



RANDOM RESPONSE OF ONE-DIMENSIONAL STRUCTURE WITH NON-PROPORTIONAL DAMPING DUE TO WIND EXCITATION

J. Náprstek*, S. Pospíšil*, S. Hračov*

Summary: *Slender structures exposed to wind influences are subjected to a random component of the pressure generated by a fluctuation part of the wind velocity. The structure itself is mostly completed by a vibration absorber of various type, which is an origin of a significant non-proportionality of the damping. This factor involves to respect an interaction of eigen-functions (or eigen-forms) on the level of the system itself and moreover on the level of the stochastic interaction of the response with respect to these generalized coordinates. In this study linking with the last year's paper theoretical results and basic properties of the system is briefly remembered. Then the authors are focussed on an analysis of the particular structure. Factor of various non-proportionality ratio is assessed in a relation with the damping efficiency of individual eigen-forms from the point of view of their interaction and their influence onto final results. It is coming to light that many eigen-forms are able to abandon the subcritical regime and to loss any real influence onto the result. However their hidden influence on other eigen-forms can still remain in force.*

1. Úvod

Výsledky analýzy dynamického chování štíhlých konstrukcí byly v minulosti často zatíženy řadou předpokladů mnohdy vzdálených realitě. Jedním z typických nedostatků byla např. všeobecně přijímaná hypotéza o proporcionálním útlumu, která je zcela mimo realitu, jakmile se konstrukce vybaví tlumičem kmitání jakéhokoli typu. Dalším předpokladem, který je obtížné akceptovat, je nezávislost jednotlivých vlastních tvarů kmitání. Při stochastickém typu buzení je tento předpoklad splněn jen zřídka pro velmi speciální konfigurace buzení.

Z výsledků měření a ze zkušeností vyplývá, že rychlost větru je veličina náhodně proměnná v prostoru i v času. V daném bodě ji v dostatečně dlouhém časovém úseku můžeme považovat za stacionární. Dá se formulovat jako součet konstantní statické složky a náhodně proměnné složky dynamické. Popisu obou těchto složek bylo věnováno v minulých desetiletích velké množství prací. Přehled těchto poznatků je publikován v řadě monografií (Koloušek et al. 1983, Simiu & Scanlan 1996), norem a dalších pramenů. Také dílčím problémům dynamiky konstrukcí buzených flukтуаční složkou větru byla v téže době věnována značná pozornost, a to jak na experimentální, tak na teoretické úrovni, viz např. Davenport (1967, 1967a), Dyrbye & Hansen (1996), Fischer & Pirner (1986).

O určitý systematický přístup k tomuto problému z hlediska stochastické dynamiky se pokusily publikace Náprstek et al. (2006, 2006a, 2007). Tato studie vychází převážně z první

*Ing. Jiří Náprstek, DrSc., Ing. Stanislav Pospíšil, PhD., Ing. Stanislav Hračov
Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR, v.v.i.; Prosecká 76, 190 00 Praha 9
naprstek@itam.cas.cz

z těchto prací a navazuje na ní podrobnějším rozbohem odezvy konstrukce a ukázkou analýzy pro konkrétní případ.

Jak vyplývá z literatury, řešení je možné založit na různých typech matematického modelu konstrukce. Dlouhodobé zkušenosti ukazují, že nejefektivnější jsou modely, které vycházejí ze spojité povahy hlavních prvků konstrukce a jsou tudíž popsány parciálními diferenciálními rovnicemi. Umožňují mnohem hlubší analýzu jevů na úrovni formálních matematických úvah a tím předem vylučují mnohá pochybení vyplývající z fenomenologického přístupu.

2. Matematický model soustavy

Vyjdeme ze známé pohybové rovnice přímého prutu se statickou podélnou silou doplněné rovnicí připojeného tlumiče:

$$\begin{aligned} (EJu'')'' + (Nu')' + 2b\dot{u} + \mu\ddot{u} + \delta_q[C(u_q - u_d) + 2b_d(\dot{u}_q - \dot{u}_d)] &= p, \\ m\ddot{u}_d - C(u_q - u_d) - 2b_d(\dot{u}_q - \dot{u}_d) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

$EJ = EJ(x)$, $N = N(x)$, $b = b(x)$, $\mu = \mu(x)$ - koeficienty obvyklého všeobecně známého významu; jsou popsány po částech spojitými pozitivními integrovatelnými funkcemi;

C , b_d , m - charakteristiky tlumiče; $b_d = \zeta_d \cdot \sqrt{C/m}$, kde ζ_d je poměrný útlum, viz též kapitola 6;

$u = u(x, t)$, $u_q = u(x_q, t)$, $u_d = u_d(t)$ - výchylka dřívku, výchylka dřívku v místě připojení tlumiče, výchylka tlumiče;

$\delta_q = \text{dir}(x - x_q)$ - bod x_q je bodem připojení tlumiče;

$p = p(x, t)$ - vnější buzení; je možné jej psát ve tvaru součinu nezávislých funkcí v času a v prostoru: $\varphi(x) \cdot p(t)$.

Konstrukce musí být kinematicky stabilní vzhledem ke hlavním okrajovým podmínkám, aby byla zajištěna jednoznačná řešitelnost problému.

Zaměříme-li se na výsledek složitějších a zdlouhavějších úvah, které vycházejí z obecného funkcionálního tvaru koeficientů a skladby vnějšího buzení, dá se dokázat, že řešení soustavy rovnic (1) lze psát ve tvaru konvergentní řady v zobecněných souřadnicích ($n \rightarrow \infty$):

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^n u_j(x) \cdot f_j(\theta_j t), \quad u(x_q, t) = \sum_{j=1}^n u_{qj} \cdot f_j(\theta_j t), \quad u_d(t) = \sum_{j=1}^n u_{dj} \cdot f_j(\theta_j t), \quad (2)$$

kde $u_{qj} = u_j(x_q)$ a $(u_j(x), u_{dj})$, θ_j jsou složky j -té vlastní funkce, resp. j -té vlastní číslo operátoru, který vznikne ze soustavy rovnic (1) po odstranění tlumících členů a buzení. Výrazem $(u_{j_0}(x), u_{dj_0})$ není míněn vektor, u_{dj_0} je součástí j -té vlastní funkce pro speciální hodnotu souřadnice, kterou se myslí poloha tlumiče.

