



NON-LINEAR AFFINITY IN MOHR'S PLANE

J. Maláček*

Summary: *Mechanical properties of particular materials (also granular and powdery materials, dispersions, suspensions, liquids with high viscosity,) are usually described by boundary functional dependences of shear stresses and direct stresses – so called material characteristics $\tau = \pm f(\sigma)$. These material characteristics are envelope curves of all limiting Mohr's circles. If the material characteristic is a linear function – all limiting Mohr's circles are linear affine, if the material characteristic is a non-linear function – all limiting Mohr's circles and respective stress tensors are non-linear affine. This non-linear affinity can be mathematically described.*

1. Úvod

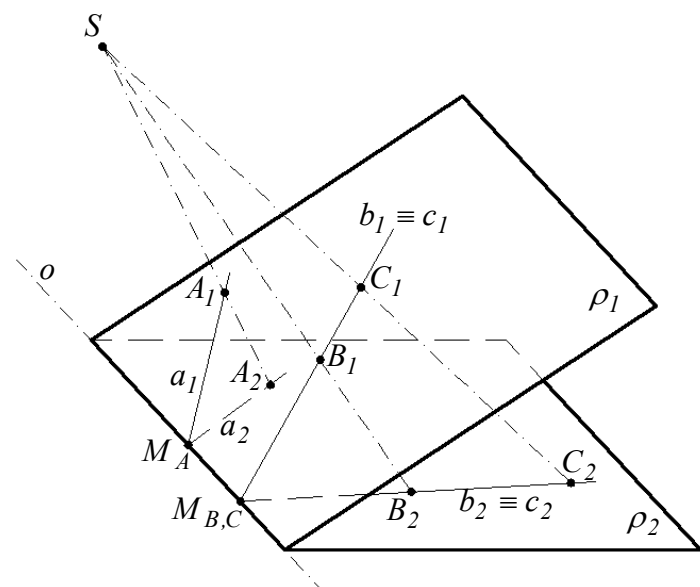
Při technologickém zpracování partikulárních látek – tedy zrnitých a sypkých materiálů, též disperzí, suspenzí, kapalin s vysokou viskozitou – dochází mechanickými účinky k přetváření těchto látek. V důsledku přetváření – deformace vznikající stav napjatosti určuje rozložení zatížení strojních součástí, které jsou v kontaktu s přetvářenou látkou. Mechanické vlastnosti těchto látek jsou obvykle popsány mezní funkční závislostí smykových a normálových napětí – tzv. materiálovou charakteristikou $\tau = \pm f(\sigma)$. Tato funkce představuje obalovou čáru všech mezních Mohrových kružnic v Mohrově rovině. Materiálové charakteristice $\tau = \pm f(\sigma)$ je třeba přiřadit řadu dalších proměnných vlastností přetvářeného materiálu, jako viskozitu, gradient rychlosti, mezerovitost, entropii, číslo plasticity, stupeň konsolidace, vlhkost, lamelovou tekutost. Například pro různé hodnoty gradientu rychlosti, nebo mezerovitosti (stupně konsolidace) partikulární látky existují různé funkční závislosti $\tau = \pm f(\sigma)$. Tyto další vlastnosti přetvářených látek nelze v průběhu procesu přetváření vhodně určit, proto hlavní informací o průběhu procesu přetváření je prostorový obraz systému proudnic a kluzných čar.

Při přetváření – deformaci těchto látek je pružná deformace předpokládána nulová. Hlavní napětí $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ předpokládáme tlaková, kladných hodnot, směřující dovnitř přetvářené látky. V každém bodě kluzné čáry existuje oskulační rovina kluzné čáry – ta je rovinou deformace a směry příslušných hlavních napětí σ_1 a σ_2 do této roviny patří, směr příslušného hlavního napětí σ_3 je k této oskulační rovině kolmý.

* Ing. Jiří Maláček, Ph.D.: Ústav automobilního a dopravního inženýrství, VUT v Brně, FSI,
Technická 2896/2, 616 69 Brno; tel.: +420.541 142 428, fax: +420.541 142 425;
e-mail: malasek@fme.vutbr.cz

2. Středová kolineace a osová afinita

Promítání – projekce ze středu kolineace S , zprostředkovávající vzájemně jednoznačnou příbuznost příslušných bodů, čar, obrazců mezi dvěma rovinami ρ_1 a ρ_2 , je nazýváno středovou kolineací, je-li tento střed kolineace S bodem vlastním.



