nelineárních a nesymetrických rovnic. Zejména pokud mají materiálové vlastnosti silně nelineární závislost. Tento fakt výrazně zvyšuje nároky nejen na počítačové zpracování, ale i na hardware počítače (rychlost procesoru, velikost paměti). Mění se způsob ukládání matic v systému algebraických rovnic, mění se způsob jejich řešení a narůstá doba výpočtu. Jako velmi výhodné řešení se ukazuje použití paralelního programování (Kruis, 2005). Dalším významným přínosem ve smyslu zrychlení výpočtu je využití teorie spojitého retardačního modelu dotvarování betonu (Bazant, Xi, 1995) ve spojení s postupným „zapínáním“ částí sítě konečných prvků simulující průběh výstavby.

2. Postupné přidávání částí konstrukce – „zapínání a vypínání“ stupňů volnosti

Metoda konečných prvků (MKP) je vhodný nástroj pro studium odezvy (posuny a deformace v jednotlivých časových krocích) zatížených betonových konstrukcí v čase. Pro realistické modelování postupné výstavby byla do programu SIFEL, jehož základem MKP je,

* Ing. Tomáš Krejčí, Ph.D., Ing. Tomáš Koudelka, Ing. Vít Šmilauer, Ph.D.: Fakulta stavební Českého vysokého učení technického v Praze; Thákurova 7; 166 29 Praha 6; tel.: +420.224 354 309, fax: +420.224 310 775; e-mail: krejci@cml.fsv.cvut.cz

implementována možnost zapínání jednotlivých částí konstrukce pomocí časového řízení změny kódových čísel uzlů sítě konečných prvků. Ještě nevybetonované části konstrukce se ve výpočtu neuvažují. Tento přístup zamezí tomu, aby se ve výpočtu uvažovala část konstrukce s nulovým modulem pružnosti. Princip „zapínání“ jednotlivých stupňů volnosti je znázorněn na čtyřech tyčových prvcích (obr. 1 a 2).



Obrázek 1 „Zapínání a vypínání“ jednotlivých stupňů volnosti

Fáze 1 – původní matice tuhosti

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Fáze 2 - nová matice tuhosti

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Obrázek 2 Změna matice tuhosti konstrukce při „zapínání a vypínání“ jednotlivých stupňů volnosti

3. Diskrétní reologický model dotvarování betonu

Dotvarování betonu se řídí Boltzmannovým principem superpozice, kde je vyjádřena deformace v závislosti na napětí integrální rovnicí

$$\varepsilon(t) = J(t, t_0)\sigma(t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \tau)d\sigma(\tau) + \varepsilon^0(t). \tag{1}$$

Funkce poddajnosti lineárního viskoelastického materiálu J vyjadřuje deformaci v čase t od jednotkového napětí $\sigma = 1$ působícího od času τ . Člen ε^0 zastupuje jiné deformace než od

napětí (např. smršťování, teplotní deformace apod.). Při proměnném napětí je třeba nahradit rovnici (1) vhodným přírůstkovým vztahem. Obvyklá integrální formulace není pro numerické řešení příliš vhodná, neboť vyžaduje uchovávat informace o stavu napětí a deformace ze všech předchozích časových okamžiků. Z tohoto pohledu je vhodnější převést integrální konstitutivní vztah na diferenciální rovnici. To je možné, pokud je funkce dotvarování J nebo relaxace R vyjádřená ve formě degenerovaných řad (Dirichletových - Pronyho řad).

$$J(t, \tau) = \sum_{\mu=1}^M \frac{1}{D_{\mu}(\tau)} \{1 - \exp[y_{\mu}(\tau) - y_{\mu}(t)]\}, \quad (2)$$

$$R(t, \tau) = \sum_{\mu=1}^M E_{\mu}(\tau) \exp[y_{\mu}(\tau) - y_{\mu}(t)], \quad (3)$$

kde $y_{\mu}(\tau) = (t/\tau_{\mu})^{q_{\mu}}$ a $q_{\mu} \approx 2/3$. Funkce $D_{\mu}(\tau)$ mohou být pro dané vyjádření funkce $J(t, \tau)$ získány na základě naměřených dat, např. metodou nejmenších čtverců. Pro některé speciální tvary funkce dotvarování $J(t, \tau)$ lze nalézt explicitní vyjádření. Koeficienty τ_{μ} se nazývají retardační časy. Vhodný způsob jejich stanovení je popsán např. v (Bittnar, Šejnoha, 1996). Snaha o určení koeficientů Dirichletových řad na základě naměřených dat vede na systém špatně podmíněných rovnic. Při známých retardačních časech lze vypočítat hodnoty koeficientů $1/D_{\mu}(t_0) = B_{\mu}(t_0)$ v čase t_0 minimalizací kvadratické funkce