Tvar operátoru je patrný z levé strany soustavy:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\{u_j(x)\} + \delta_q C(u_{qj} - u_{dj}) &= \theta_j^2 \mu(x) \cdot u_j(x), \\ -C(u_{qj} - u_{dj}) &= \theta_j^2 m u_{dj}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{kde:} \quad \mathbf{L}\{u(x)\} \equiv (EJ(x)u''(x))'' + (N(x)u'(x))', \quad (4)$$

s okrajovými podmínkami:

$$\text{- vrchol konstrukce: } u_j''(l) = 0, \quad (EJ(x)u_j''(x))' + N(x)u_j'(x) \Big|_{x=l} = 0, \quad (5)$$

$$\text{- pata konstrukce: } u_j(0) = u_j'(0) = 0, \quad \text{resp.} \quad u_j(0) = u_j''(0) = 0. \quad (6)$$

Existence diskrétního spektra vlastních čísel θ_j je zajištěna pozitivní definitností operátoru (3-6). Ke každému vlastnímu číslu θ_j existuje za daných podmínek jediná vlastní funkce $(u_j(x), u_{dj})$. Vektor $\mathbf{f}(t) = [f_1(t), \dots, f_n(t)]^T$ potom vyplývá ze soustavy rovnic:

$$\Theta^2 \cdot \mathbf{f}(t) + 2\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{f}}(t) + \mathbf{I} \cdot \ddot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{p}(t), \quad (7)$$

$$\Theta^2 = \text{diag}[\theta_1^2, \dots, \theta_n^2], \quad \mathbf{B} = \left[\int_S b(x)u_{ko}(x)u_{jo}(x) \, dx + b_d(u_{qko} - u_{dko})(u_{qjo} - u_{djo}) \right], \quad (8)$$

$$\mathbf{I} - \text{jednotková matice}, \quad \mathbf{p}(t) = \left[\int_S p(x, t)u_{ko}(x) \, dx \right],$$

kde $(u_{jo}(x), u_{djo})$ jsou normalizované vlastní funkce ve smyslu:

$$\mathbf{u}_o(x) = [(u_{jo}(x), u_{djo})] = [(u_j(x), u_{dj})/\sqrt{M_j}], \quad M_j = \int_S \mu(x)u_j^2(x) \, dx + u_{dj}^2 \cdot m. \quad (9)$$

Soustavu (7) lze přepsat v normálním tvaru:

$$\dot{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}(t) + \mathbf{P}(t), \quad (10)$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(t) \\ \mathbf{f}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_1(t) = \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{f}_2(t) = \dot{\mathbf{f}}(t), \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & ; & \mathbf{I} \\ -\Theta^2 & ; & -2\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(t) = \mathbf{H}\mathbf{p}(t), \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

$\mathbf{p}(t)$ - vektor n nezávislých náhodných procesů, které popisují buzení v jednotlivých zobecněných souřadnicích $(u_{jo}(x), u_{djo})$.

Pohyb spojitě soustavy je nyní popsán v zobecněných souřadnicích, které tvoří ortonormované vlastní funkce $(u_{jo}(x), u_{djo})$ operátoru (3-6). Vlastní funkce $(u_{jo}(x), u_{djo})$ i vlastní čísla θ_k jsou reálná. Odpovídají vlastnímu kmitání netlumené soustavy a dají se bez potíží určit například deformační metodou, viz např. Koloušek et al. (1983). K tomuto kroku se samozřejmě dá použít také řada jiných metod založených na numerických či experimentálních postupech, popř. jejich kombinacích.

Funkce $(u_j(x), u_{dj})$ jsou ortogonální vzhledem k symetrii operátoru, tvoří úplnou soustavu a jsou skoro všude spojitě. Apriori splňují všechny okrajové podmínky. Operátor (3-6) vzhledem k $(\mu(x), m)$ je podobný operátoru původní soustavy (1). Dá se dokázat, že soustava vlastních funkcí $(u_j(x), u_{dj})$ operátoru (3-6) se dá použít jako galerkinovská báze soustavy pro variační řešení soustavy (1), viz např. (Michlin, 1975), neboť splňuje apriori nejen hlavní, ale i přirozené okrajové podmínky. Použití takové báze soustavy umožňuje předem vyloučit některé problémy numerické nestability zejména u veličin s vyšší derivací v prostoru v oblasti volného okraje, resp. přirozených okrajových podmínek.

Z tvaru rovnice (7) je zřetelné, že spolupůsobení funkcí $(u_{jo}(x), u_{djo})$ při stanovení vlastních tvarů původní soustavy (1), anebo při analýze odezvy na vnější buzení, je dáno neproporcionálním útlumem, který vede k plně čtvercové matici \mathbf{B} . Z proporcionálního útlumu by vyplývala

diagonální matice \mathbf{B} , a tudíž funkce $(u_{jo}(x), u_{djo})$ by se chovaly nezávisle a daly by se považovat přímo za vlastní tvary původní soustavy a $f_j(t)$ za časový popis jejich uplatnění. Na základě matice \mathbf{B} , resp. rychlosti zániku mimodiagonálních členů se vzdáleností od hlavní diagonály lze tedy přibližně posuzovat oprávněnost zanedbání neproporcionálnosti útlumu v případě, že konstrukce je podrobena deterministickému buzení. Přítomností jediného tlumiče oprávněnost předpokladu o proporcionálním útlumu zmizí. Zároveň je třeba si uvědomit, že v případě náhodného buzení je obecně dalším možným zdrojem spolupůsobení funkcí $(u_{jo}(x), u_{djo})$, popř. vlastních tvarů jejich stochastická interakce, která vyplývá z prostorové korelace vnějšího buzení. Z toho důvodu je třeba soustavu (7), resp. (10) analyzovat v plné šíři.

3. Rozbor náhodné odezvy metodou spektrálních rozkladů

Vstupní i výstupní procesy jsou v našem případě spojité. Dá se dokázat, že je možné je psát ve tvaru, který je založen na spektrálních diferenciálech vstupních procesů:

$$\mathbf{p}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\Phi(\omega); \quad \mathbf{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}^*(\omega, t) d\Phi(\omega) \quad (12)$$

$d\Phi(\omega)$ - vektor (n prvků) spektrálních diferenciálů procesů $\mathbf{p}(t)$; $d\Phi_j(\omega)$ jsou procesy v proměnné ω typu bílého šumu; jejich korelace se řídí Wiener-Chinčinovým vztahem, viz např. Bolotin (1979):

$$\mathbf{E}\{d\Phi(\omega) \cdot \overline{d\Phi^T(\omega')}\} = \text{dir}(\omega' - \omega) \mathbf{S}_p(\omega) d\omega d\omega' \quad (13)$$

$\mathbf{E}\{\cdot\}$ - operátor matematického středu podle gaussovské hustoty pravděpodobnosti;

$\mathbf{F}^*(\omega, t)$ - matice ($2n \times n$ prvků) neznámých deterministických funkcí, které popisují transformaci náhodného buzení v zobecněných souřadnicích do složek náhodné odezvy v času.

$\mathbf{S}_p(\omega)$ - matice ($n \times n$) spektrálních hustot procesů $\mathbf{p}(t)$.