S střed kolineace – vlastní bod

$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$... nesamodružné body

M_A, M_{BC} samodružné body

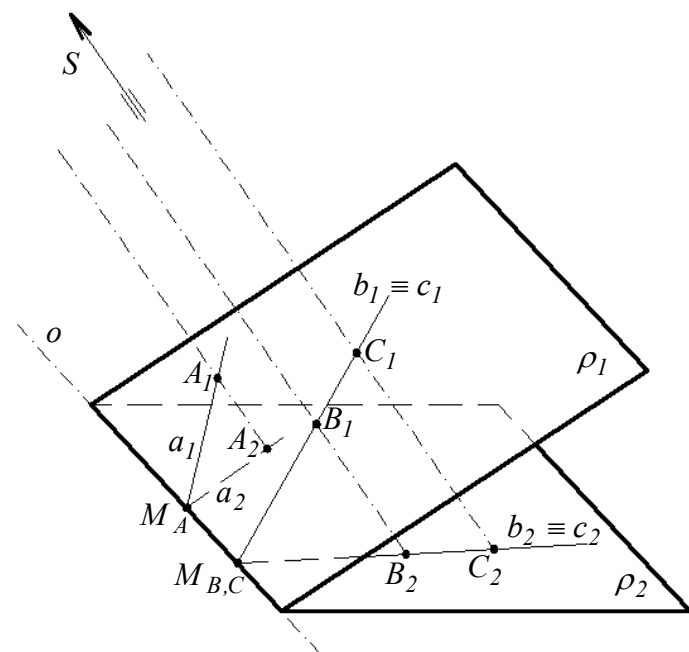
$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ nesamodružné přímky

o osa kolineace – vlastní přímka

ρ_1, ρ_2 příslušné roviny

Obr. 1: Středová kolineace mezi dvěma rovinami.

Promítání – projekce ze středu kolineace S , zprostředkovávající vzájemně jednoznačnou příbuznost příslušných bodů, čar, obrazců mezi dvěma rovinami ρ_1 a ρ_2 , je nazýváno osovou afinitou, je-li tento střed kolineace S bodem nevlastním.



S střed afinity – nevlastní bod

$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$... nesamodružné body

M_A, M_{BC} samodružné body

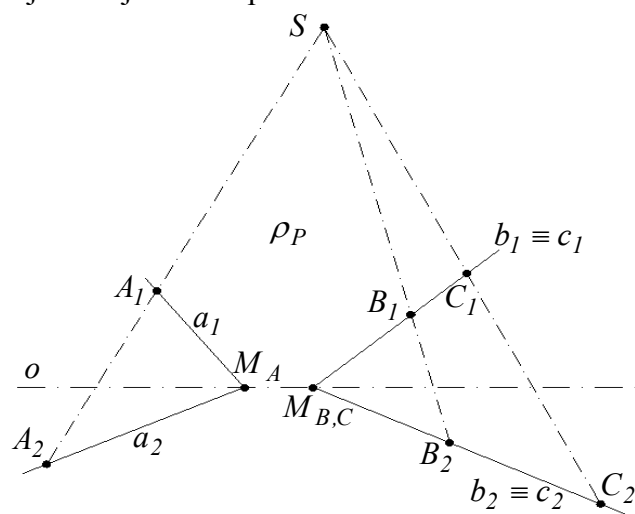
$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ nesamodružné přímky

o osa afinity – vlastní přímka

ρ_1, ρ_2 příslušné roviny

Obr. 2: Osová afinita mezi dvěma rovinami.

Promítneme-li obr.1 z daného bodu $O \notin (\rho_1, \rho_2, \rho_P)$ do roviny průmětny ρ_P , ať už je tento bod O - tzv. střed promítání vlastní, nebo nevlastní, dostaneme středovou kolineaci v rovině. Její osou je vlastní přímka a středem vlastní bod.



Všechny objekty v obr. 3 jsou průměty objektů z obr.1 do roviny průmětny ρ_P .