$$F = \sum_{k=1}^s \left[\sum_{\mu=1}^M \left[\frac{1}{D_{\mu}(t_0)} \{1 - \exp[y_{\mu}(\tau) - y_{\mu}(t)]\} \right] - \bar{J}(t_k, t_0) \right]^2 \quad (4)$$

vzhledem k $B_{\mu}(t_0)$. Symbolem $\bar{J}(t_k, t_0)$ je označen buď soubor diskrétních hodnot získaných měřením nebo vhodná aproximace funkce dotvarování. Derivací (4) podle $B_{\mu}(t_0)$, $\mu = 1, 2, \dots, M$, vyplyne soustava M lineárních rovnic pro tyto koeficienty

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ & & \dots & a_{MM} \\ & & & a_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_M \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

kde

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^s \{1 - \exp[y_i(t_0) - y_i(t_k)]\} \{1 - \exp[y_j(t_0) - y_j(t_k)]\}, \quad (6)$$

$$p_i = \sum_{k=1}^s \{1 - \exp[y_i(t_0) - y_i(t_k)]\} \bar{J}(t_k, t_0). \quad (7)$$

Existují další složitější způsoby minimalizace funkcionálu (4) vedoucí k lepší shodě mezi původní a aproximovanou funkcí. Mezi nejznámější patří optimalizační metody na bázi genetických algoritmů v případné kombinaci s metodou simulovaného žíhání.

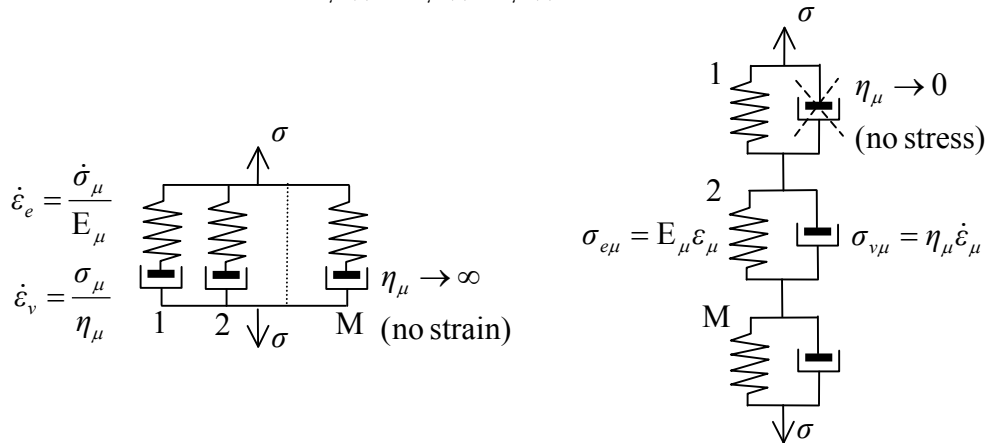
4. Spojitý reologický model dotvarování betonu

Jednoosá analýza dotvarování vychází z relaxační funkce popisující Maxwellův reologický řetězec.

$$\sigma = \sum_{\mu=1}^M \sigma_{\mu} \quad (8)$$

$$\dot{\sigma}_{\mu} + \dot{\gamma}_{\mu} \sigma_{\mu} = E_{\mu} (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^0) \quad (9)$$

$$\dot{\gamma}_{\mu}(t) = E_{\mu}(t) / \eta_{\mu}(t) \quad (10)$$



Obrázek 3 Maxwellův a Kelvinův reologický řetězec

Celková deformace je uvažována jako součet deformací jednotlivých členů Kelvinova reologického řetězce, který je vyjádřením degenerovaných jader (2). Jako velmi efektivní přístup se ukazuje uplatnit spojitý Kelvinův reologický model s nekonečně mnoha členy řetězce odpovídajícími nekonečně blízkým retardačním časům (Bazant, Xi, 1995). Tento přístup lze výhodně uplatnit u modelu dotvarování betonu B3 (Bazant, Bajewa, 1995/1), jehož základní funkcí poddajnosti je logaritmicke-mocninná funkce času