Výrazy (12) dosadíme do výrazů (11) a do soustavy (10). Vzniklou relaci vynásobíme vektorem $\overline{d\Phi^T(\omega)}$ zprava a potom uplatníme operátor matematického středu. Vstupní procesy $\mathbf{p}(t)$ jsou spojité a spektrální diferenciály $d\Phi(\omega)$ libovolné, nezávislé a nenulové skoro všude. Můžeme tedy zaměnit pořadí aplikace operátoru integrace a matematického středu. Odtud plyne:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\dot{\mathbf{F}}^*(\omega, t) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^*(\omega, t)) \cdot \mathbf{S}_p(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 2\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_p(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (14)$$

Relace (14) musí být splněna pro každé t . To je možné s ohledem na to, že matice $\mathbf{S}_p(\omega)$ je pozitivně definitní pouze tehdy, když platí:

$$\dot{\mathbf{F}}^*(\omega, t) = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^*(\omega, t) + 2\mathbf{H} \cdot \exp(i\omega t); \quad \mathbf{F}^*(\omega, t)|_{t=0} = 0 \quad (15)$$

Řešení rovnice (15) naznačíme ve tvaru Laplaceova obrazu ($t \rightarrow \xi$). Podle předpokladu je matice $(\mathbf{Q} + \mathbf{I} \cdot \xi)$ regulární a existuje tedy její inverzní matice. Pokud matice \mathbf{Q} má pouze jednoduchá vlastní čísla, výraz (15) lze dále upravit ve tvaru sumace:

$$\mathbf{F}_L^*(\omega, \xi) = (\mathbf{Q} + \mathbf{I} \cdot \xi)^{-1} \frac{2\mathbf{H}}{\xi - i\omega} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\mathbf{Z}_k \mathbf{H}}{i\omega - \xi_k} \left(\frac{1}{\xi - i\omega} - \frac{1}{\xi - \xi_k} \right) \quad (16)$$

\mathbf{Z}_k - k -tá komponentní matice ($2n \times 2n$), viz např. Lancaster (1969); pokud matice \mathbf{Q} má $2n$ jednoduchých vlastních čísel, matice \mathbf{Z}_k se dá vyjádřit ve tvaru diadického součinu:

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{q}_k \cdot \overline{\mathbf{q}_k^T};$$

\mathbf{q}_k - k -tý normalizovaný vlastní vektor ($2n$ prvků) matice \mathbf{Q} ;

ξ_k - k -té vlastní číslo matice \mathbf{Q} ; podle předpokladu jsou všechna vlastní čísla jednoduchá; matice \mathbf{B} je symetrická, matice Θ, \mathbf{I} jsou diagonální, odtud plyne, že vlastní čísla tvoří n komplexně sdružených dvojic $\xi_{2k} = \overline{\xi_{2k+1}}$ ($k = 1, n$); dá se dokázat, že z pozitivní definitnosti těchto matic zároveň plyne negativní hodnota reálné části všech vlastních čísel a tudíž dynamická stabilita soustavy (1). Při malém útlumu jsou hodnoty $|\xi_k|$ blízké hodnotám $|\theta_k|$.

Zpětnou transformací výrazu (16) dostaneme řešení rovnice (15):

$$\mathbf{F}^*(\omega, t) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\mathbf{Z}_k \mathbf{H}}{i\omega - \xi_k} (\exp(i\omega t) - \exp(\xi_k t)) \quad (17)$$

Korelační matice odezvy $\mathbf{K}_F(t_1, t_2)$ o rozměrech ($2n \times 2n$) se dá získat přímo z definice:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_F(t_1, t_2) &= \mathbf{E}\{\mathbf{F}(t_1)\overline{\mathbf{F}^T(t_2)}\} = \mathbf{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}^*(\omega_1, t_1) d\Phi(\omega_1) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{d\Phi^T(\omega_2)}\right\} \mathbf{F}^{*T}(\omega_2, t_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}^*(\omega, t_1) \mathbf{S}_p(\omega) \overline{\mathbf{F}^{*T}(\omega, t_2)} d\omega \end{aligned} \quad (18)$$

Spolu s nulovým matematickým středem se výraz (18) dá považovat za zobecněné řešení rovnice (7) ve stochastickém smyslu. Ze struktury výrazu (17) je zřejmé, že první sčítanec popisuje stacionární část odezvy, zatímco druhý sčítanec vliv přechodového děje, který nastane po zahájení buzení vlivem homogenních počátečních podmínek. Vzhledem k negativní reálné části vlastních čísel druhý sčítanec s rostoucím časem postupně zanikne. To znamená, že pokud se zabýváme pouze stacionárním stavem, můžeme druhý sčítanec ve vzorci (17) pominout. To nám umožní detailní zápis výrazu (18), který je v tomto případě funkcí pouze rozdílu $t = t_1 - t_2$ a nikoli obou časových souřadnic samostatně:

$$\mathbf{K}_F(t) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{2n} \exp(i\omega t) \frac{\mathbf{Z}_k \mathbf{H} \mathbf{S}_p(\omega) \overline{\mathbf{H}^T \mathbf{Z}_l^T}}{(i\omega - \xi_k)(-i\omega - \overline{\xi_l})} d\omega \quad (19)$$

Pro vyčíslení disperzní matice se do (19) dosadí $t = 0$. Tím fakticky vymizí v tomto vzorci exponenciální faktor. Disperzní matice se obvykle pokládá (zejména její diagonála, resp. odmocniny jejích prvků) za směrodatný údaj o rozsahu odezvy na náhodné buzení lineární soustavy gaussovskými procesy.

Vratme se nyní k výrazům (2), (7), (9). Vzhledem ke gaussovské povaze odezvy popisuje stochastickou část odezvy korelační funkce:

$$K_u(x_1, x_2, t_1, t_2) = \mathbf{E} \left\{ u(x_1, t_1) \overline{u(x_2, t_2)} \right\}$$

Souřadnice x_1, x_2 můžeme chápat tak, že se vztahují nejen na samotný dřík konstrukce, ale i na tlumič. V dalších úvahách tedy zahrneme u_{dj} do $u_j(x)$. Vlastní funkci tak nadále chápeme ve smyslu: $(u_j(x), u_{dj}) \rightarrow u_j(x)$.

Vzhledem k (2), (9) a předchozí poznámce můžeme psát:

$$K_u(x_1, x_2, t_1, t_2) = \sum_{ij=1}^n u_{io}(x_1) \overline{u_{jo}(x_2)} \mathbf{E} \left\{ f_i(\theta_i t_1) \overline{f_j(\theta_j t_2)} \right\} = \mathbf{u}_o^T(x_1) \mathbf{K}_{f11}(t_1, t_2) \overline{\mathbf{u}_o(x_2)} \quad (20)$$

přičemž $\mathbf{K}_{f11}(t_1, t_2)$ je matice $(n \times n)$ vzájemných korelačních funkcí časových složek $\mathbf{f}_1(t) = [f_i(\theta_i t)]$, viz (9), příslušejících vlastním funkcím $u_{io}(x)$. Opět s přihlédnutím k (9) můžeme dále říci, že $\mathbf{K}_{f11}(t_1, t_2)$ je levá horní čtvrtina matice $\mathbf{K}_F(t_1, t_2)$ podle (16), jak odpovídá schématu:

$$\mathbf{K}_F(t_1, t_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{K}_{f11}(t_1, t_2) & \mathbf{K}_{f12}(t_1, t_2) \\ \mathbf{K}_{f21}(t_1, t_2) & \mathbf{K}_{f22}(t_1, t_2) \end{vmatrix} \quad (21)$$

Podobně submatici $\mathbf{K}_{f22}(t_1, t_2)$ odpovídají korelace rychlostí $\dot{\mathbf{f}}_2(t)$, atd. Pro stacionární případ k (20) přiřadíme ve smyslu (19):

$$K_u(x_1, x_2, t) = \mathbf{u}_o^T(x_1) \mathbf{K}_{f11}(t) \overline{\mathbf{u}_o(x_2)} \quad (22)$$

Výraz (20), resp. (22) převádí vzájemné korelace složek pohybu v zobecněných souřadnicích $\mathbf{u}_o(x)$ na korelace v podélné souřadnici konstrukce.