S střed kolineace – vlastní bod

$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$... nesamodružné body

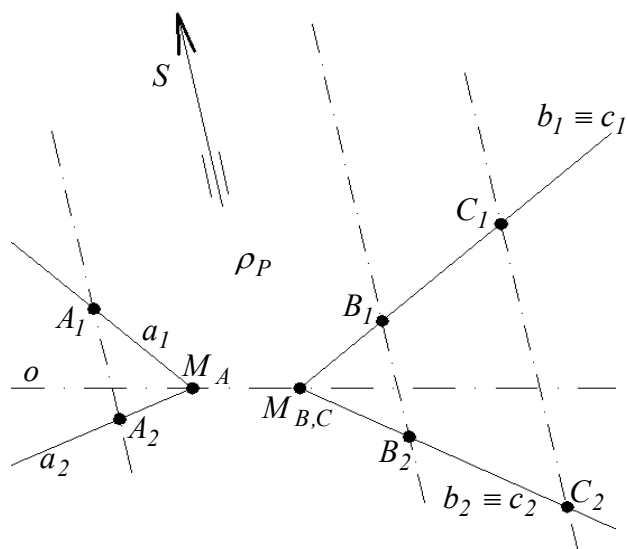
M_A, M_{BC} samodružné body

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ nesamodružné přímky

o osa kolineace – vlastní přímka

Obr. 3: Středová kolineace v rovině.

Promítneme-li obr.2 z daného bodu $O \notin (\rho_1, \rho_2, \rho_P)$ do roviny průmětny ρ_P , ať už je tento bod O - tzv. střed promítání vlastní, nebo nevlastní, dostaneme osovou afinitu v rovině. Její osou je vlastní přímka a středem nevlastní bod.



Všechny objekty v obr. 4 jsou průměty objektů z obr. 2 do roviny průmětny ρ_P .

S střed afinity – nevlastní bod

$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$... nesamodružné body

M_A, M_{BC} samodružné body

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ nesamodružné přímky

o osa afinity – vlastní přímka

Obr. 4: Osová afinita v rovině.

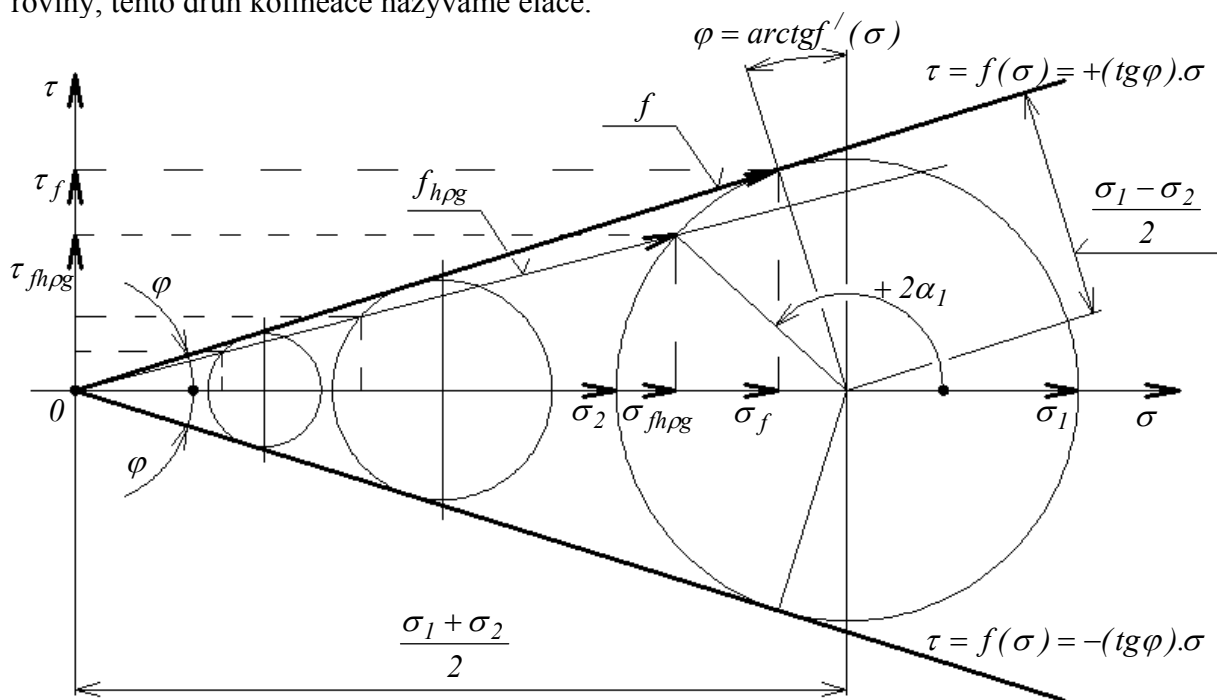
Osová afinita v rovině je středovou kolineací v rovině, jejíž osa je vlastní přímka a střed je nevlastní bod.