$$J(t, t') = q_1 + C(\xi), \quad (11)$$

kde

$$C(\xi) = q_2 + \ln \left[1 + \left(\frac{\xi}{\lambda_0} \right)^n \right], \quad (12)$$

s parametry q_2 , $\lambda_0 = 1$ a n , přeepsané ve formě Dirichletových řad

$$C(\xi) = \sum_{\mu=1}^M B_{\mu} \ln [1 - e^{-\xi/\tau_{\mu}}] \quad \text{s} \quad B_{\mu} = \frac{1}{D_{\mu}}, \quad (13)$$

kde $\xi = t - t'$; t = čas (stáří betonu); t' = čas (stáří) v momentě zatěžování a D_{μ} = elastický modul pružnosti Kelvinova článku řetězce. Člen $C(\xi)$ rovnice (11) v kontinuální formě můžeme přibližně vyjádřit integrálem

$$C(\xi) \approx \int_0^{\infty} L^*(\tau) (1 - e^{-\xi/\tau}) d\tau. \quad (14a)$$

Substitucí $L^*(\tau) = L(\tau)/\tau$ dostaneme následující vztah

$$C(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} L(\tau)(1 - e^{-\xi/\tau}) d(\ln \tau), \quad (14b)$$

kde $L(\tau)$ se nazývá spojité retardační spektrum. V logaritmickém časovém měřítku má stejný význam jako členy D_μ v časovém měřítku aktuálním. Pro výpočet $L(\tau)$ ze známé funkce poddajnosti je použita efektivní a obecná metoda popsaná v (Tschoegl, 1971).

V rovnicích (14a) a (14b) dosadíme za $\tau = 1/\zeta$ s $d(\ln \tau) = -d(\ln \zeta)$ a obdržíme další integrální vztah

$$C(\xi) = \int_0^{\infty} L(\zeta^{-1})(1 - e^{-\zeta\xi})\zeta^{-1} d\zeta; \quad C(\xi) = \int_0^{\infty} L(\zeta^{-1})\zeta^{-1} d\zeta - \int_0^{\infty} \zeta^{-1}L(\zeta^{-1})e^{-\zeta\xi} d\zeta, \quad (15)$$

Označením

$$f(\xi) = \int_0^{\infty} \zeta^{-1}L(\zeta^{-1})e^{-\zeta\xi} d\zeta \quad (16)$$

obdržíme zkrácený zápis pro funkci

$$C(\xi) = -f(\xi) + f(0), \quad (17)$$

kde $f(\xi)$ je Laplaceova transformace funkce $\zeta^{-1}L(\zeta^{-1})$ pro proměnnou ξ .

Transformace může být dále invertována Widderovým inverzním postupem (Widder, 1971), který je založen na asymptotické metodě. Inverzní operátor je vyjádřen následujícím vztahem

$$F_{k,\zeta}[f(\xi)] = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{\zeta}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{k}{\zeta}\right) \quad (18)$$

s důležitou vlastností

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{k,\zeta}[f(\xi)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{\zeta}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{k}{\zeta}\right) \right] = \zeta^{-1}L(\zeta^{-1}), \quad (9)$$

kde $f^{(k)}$ je k -tá derivace funkce f (pozn. $f(0)$ je konstanta), pro $k \geq 1$ obdržíme limitu

$$L(\tau) = -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-k\tau)^k}{(k-1)!} C^{(k)}(k\tau). \quad (20)$$

Aproximované retardační spektrum stupně k obdržíme dosazením konečné hodnoty k ($k \geq 1$).

Pro funkci poddajnosti ve tvaru (12) můžeme získat aproximaci retardačního spektra třetího stupně:

$$f(\xi) = q_2 \ln(1 + \xi^n) - \int_0^{\infty} L(\zeta^{-1})\zeta^{-1} d\zeta, \quad (21)$$

$$L(\tau) = \left[\frac{-2n^2(3\tau)^{2n-3}[n-1-(3\tau)^n]}{[1+(3\tau)^n]^3} \right] \frac{(3\tau)^3}{2} q_2 + \left[\frac{n(n-2)(3\tau)^{n-3}[n-1-(3\tau)^n] - n^2(3\tau)^{2n-3}}{[1+(3\tau)^n]^2} \right] \frac{(3\tau)^3}{2} q_2, \quad (22)$$

kde $k = 3$.