Vzorce (18), (19) mají poměrně širokou použitelnost. Matici $\mathbf{F}^*(\omega, t)$ lze získat nejen analyticky, ale i numericky nebo experimentálně. To do jisté míry předurčuje metodu provedení naznačené integrace podle ω . Je možné ji dovést do konce ve formě vzorců v uzavřeném tvaru pro řadu jednodušších případů spektrálních hustot buzení. To je např. tehdy, když spektrální hustoty $\mathbf{S}_p(\omega)$ je možné vyjádřit ve tvaru ryze lomené racionální funkce a integraci provést pomocí reziduové věty. Při vyčíslení integrálu lze tedy různým způsobem kombinovat analytické a numerické postupy v závislosti na struktuře zadání. Doplňme ještě, že integrál v (18), (19) je možné chápat v Stieltjesově smyslu, čímž lze obsloužit i různé kombinace spojitých spekter a výrazných diskretních harmonických složek s pevně určenou frekvencí a amplitudou.

4. Charakteristiky odezvy vlivem náhodné složky rychlosti větru

Základem pro vyhodnocení matice $\mathbf{K}_F(t)$ (popř. jejích podmatic) je matice spektrálních hustot $\mathbf{S}_p(\omega)$, která popisuje náhodnou složku vnějšího buzení. Matici $\mathbf{K}_p(t)$ lze zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{K}_p(t) = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{p}(\tau) \overline{\mathbf{p}^T(\tau + t)} \right\} = \mathbf{E} \left\{ \int_S \mathbf{u}_o(x_1) p(x_1, \tau) dx_1 \int_S \overline{\mathbf{u}_o^T(x_2) p(x_2, \tau + t)} dx_2 \right\} \quad (23)$$

S využitím lineárního charakteru operátorů integrace a matematického středu lze (23) po několika úpravách vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p(t) &= \int_S \int_S \mathbf{u}_o(x_1) \overline{\mathbf{u}_o^T(x_2)} \mathbf{E} \left\{ p(x_1, \tau) \overline{p(x_2, \tau + t)} \right\} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_S \int_S \mathbf{u}_o(x_1) \overline{\mathbf{u}_o^T(x_2)} K_{px}(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (24)$$

kde jsme označili: $K_{px}(x_1, x_2, t) = \mathbf{E} \left\{ p(x_1, \tau) \overline{p(x_2, t + \tau)} \right\}$, přičemž vzájemná korelace fluktuální části tlaku v bodech x_1, x_2 je závislá pouze na rozdílu časových souřadnic $\tau = t_2 - t_1$.

Fourierovou transformací (24) vznikne výraz:

$$\mathbf{S}_p(\omega) = \int_S \int_S \mathbf{u}_o(x_1) \overline{\mathbf{u}_o^T(x_2)} S_{px}(x_1, x_2, \omega) dx_1 dx_2 \quad (25)$$

Spektrální hustota $S_{px}(x_1, x_2, \omega)$ popisuje skladbu fluktuací tlaků vyvolaných fluktuacemi rychlosti proudu vzduchu. Myslí se tím pouze složka tlaku ve směru proudu, nikoliv účinky působící kolmo k němu. Spektrální hustota $S_{px}(x_1, x_2, \omega)$ se skládá z Davenportovy spektrální hustoty fluktuací rychlosti větru (Davenport, 1967), funkce vyjadřující prostorovou korelaci a vliv geometrie konkrétní konstrukce:

$$S_{px}(x_1, x_2, \omega) = \beta(x_1, x_2) \cdot \exp(-\lambda|\omega||x_1 - x_2|) \cdot \frac{\alpha_0|\omega|}{(a^2 + \omega^2)^{4/3}} \quad (26)$$

$$\beta(x_1, x_2) = 4\beta_0\kappa(x_1)v_s(x_1)\kappa(x_2)v_s(x_2)$$

$\kappa(x)$ - funkce polohy x nad terénem; zahrnuje vliv geometrie a aerodynamických vlastností průřezu, měrnou hmotnost vzduchu, atd.;

$v_s(x)$ - statická složka rychlosti větru (statický gradient).

Dá se dokázat, že operace integrací podle x_1, x_2, ω a sumací podle k, l jsou záměnné. Numerické vyhodnocení lze významně zjednodušit, pokud se integrace podle ω provede jako první. Jisté potíže přináší racionální exponent (4/3) ve jmenovateli integrandu (26), případně (19). Zbývající exponenty ve jmenovateli tohoto integrandu jsou celočíselné a umožňují integraci v uzavřeném tvaru pomocí reziduové věty. Dá se však ukázat, že reziduovou větu můžeme přibližně použít i v tomto případě. Integrand (19) má nad reálnou osou ω dva singulární body: $\omega_1 = i\bar{\xi}_l$ a $\omega_3 = ia$. Vliv prvního z nich se pojedná pomocí reziduové věty. Chování výrazu (26) v okolí druhého singulárního bodu ($\omega = ia$) je možné vystihnout přibližným vztahem:

$$S_v(\omega) = \frac{\alpha_0|\omega|}{(a^2 + \omega^2)^{4/3}} \approx \frac{\alpha_1|\omega|}{(a^2 + \omega^2)} \quad (27)$$

kde α_1 je konstanta volená tak, aby racionální funkce co nejlépe vystihovala průběh původní funkce (27) v okolí singulárního bodu. Stanoví se např. z rovnosti integrálů na intervalu $\omega \in (-\infty, \infty)$ pro původní a náhradní integrand. Jinou možností je použití Laurentovy řady, výsledky jsou však méně stabilní.

Z předchozích úvah vyplývá následující výsledek:

$$I_{kl}(x_1, x_2) = \frac{2\pi\beta(x_1, x_2)}{\bar{\xi}_l + \xi_k} \cdot \frac{\alpha_0|\bar{\xi}_l| \exp(-\lambda|\bar{\xi}_l||\Delta x|)}{(a^2 - \bar{\xi}_l^2)^{4/3}} - \frac{\pi\beta(x_1, x_2)\alpha_1 \exp(-\lambda a|\Delta x|)}{(a + \xi_k)(a - \bar{\xi}_l)} \quad (28)$$

Vzorec (28) potvrzuje vzájemné spolupůsobení vlastních vektorů při náhodném buzení. Ze struktury (28) je na druhou stranu patrné, že hodnoty $I_{kl}(x_1, x_2)$ klesají velmi rychle s rozdílem $|x_1 - x_2|$. V souvislosti s (19) je zřetelné, že význam spolupůsobení je závislý na míře neproporcionálnosti útlumu, a tedy na struktuře komponentních matic \mathbf{Z}_k , a dále na velikosti prostorové korelace buzení dané především koeficientem λ .

