

TRANSIENT VIBRATION OF THIN RECTANGULAR VISCOELASTIC ORTHOTROPIC PLATE UNDER TRANSVERSE IMPULS LOADING

J. Soukup¹, J. Volek¹

Summary: *An analytical solution is derived from an approximation of the 2D thin plate model. At first approach the model is described by Kirchhoff and Rayleigh model, then by Timošenko Midlin model for orthotropic viscoelastic continuum defined by various model (at present by Voigt-Kelvin, later by Zener-standard and heredital materials).*

1. Úvod

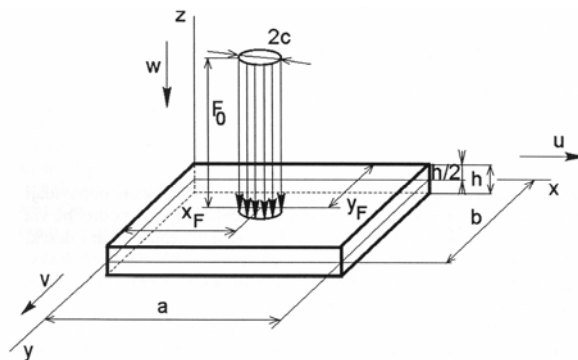
Řešení přetvoření desek trvá již více než 200 let. Byla publikována řada studií a monografií, kmitání desek je stále téma, řeší se různé úlohy, je prováděna analýza různých vlivů a jsou užívány různé metody řešení. Nejpropracovanější je řešení nestacionárního kmitání elastických izotropních desek, řešení elastických neizotropních desek je omezeno na několik studií. Řešení nestacionárního kmitání viskoelastických desek, započaté v první polovině minulého století je věnováno podstatně méně prací. Přehled těchto řešení a významný příspěvek k němu podal Adámek, 2004. Řešení viskoelastických neizotropních je v počátcích. Nestacionární kmitání elastické ortotropní desky podal např. Huffington a Hoppmann (1958), řešení viskoelastické ortotropní desky nebylo v literatuře nalezeno.

Príspevek je součástí vyšetřování přechodového kmitání tuhé desky při příčném impulsním Po předchozím řešení kmitání elastické izotropní a ortotropní desky a viskoelastické izotropní desky, je v plánovaném programu řešení navrženo řešení kmitání desky viskoelastické, definované různými reologickými modely, ortotropní (speciální i obecná ortotropie) pro různé výpočtové 2D modely. V tomto příspěvku je podáno řešení kmitání Voigt-Kelvinova modelu desky při speciální ortotropii. Cílem studie je porovnání a posouzení uvedeného 2D řešení s numerickým 3D řešením MKP a experimentálním řešením. Schéma řešené úlohy je znázorněno na obr. 1. Výchozí předpoklady byly uvedeny v předchozích příspěvcích (např. Volek & all, 2004). Reologické vlastnosti materiálu desky jsou charakterizované zobecněným Hookovým zákonem

$$\sigma_i = c_{ij}\varepsilon_j + d_{ij}\dot{\varepsilon}_j, \quad (1)$$

kde σ_i - vektor obsahující složky tenzoru napětí σ_{kl} , c_{ij} - matice elastických koeficientů, d_{ij} - matice viskózních koeficientů, ε_j - vektor obsahující složky tenzoru přetvoření ε_{kl} , $\dot{\varepsilon}_j$ - vektor obsahující složky tenzoru rychlostí přetvoření $\dot{\varepsilon}_{kl}$.