Pro potřeby numerických výpočtů můžeme rozdělit $\ln(\tau)$ na jednotlivé intervaly $\Delta \ln(\tau_\mu) = \ln 10 \Delta(\log(\tau_\mu))$ a tudíž můžeme integrál (14a) nahradit konečným součtem

$$C(\xi) = \sum_{\mu=1}^M L(\tau_\mu) [1 - e^{-\xi/\tau_\mu}] \ln 10 \Delta(\log \tau_\mu) \quad \text{nebo} \quad \sum_{\mu=1}^M B_\mu [1 - e^{-\xi/\tau_\mu}], \quad (23)$$

kde

$$\frac{1}{D_\mu} = B_\mu = L(\tau_\mu) \ln 10 \Delta(\log \tau_\mu). \quad (24)$$

$L(\tau_\mu)$ je dáno vztahem (22) a je rovno časovému intervalu dvou sousedních členů Kelvinova řetězce v logaritmickém měřítku (Bazant, Xi, 1995). Pro složitější vyjádření funkce dotvarování než je vztah (12) je nutné použít aproximace vyššího řádu s vyššími derivacemi funkce $C^k(k\tau)$.

Významným přínosem spojitého retardačního modelu pro počítačové simulace je zkrácení doby výpočtu. Pokud má zatížení analyzované konstrukce proměnný charakter, je nutné v diskretním Kelvinově modelu v každém časovém kroku a v každém materiálovém (integračním) bodě řešit minimalizaci funkcionalu (4), tzn. řešit soustavu rovnic nebo provádět optimalizační úlohu, což významným způsobem zpomaluje běh výpočtu.

5. Výsledky řešení - implementace spojitého retardačního spektra pro model dotvarování betonu

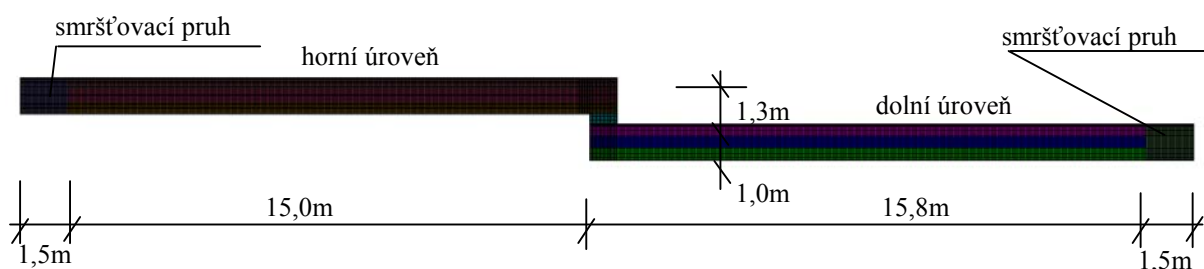
Výsledkem implementace spojitého Kelvinova reologického modelu je podstatné zrychlení výpočtu aktuálního modulu pružnosti případně poddajnosti v B3 modelu dotvarování betonu. Tabulka 4 ukazuje zrychlení (speed up) výpočtu jednoho časového kroku dotvarování betonu pro různé počty prvků (resp. integračních bodů) sítě MKP pro obdélníkovou oblast.

Tabulka 1 Porovnání rychlosti výpočtu časově závislého modulu pružnosti v integračních bodech MKP pro retardační spektrum a klasický výpočet metodou nejmenších čtverců

Počet prvků (počet integračních bodů)	100 (400)	1000 (4000)	10000 (40000)
Metoda nejmenších čtverců pro B3 model	0,69s	6,95s	69,37s
Kontinuální retardační spektrum pro B3 model	0,03s	0,33s	3,33s
Zrychlení	23x	21x	21x