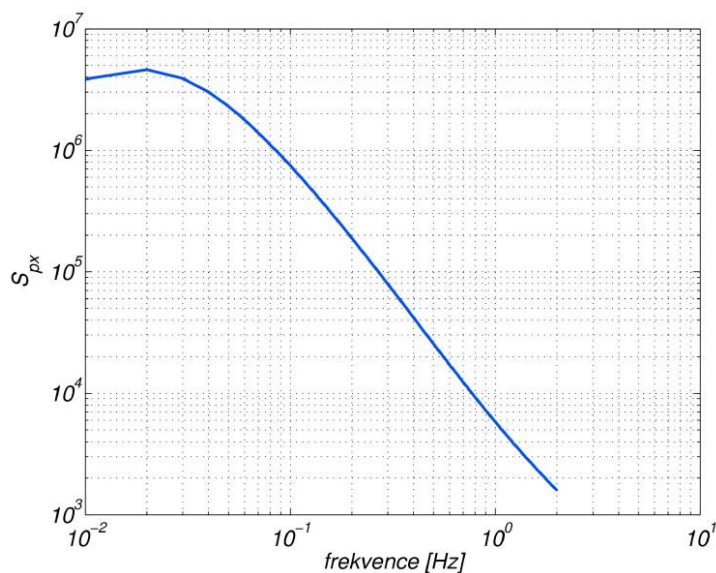
6. Numerická analýza

Teoretický postup podle předchozích kapitol byl použit v případě analýzy dynamického chování televizní věže v Ostravě-Hošťálkovicích, jejíž výška je 189 m . Její konstrukce je zhotovena ze tří dílů s různými materiály a tvarem. Jednotlivé parametry a geometrie stožáru jsou uvedeny v tab. 1. Na vrcholu stožáru je připevněn kyvadlový tlumič, který slouží k zamezení nežádoucího kmitání věže na zatížení oddělováním vírů. Hmotota tlumiče je naladěna přibližně na frekvenci prvního tvaru kmitání dřívku stožáru. Hmotnost tlumiče činí 1000 kg . Pro součinitel poměrného útlumu v rovnici (1) a ve vztahu $b_d = \zeta_d \cdot \sqrt{C/m}$ platí $\zeta_d = 0,18$.

Tabulka 1: Materiálové a geometrické vlastnosti věže.

část	materiál	délka úseku	geometrie	hmotnost [kgm^{-1}]
1.	železový beton	54 m	hranol ($6 \times 6\text{ m}$, $t = 1,2\text{ m}$)	65×10^3
2a.	ocel	27 m	válec ($d = 6\text{ m}$; $t = 0,025\text{ m}$)	28×10^3
2b.	ocel	27 m	válec ($d = 4,5\text{ m}$; $t = 0,025\text{ m}$)	$3,8 \times 10^3$
2c.	ocel	27 m	válec ($d = 3\text{ m}$; $t = 0,02\text{ m}$)	$2,7 \times 10^3$
2d.	ocel	27 m	válec ($d = 1,9\text{ m}$; $t = 0,02\text{ m}$)	$1,6 \times 10^3$
3.	laminát	27 m	válec ($d = 1,9\text{ m}$, $t = 0,012\text{ m}$)	$0,7 \times 10^3$

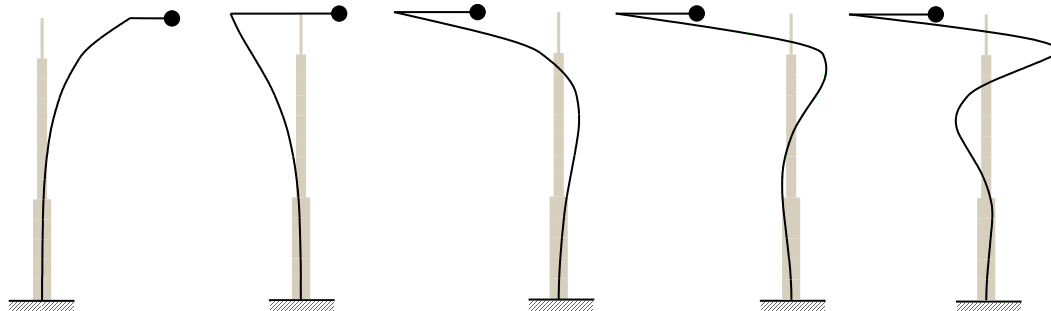
Náhodné zatížení stožáru větrem je reprezentováno spektrální hustotou větru podle vztahu pro Davenportovo spektrum, viz. např. Dyrbye, Hansen (1996). Referenční hodnota střední rychlosti větru je ve výšce 10 m rovna $v_{10} = 30\text{ m/s}$. Tvar spektrální hustoty zatížení konstrukce S_{px} v prvním tvaru kmitání, tedy pro prvou složku vektoru $f(t)$, je zobrazen na obr. 1. K výpočtu modálních vlastností konstrukce byla použita deformační metoda. Pět prvních vlastních tvarů konstrukce s tlumičem ve smyslu operátoru (3-6), které jsou zobecněnými souřadnicemi pro tvorbu matic v rovnici (7) je zobrazeno na obr. 2. Hodnoty vlastních frekvencí θ_i jsou uvedeny v komentáři.



Obrázek 1: Průběh spektrální hustoty S_{px} pro první vlastní tvar kmitání konstrukce.

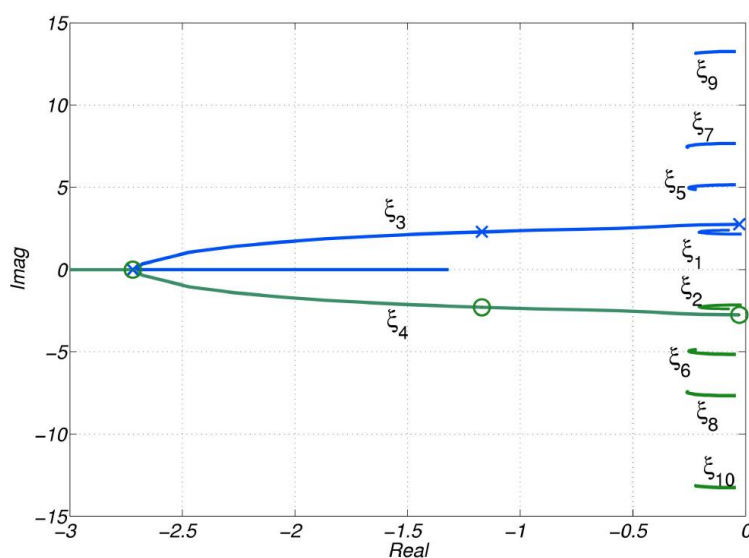
Jak bylo řečeno v úvodu, přítomnost tlumiče na konstrukci, což je u vysokých věží velmi častým případem, nás vede k nutnosti opuštění hypotézy o proporcionálním útlumu soustavy. Přestože ani konstrukce věže, složená z dílců s rozličnými vlastnostmi není proporcionálně

tlumená, t.j. útlum dříku není lineární kombinací hmotnosti a tuhosti, uvažovali jsme kvůli zjednodušení hodnotu součinitele poměrného ekvivalentního viskózního útlumu konstrukce $\zeta = 0,02$. Hodnota útlumu byla přibližně stanovena při dynamickém měření skutečné věže. Matici útlumu dříku stožáru jsme zvolili proporcionální matici hmotnosti. Pět základních tvarů kmitání je uvedeno na obr. 2. Zobecněné hmotnosti konstrukce pro prvý až pátý tvar kmitů vyjádřeny v procentech celkové hmotnosti věže jsou: $m_1 = 0,31\%$, $m_2 = 0,14\%$, $m_3 = 0,14\%$, $m_4 = 0,28\%$ respektive $m_5 = 0,48\%$, srovnej s M_j v rovnici (9).