Pokud se roviny ρ_1, ρ_2 v obr. 2 stanou nerovinnými (zakřivenými) plochami, pak se nesamodružné přímky $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ v obr. 2 a rovněž v obr. 4 stanou křivkami. Možno pak takovou osovou afinitu nazvat nelineární afinitou.

3. Osová afinita v Mohrově rovině

- Předpoklady:
- Mohrova rovina je totožná s rovinou průmětny.
 - Osa afinity je vlastní přímkou a je totožná s osou normálových napětí σ v Mohrově rovině.
 - Střed afinity S je nevlastní bod ve směru osy smykových napětí τ v Mohrově rovině.
 - Obalové přímky (materiálové charakteristiky $\tau = \pm(\operatorname{tg} \varphi) \cdot \sigma$) všech mezních Mohrových kružnic v Mohrově rovině jsou nesamodružnými přímkami.

Pro ideálně sypký materiál je obalová čára všech mezních Mohrových kružnic přímkou, procházející počátkem souřadnic Mohrovy roviny..... $\tau = +(\operatorname{tg} \varphi) \cdot \sigma$, $\tau = -(\operatorname{tg} \varphi) \cdot \sigma$. Vlastnostem ideálně sypkého materiálu se přibližuje dokonale vysušená mramorová dř vhodné zrnitosti. Z obr. 5 je zřejmé, že všechny mezní Mohrovy kružnice vyhovují osově afinitě výše uvedených předpokladů. Všechny mezní Mohrovy kružnice v obr. 5 vyhovují rovněž kolineaci v rovině, jejíž střed leží na ose kolineace – je počátkem souřadnic Mohrovy roviny, tento druh kolineace nazýváme elace.



Obr. 5: Osová afinita a elace v Mohrově rovině.

Evidentní je využitelná lineární podobnost a stejnohlelost, osová afinita a elace všech mezních Mohrových kružnic pro lineární materiálovou charakteristiku $\tau = \pm(\operatorname{tg} \varphi) \cdot \sigma$ v obr. 5:

$$k = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}}{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}} = \frac{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)}{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}$$

Užitím goniometrických vztahů $2.\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$, $2.\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$ dostaneme:

$$k = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{2.\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{2.\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (1)$$

V plasticky přetvářených hmotách je možno například určit hydrostatický tlak jako normálové napětí v rovině deformace (tedy v oskulační rovině kluzné čáry) - jako součin gravitačního nebo výsledného zrychlení g , objemové hmotnosti ρ a vzdálenosti zkoumaného bodu od povrchu hmoty proti směru gravitačního nebo výsledného zrychlení: $\sigma_{fh\rho g} = h.\rho.g$

Dle zákonitostí osové afinity pak možno psát následující vztahy:

$$\begin{aligned} \sigma_{fh\rho g} &= \sigma_f + (\operatorname{tg} \varphi).\tau_f + \sqrt{\tau_f^2 + (\operatorname{tg} \varphi)^2.\tau_f^2} . (\cos 2\alpha_1) = \\ &= \sigma_f + (\operatorname{tg} \varphi)^2.\sigma_f + \sqrt{(\operatorname{tg} \varphi)^2.\sigma_f^2 + (\operatorname{tg} \varphi)^4.\sigma_f^2} . (\cos 2\alpha_1) = \\ &= \sigma_f + (\operatorname{tg} \varphi)^2.\sigma_f + (\operatorname{tg} \varphi).\sigma_f.\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2} . (\cos 2\alpha_1) \end{aligned} \quad (2)$$