6. Výsledky řešení - analýza základové desky v ranném stádiu

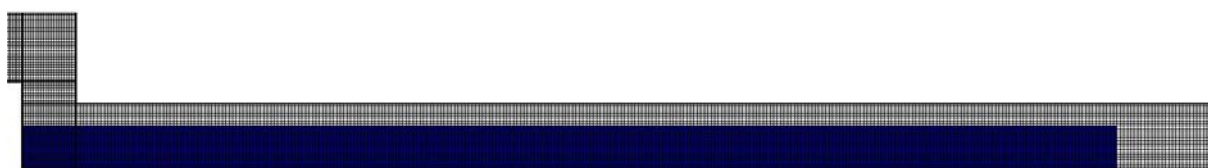
Výhody spojitého retardačního spektra a postupného zapínání sítě konečných prvků jsou využity v počítačové simulaci chování základové desky v počátečním stadiu (první měsíc). Základová deska má tloušťku 1 m a je v příčném i podélném směru vyztužena. Deska je konstruována ve dvou úrovních, které byly betonovány ve třech vrstvách s časovým odstupem tři hodiny. Počítačová simulace sleduje postup výstavby, kde jsou jednotlivé vrstvy přidávány do výpočtu podle harmonogramu betonáže. Ve spodní úrovni desky jsou jednotlivé vrstvy zapínány po třech hodinách (obr. 5 až obr. 7). Horní úroveň je uvažována až po třiceti dnech od vybetonování dolní části. Smršťovací pruhy, které spojují desku s podzemními stěnami, jsou v obou úrovních dokončeny dle harmonogramu po třiceti dnech od vybetonování desky.