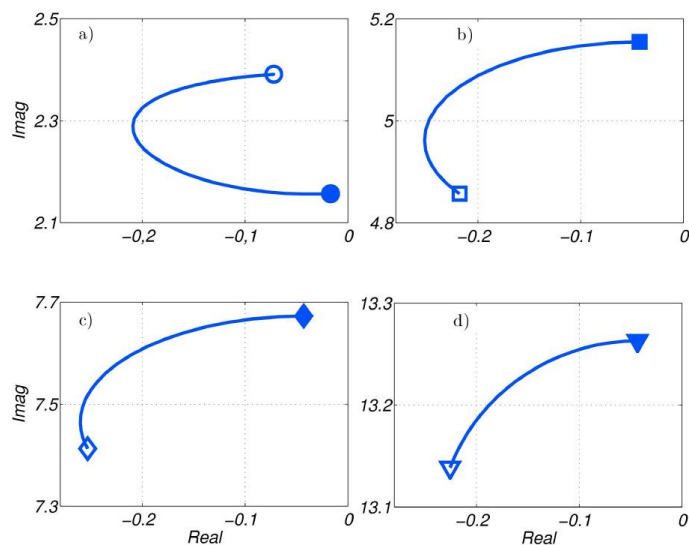
Obrázek 2: Pět prvních vlastních tvarů systému s absorbérem kmitů (1). Vlastní kruhové frekvence konstrukce jsou $\theta_1 = 2,157$, $\theta_2 = 2,75$, $\theta_3 = 5,16$, $\theta_4 = 7,67$ resp. $\theta_5 = 13,26$.

Složitost chování konstrukce s neproporcionálním útlumem demonstruje obr. 3 na kterém jsou zobrazeny závislosti prvních pěti dvojic komplexně sdružených hodnot vlastních čísel na hodnotě vnitřního tlumení ζ_d . Při zvyšujícím se útlumu dochází u jednoho, v tomto případě druhého, vlastního tvaru k postupnému vymizení imaginární složky vlastního čísla. Ostatní hodnoty vlastních čísel nejsou na změně vnitřního útlumu tlumiče příliš závislé.



Obrázek 3: Pět základních dvojic vlastních hodnot matice \mathbf{Q} jako funkce ζ_d v Gaussově rovině; hodnota imaginární složky druhé dvojice vlastních čísel se blíží k nule nejrychleji.

Dvojice vlastních čísel ($\xi_{1,2}$, $\xi_{5,6}$, $\xi_{7,8}$, $\xi_{9,10}$) matice \mathbf{Q} v závislosti na útlumu ζ_d jsou na obr. 4 zobrazeny ve zvětšeném měřítku pouze v horní polovině Gaussovy roviny. Charakter křivek je výsledkem vzájemné interakce vlastních tvarů kmitání.



Obrázek 4: Hodnoty vlastních čísel z horní poloviny Gaussovy roviny; a) - ξ_1 , b) - ξ_5 , c) - ξ_7 , d) - ξ_9 .

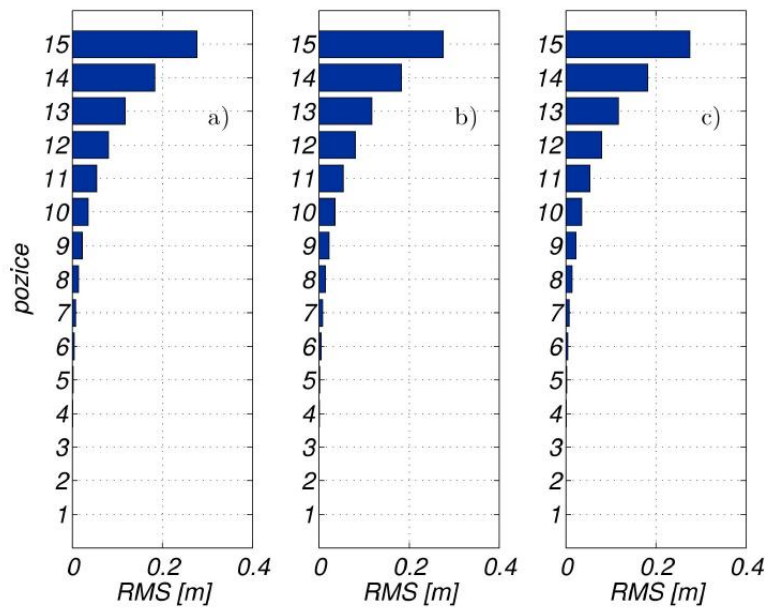
V tab. 2 jsou souhrnně uvedeny informace o změnách vlastních hodnot v závislosti na koeficientu ζ_d . Při zvyšování vnitřního útlumu se nejvíce mění druhá dvojice vlastních čísel $\xi_{3,4}$. Při hodnotě cca $\zeta_d = 0,98$ je imaginární složka vlastních čísel $\xi_{3,4}$ rovna nule.

Při každé změně tlumení byla vypočtena korelační matice a vyčísleny hodnoty střední kvadratické odchylky (RMS) výchylky v každém místě konstrukce podle vztahů (18) a (22). Konstrukce dřívku stožáru byla rovnoměrně rozdělena na čtrnáct částí s jednotnou délkou $13,5\text{ m}$. Výsledná hodnota RMS odezvy je ovlivněna tím, kolik tvarů kmitání ve výpočtu uvažujeme. To platí především u náhodného kmitání se stochastickou interakcí mezi tvary a u konstrukcí s neproporcionálním útlumem, kde můžeme očekávat interakci mechanickou.

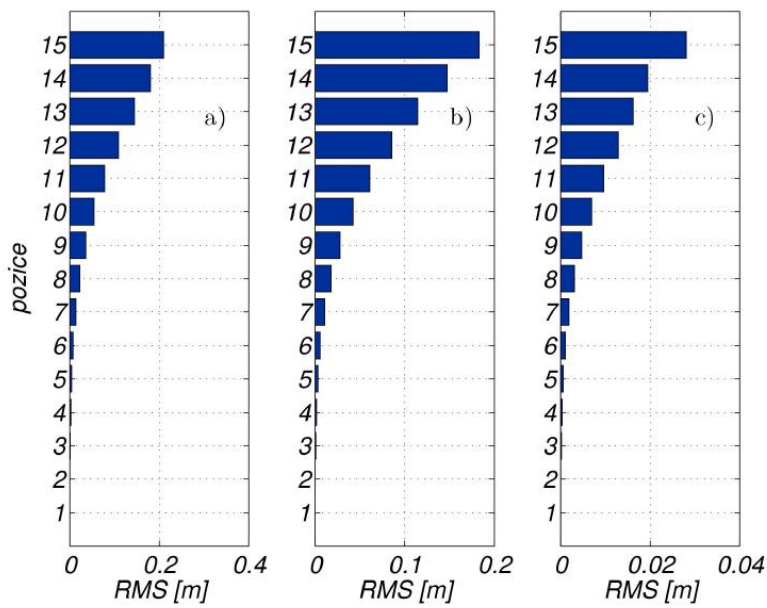
Tabulka 2: Hodnoty vlastních čísel v závislosti na hodnotě tlumícího členu ζ_d .