Rovnice (2) má pouze jedinou neznámou σ_f , protože úhel α_1 lze určit z obrazu přetváření. Odpovídající hlavní napětí σ_1 a σ_2 u této mezní Mohrovy kružnice možno určit:

$$\sigma_1 = \sigma_f + (\operatorname{tg} \varphi)^2.\sigma_f + (\operatorname{tg} \varphi).\sigma_f.\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2} \quad (3)$$

$$\sigma_2 = \sigma_f + (\operatorname{tg} \varphi)^2.\sigma_f - (\operatorname{tg} \varphi).\sigma_f.\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2} \quad (4)$$

V důsledku afinity a elace možno rovněž psát:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\tau_f^2 + (\operatorname{tg} \varphi)^2.\tau_f^2} = (\operatorname{tg} \varphi).\sigma_f.\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2} \quad (5)$$

$$\tau_{fh\rho g} = (\operatorname{tg} \varphi).\sigma_f.\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2} . \sin 2\alpha_1 \quad (6)$$

Poměr nejmenšího hlavního napětí σ_2 ku největšímu hlavnímu napětí σ_1 pro lineární materiálové charakteristiky $\tau = f(\sigma) = \pm(\operatorname{tg} \varphi).\sigma$ pak bude:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_f + (\operatorname{tg} \varphi)^2.\sigma_f - (\operatorname{tg} \varphi).\sigma_f.\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2}}{\sigma_f + (\operatorname{tg} \varphi)^2.\sigma_f + (\operatorname{tg} \varphi).\sigma_f.\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2}} \\ k &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2 - (\operatorname{tg} \varphi).\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2}}{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2 + (\operatorname{tg} \varphi).\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2}} \end{aligned} \quad (7)$$

Rovnice (7) je základem popisu afinity (lineární afinity, elace) všech vzájemně odpovídajících si bodů všech mezních Mohrových kružnic pro různé lineární materiálové charakteristiky $\tau = f(\sigma) = \pm(\operatorname{tg} \varphi).\sigma$ v Mohrově rovině.

Rovnice (8) je základem popisu nelineární afinity všech vzájemně odpovídajících si bodů všech mezních Mohrových kružnic pro různé nelineární materiálové charakteristiky $\tau = f(\sigma)$ v Mohrově rovině. V důsledku této nelineární afinity a elace je možno sestavovat obdobné rovnice jako v kapitole 3.

5. Závěr

Všechny mezní Mohrovy kružnice v Mohrově rovině a souřadnice jejich odpovídajících si (se stejným úhlem $2\alpha_1$) bodů – tedy příslušná napětí σ a τ vyhovují vzájemné podobnosti, stejnolehlosti, afinitě, elaci.

Podobnost, stejnolehlost, afinita a elace mohou být lineární – pokud nesamodružné čáry jsou přímkami.

Podobnost, stejnolehlost, afinita a elace mohou být nelineární – pokud nesamodružné čáry jsou křivkami.

Mezní nesamodružné čáry jsou při tom obáčkami všech mezních Mohrových kružnic. Ostatní nesamodružné čáry odpovídají ostatním (ne mezním) nesamodružným bodům mezních Mohrových kružnic. Nesamodružné čáry se protínají na ose afinity (na ose elace, ose σ) Mohrovy roviny.

Souřadnice těchto bodů na mezních Mohrových kružnicích - normálová napětí a smyková napětí - je vhodné vyjádřit pomocí parametrických rovnic příslušné Mohrovy kružnice z důvodu kladných nebo záporných hodnot příslušných napětí σ a τ .

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha \qquad \tau = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha \qquad (9)$$

Rovnice (9) jsou parametrickými rovnicemi negativní Mohrovy kružnice, jestliže některé hodnoty σ a τ v rovnicích (9) vyhovují materiálové charakteristice $\tau = f(\sigma)$, pak tyto kružnice popisují mezní stavy napjatosti materiálu a podle funkce $\tau = f(\sigma)$ mají vlastnosti podobnosti, stejnolehlosti, afinity a elace.

6. Poděkování

Publikovaných výsledků bylo dosaženo za podpory ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky, výzkumný záměr MSM 0021630518 "Simulační modelování mechatronických soustav".

7. Literatura

Malášek, J.: (2004) Mísení a kompaktování partikulárních látek. ISBN 80-214-2603-9.

Malášek J.: (2003) Disertační práce. Mísení a kompaktování partikulárních látek. VUT v Brně, FSI, ISSN 1213-4198.

Urban, A.: (1977) Deskriptivní geometrie I, pp. 112-127. SNTL, N.P.ALFA.