Obrázek 4 Schéma 2D modelu základové desky administrativní budovy Praha - Těšnov



Obrázek 5 „Zapnutí“ první vrstvy základové desky v dolní úrovni

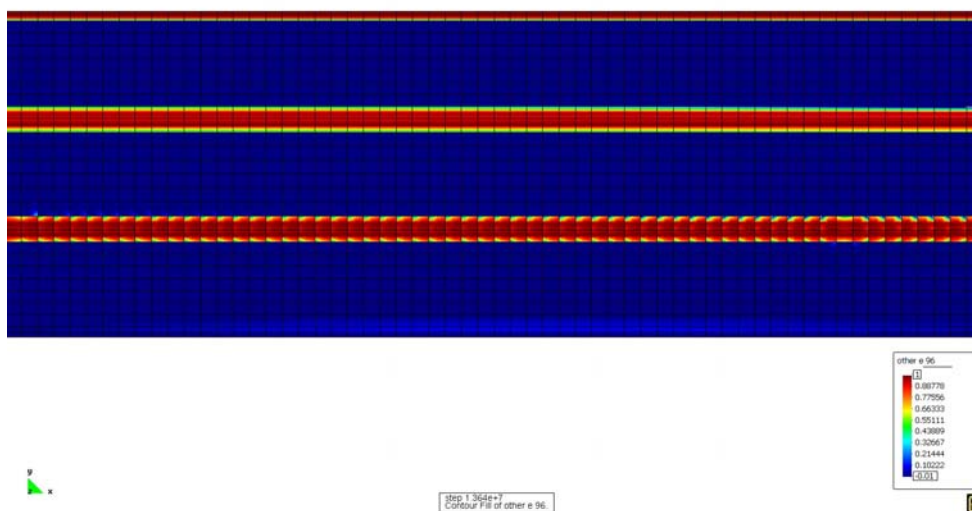


Obrázek 6 „Zapnutí“ druhé vrstvy základové desky v dolní úrovni

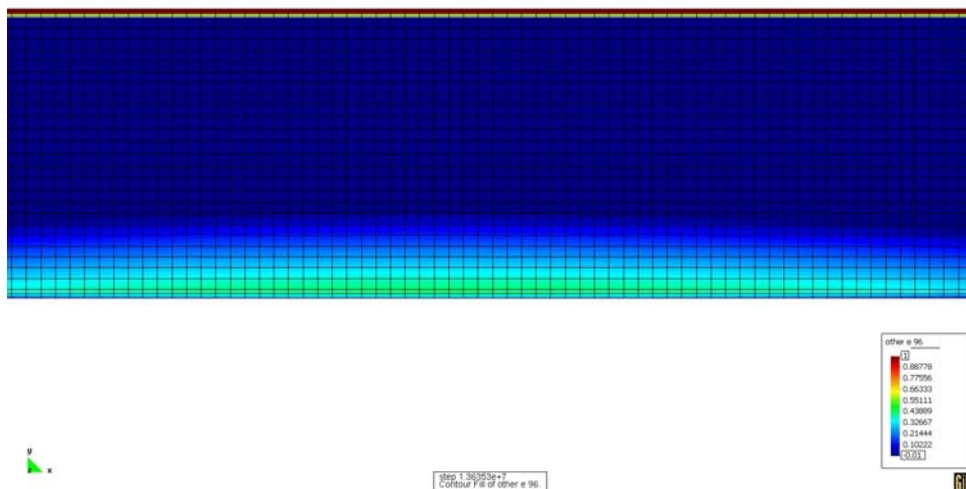


Obrázek 7 „Zapnutí“ třetí vrstvy základové desky v dolní úrovni

Dopad působení klimatických podmínek v letním období (deska byla betonována v červenci a v srpnu 2004) na čerstvý beton ukazují výsledky dvou simulací s uvažováním klimatických podmínek a s uvažováním důkladného ošetřování betonu. V prvním případě je modelováno působení klimatických podmínek. Je zde zahrnuto přímé oslunění (radiace), vliv vnějších letních teplot a vlhkostí a také vliv deště a větru na horní okraj každé vrstvy betonu. Ve druhém případě je do výpočtu zahrnuto důkladné ošetřování betonu - kropení spodních vrstev před betonáží vrstev horních a zabránění přímému dopadu slunečních paprsků přikrytím folií. Po vybetonování byla celá deska navíc tři dny kropena a po dobu pěti dnů přikryta PE folií.



Obrázek 8 Detail rozložení parametru poškození ve spodní úrovni desky – vliv klimatických podmínek



Obrázek 9 Detail rozložení parametru poškození ve spodní úrovni desky – ošetřovaná deska

Na obrázku 8 jsou vidět oblasti koncentrace parametru poškození ω v kontaktních plochách jednotlivých vrstev a při horním povrchu desky v čase 1 den, které jsou způsobeny smrštěním ovlivněným ztrátami vlhkosti. Na povrchu jednotlivých vrstev vystavených přímému dopadu slunečních paprsků dochází ke značnému nárůstu teploty (někdy až 60 °C) a k rychlému odpařování volné vody. Tento jev má za následek rozvoj poškození při horním povrchu a následný rozvoj trhlin. U takto zatížené desky dochází k separaci jednotlivých vrstev. Obrázek 9 znázorňuje výsledné rozložení parametru poškození ω u desky důkladně ošetřované. Je vidět, že k poškození desky dojde tentokrát ve spodní vrstvě a to do hloubky zhruba 20 cm. Maximální hodnota parametru poškození je zhruba 0,6. Toto poškození vzniká vlivem opožděné hydratace v horní vrstvě. Během špičky vývinu hydratačního tepla v horní vrstvě je deska v důsledku nerovnoměrného ohřátí ohýbána momentem, který táhne horní vlákna a snaží se prohnout desku vzhůru. Působením vlastní tíhy pak dochází k potrhání spodních partií desky.

7. Poděkování

Tento výsledek byl získán za finančního přispění MŠMT ČR - projekt 1M6840770001 a výzkumného centra CIDEAS.

8. Literatura

Bazant Z. P., Baweja S. (1995) Justification and Refinements of Model B3 for Creep and Shrinkage. Updating and Theoretical Basis. Mater. Struc. 28, 44-50, 1995

Bazant, Z. P., Křístek, V., Vitek, J. (1992): Drying and Cracking Effects in Box – Girder Bridge Segment. Journal of Structural Engineering **1(118)**

Bazant, Z. P., Thonguthai, W. (1979): Pore pressure in heated concrete walls: theoretical prediction. Magazine of Concrete Research, 31(107), 67-76, 1979

Bažant Z. P., Xi W. (1995) Continuous retardation spectrum for solidification theory of concrete creep. *J. Engrg. Mech.*, 121(2), 281-288, 1995

Krejčí, T. (2003): Time – dependent behavior of concrete and other porous materials, ČVUT, Praha, disertační práce

Kruis, J. (2005): Domain decomposition Methods for Distributed Computing. Saxe-Coburg Publications, Stirling, Scotland, UK, 2005.

Künzel, H. M., Kiessl, K. (1997): Calculation of heat and moisture transfer in exposed building components. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40, 159-167, 1997

Lewis, R. W., Schrefler, B. A. (1998): The finite element method in static and dynamic deformation and consolidation of porous media. John Wiley & Sons, Chicester-Toronto (492), 1998

Šejnoha, J. et al. (2001): Structure – subsoil interaction in view of transport processes in porous media. *CTU Reports*, 1, Vol. 5(81 pp.)

Tschoegl, N. W. (1971): A general method for determination of approximations to the spectral distributions from the transient response functions. *Rheol. Acta*, Vol. 10, 595-600, 1971

Widder, D. V. (1971). An introduction to transform theory. Academic Press, New York, N. Y., 1971