ζ_d	$\xi_{1,2}$	$\xi_{3,4}$	$\xi_{5,6}$	$\xi_{7,8}$	$\xi_{9,10}$
0,00	$-0,017 \pm i 2,157$	$-0,269 \pm i 2,751$	$-0,043 \pm i 5,155$	$-0,043 \pm i 7,672$	$-0,043 \pm i 13,26$
0,12	$-0,121 \pm i 2,175$	$-0,200 \pm i 2,724$	$-0,101 \pm i 5,147$	$-0,092 \pm i 7,667$	$-0,069 \pm i 13,26$
0,24	$-0,206 \pm i 2,266$	$-0,402 \pm i 2,599$	$-0,155 \pm i 5,124$	$-0,138 \pm i 7,651$	$-0,095 \pm i 13,26$
0,48	$-0,115 \pm i 2,386$	$-1,293 \pm i 2,239$	$-0,241 \pm i 5,025$	$-0,224 \pm i 7,579$	$-0,152 \pm i 13,23$
0,60	$-0,107 \pm i 2,385$	$-1,479 \pm i 2,141$	$-0,247 \pm i 5,003$	$-0,235 \pm i 7,562$	$-0,162 \pm i 13,22$
0,96	$-0,080 \pm i 2,390$	$-2,678 \pm i 0,338$	$-0,239 \pm i 4,897$	$-0,260 \pm i 7,463$	$-0,208 \pm i 13,17$

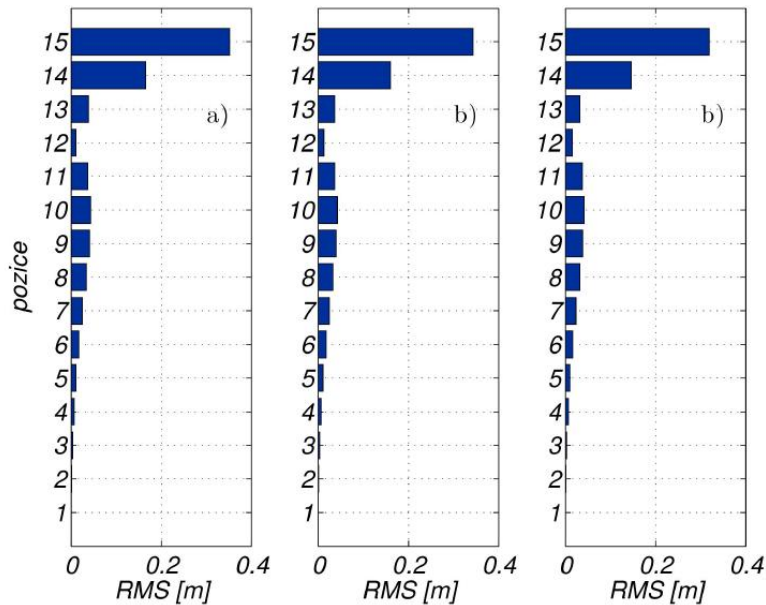
Výsledné střední kvadratické odchylky horizontálních kmitů po výšce konstrukce jsou vykresleny na obr. 5 - 7. Rozlišujeme tři případy podle počtu uvažovaných vlastních tvarů kmitání, přičemž jednotlivé grafy v každém z obrázků reprezentují různé hodnoty útlumu ζ_d .



Obrázek 5: Hodnota střední kvadratické odchylky (RMS) odezvy pro první vlastní tvar v závislosti na součiniteli útlumu ζ_d . a) - $\zeta_d = 0,06$, b) - $\zeta_d = 0,24$ a c) - $\zeta_d = 0,60$.

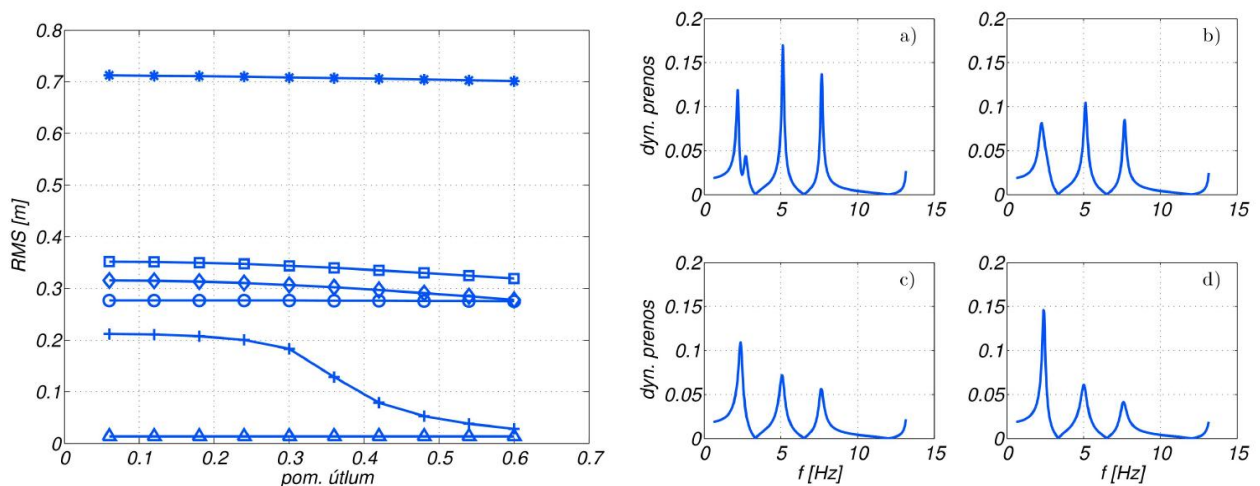


Obrázek 6: Hodnota střední kvadratické odchylky (RMS) odezvy pro prvé dva vlastní tvary v závislosti na součiniteli útlumu ζ_d . a) - $\zeta_d = 0,06$, b) - $\zeta_d = 0,24$ a c) - $\zeta_d = 0,60$.



Obrázek 7: Hodnota střední kvadratické odchylky (RMS) odezvy pro první tři vlastní tvary v závislosti na součiniteli útlumu ζ_d . a) - $\zeta_d = 0,06$, b) - $\zeta_d = 0,24$, c) - $\zeta_d = 0,60$.

Existuje patrný rozdíl mezi kmitáním konstrukce s tlumičem, která je buzena harmonicky a kmitáním s náhodným zatížením, které je korelováno po výšce konstrukce. V pravé části obr. 8 je uveden případ frekvenční odezvy stožáru na harmonické zatížení ve vrcholu. Účinek tlumení je zřejmý z porovnání hodnot. Při překročení určité hodnoty útlumu dochází k „uzamčení“ pohlcovače a kmitá pouze dřív věže s přidanou hmotou.



Obrázek 8: Vlevo: Účinnost tlumení na rozptyl odezvy na vrcholu stožáru v závislosti na počtu uvažovaných vlastních tvarů; \circ - základní (první) tvar, $+$ - dva tvary, \square - tři tvary, \diamond - čtyři tvary, $*$ - pět tvarů, \triangle - šest tvarů. Vpravo: Frekvenční přenosy systému buzeného harmonickou silou ve vrcholu v závislosti na hodnotě tlumení; a) - $\zeta_d = 0,06$, b) - $\zeta_d = 0,18$, c) - $\zeta_d = 0,368$, d) - $\zeta_d = 0,60$.

V levé části obr. 8 je zobrazena hodnota střední kvadratické odchylky odezvy (RMS) ve vrcholu konstrukce. Šest křivek představuje šest případů, ve kterých byly proveden rozvoj původní soustavy do příslušného počtu tvarů kmitání.

7. Závěr

Matematický model štíhlé vertikální konstrukce založený na soustavě jednorozměrných prvků se spojitě rozloženou hmotou a ohybovou tuhostí má řadu vlastností, kterými se odlišuje od modelů jiných typů. Nejpřirozenějším je srovnání s vlastnostmi modelu těžké konstrukce, jenž je vytvořen na základě soustředěných hmot či tuhých těles propojených nehmotnými pružinami a tlumícími členy.

Oba modely mají mnoho společných základních vlastností, které umožňují opustit řadu omezujících předpokladů neodpovídajících realitě. To se týká vlivu neproporcionálního tlumení konstrukce vybavené tlumičem, stochastické interakce vlastních tvarů (vektorů) kmitání zaničující exponenciálně s rostoucí vzdáleností bodů odezvy, prostorové korelace buzení i odezvy, atd. Na druhé straně se potvrdila v zobecněném měřítku řada heuristicky zavedených hypotéz v minulosti, jako např. gaussovská povaha odezvy, přijatelnost proporcionálního modelu na konstrukci bez tlumiče i v případě, že je sestavena z materiálů s různou mírou vnitřního útlumu. Vliv počátečních podmínek je krátkodobý a zaniká exponenciálně s rostoucím časem od zahájení buzení (stacionárního).

Předností modelu se spojitými prvky je analýza probíhající v zobecněných souřadnicích, které jsou blízké vlastním tvarům posuzované konstrukce. Energetická mohutnost jednotlivých vlastních funkcí obecně vzato klesá se vzrůstem jejich řádu. Z toho vyplývá možnost poměrně snadno omezit počet vlastních funkcí zahrnutých do výpočtu, což zejména u analýzy stochastického kmitání znamená citelné snížení pracnosti výpočtu. Výsledky jsou zároveň přehlednější a jejich rozbor je snáze proveditelný než v případě modelu se soustředěnými hmotami. Konvergence je zároveň mnohem rychlejší a vyššího typu.

Z praktického hlediska poskytují výsledky teoretické analýzy a numerického rozboru řadu důležitých poznatků. Konstrukce věží a stožárů jsou zatíženy význačnou dynamickou složkou větru jejíž rychlost má náhodný charakter v čase i po výšce konstrukce. Vzhledem k tomu, že konstrukce je téměř vždy vybavena tlumičem kmitání, je třeba ji pokládat za soustavu s výrazně neproporcionálním útlumem. Z těchto důvodů nelze tyto konstrukce navrhovat podle standardních postupů, ve kterých se berou v úvahu pouze nejnižší (nejčastěji první) tvary vlastního kmitání ve smyslu zobecněných souřadnic pohybu a navíc se zanedbává jejich jakákoli interakce. Takováto zjednodušení lze učinit jen v případě proporcionálního útlumu (konstrukce bez tlumiče) a deterministického buzení bez prostorové korelační struktury. Vzhledem ke vzájemné stochastické interakci a vzhledem k provázanosti vlivem neproporcionality je tedy nutné v praktických aplikacích pečlivě zvažovat participaci jednotlivých tvarů na výsledné odezvě.

Dodejme, že z kvantitativního rozboru vyplývá nutnost opatrně zacházet s předpokladem o lineárním vztahu mezi dynamickou složkou rychlosti větru a vyvolanou dynamickou složkou tlaku vyvozující samotné rozkmitání. Tento předpoklad je přijatelný v podmínkách volného terénu a nízké zástavby. V oblasti velkoměstského centra je velice sporný vzhledem k vysokému stupni turbulence, kdy amplitudy dynamické složky mohou být srovnatelné se složkou statickou.

8. Poděkování

Autoři děkují Grantové agentuře AVČR - A2071401, Grantové agentuře ČR - 103/06/0099, 103/05/2396 a výzkumnému záměru ÚTAM AV0 Z20710524, za jejichž podpory vznikla tato práce.

9. Literatura

- Bolotin, V.V. (1979) *Random vibrations of elastic systems* (in Russian). Nauka, Moscow.
- Davenport, A.G. (1967) The dependence of wind Loads on Meteorological parameters, In: *Proc. International Research Seminar, Wind Effects on Buildings and Structures*, Toronto Press, Toronto, Canada, pp. 19-83.
- Davenport, A.G. (1967a) Gust loading factor. In: *Jour. Struct. Div. ASCE*, 93, pp.11-34.
- Dyrbye, C., Hansen, S.O. (1996) *Wind loads on structures*. Wiley and Sons, Chichester.
- Fischer, O., Pirner, M. (1987) *Dynamika kotvenych stozaru*. Academia, Praha.
- Koloušek, V., Pirner, M., Fischer, O., Náprstek, J. (1983) *Wind Effects on Civil Engineering Structures*. Academia - Elsevier, Praha.
- Lancaster, P. (1969) *Theory of Matrices*. Academic Press, New York - London.
- Materazzi, A.L., Venanzi, I. (2005) Wind response of cable stayed masts. In: *Proc. The Fourth European & African Conference on Wind Engineering* (J. Náprstek, C.Fischer eds). ITAM ASCR, Prague, 10 pgs, CD ROM.
- Michlin, S.G. (1975) *Variacionnyje metody v matematičeskoj fizike*. GITTL, Moskva.
- Náprstek, J. (1975) On non-linear transfer between random variable velocity of fluid motion and frontal pressure on the bypassed cylindrical body. *Acta Technica ČSAV*, 4, pp.479-494.
- Náprstek, J., Pospíšil, S. (2006) Along wind random vibrations of a slender structure - modelling by continuous elements. In: *Proc. Engineering Mechanics 2006* (J. Náprstek, C.Fischer eds). ITAM ASCR, Prague, 8 pgs, CD ROM.
- Náprstek, J., Pospíšil, S. (2007) Along wind random vibrations of a structure with non-proportional damping. In: *Proc. 12th Int. Conf. Wind Engineering* (J.Cheung edt.). Monash University, Cairns (Australia), 2007, in print.
- Simiu, E., Scanlan, R.H. (1996) *Wind Effects on Structures. Fundamentals and Applications to Design*. J. Wiley, New York.