¹ Doc. Ing. Josef Soukup, CSc., PhDr. Ing. Jan Volek: Fakulta výrobních technologií a managementu, Univerzita J. E. Purkyně v Ústí n. L., Na Okraji 1001, 400 96 Ústí n. L., tel.: +420 475 285 525, e-mail: soukupi@fvmtm.ujep.cz

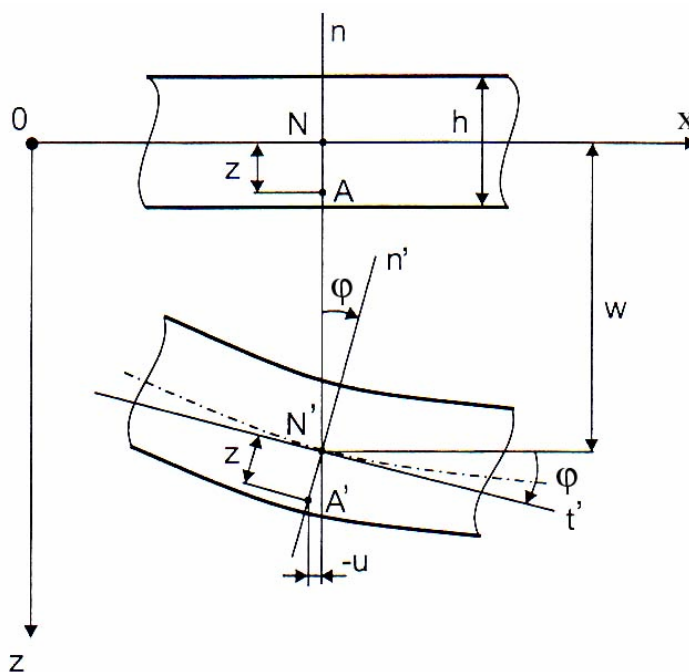


Obr.1 Schéma řešené desky

Pro uvažovaný model viskoelastického tělesa Voigt-Kelvinův (při vysokých frekvencích přechodových jevů vykazuje nekonečně velkou fázovou rychlost vlny) při speciální ortotropii jsou složky napětí dány vztahy

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_x}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}} [\varepsilon_x + \mu_{xy}\varepsilon_y] + \frac{\lambda_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \left[\frac{d\varepsilon_x}{dt} + \nu_{xy} \frac{d\varepsilon_y}{dt} \right], \\ \sigma_y &= \frac{E_y}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}} [\varepsilon_y + \mu_{yx}\varepsilon_x] + \frac{\lambda_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \left[\frac{d\varepsilon_y}{dt} + \nu_{yx} \frac{d\varepsilon_x}{dt} \right], \\ \tau_{xy} &= G_{xy}\gamma_{xy} + \frac{\eta d\gamma_{xy}}{dt},\end{aligned}\quad (2)$$

kde λ - součinitel (tzv. Troutorův) normální viskozity, η - koeficient (součinitel) smykové viskozity, ν - Poissonovo číslo viskózní kapaliny.



Obr. 2 Znázornění průhybu desky v řezu rovinou x, z

Pro uvažovaný výpočtový 2D model desky podle Kirchhoffovy teorie ($J_g = 0$) a Raileighovy korekci ($J_g \neq 0$), lze odvodit přetvoření jako funkce posuvů ve směru os (obr. 2)

$$\begin{aligned}
u &= u(x,y,z,t), & v &= v(x,y,z,t), & w &= w(x,y,t), \\
u &= -z \frac{\partial w}{\partial x}, & v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}, \\
\varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \gamma_{xy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},
\end{aligned} \tag{3}$$

kde u, v, w jsou posuvy ve směru os x, y, z , ε_x – relativní posuv ve směru osy x , ε_y – relativní posuv ve směru osy y , γ_{xy} – zkos.

Potom lze i složky napětí vyjádřit jako funkce posuvu w

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{z.E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{\lambda_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \\
\sigma_y &= -\frac{z.E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{\lambda_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\
\tau_{xy} &= -2z \left(G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \eta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).
\end{aligned} \tag{3a}$$

Pohybové rovnice elementu desky potom jsou

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p(x,y;t) &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
q_x - \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} &= J_g \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, & q_y - \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} &= J_g \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}, \\
J_g &= \frac{\rho.h^3}{12}, & \varphi_x &= \frac{\partial w}{\partial x}, & \varphi_y &= \frac{\partial w}{\partial y},
\end{aligned} \tag{4}$$

kde měrné ohybové momenty a měrný kroučící moment jsou dány vztahy

$$\begin{aligned}
m_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz = -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D_{\lambda_x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\
m_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz = -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - D_{\lambda_y} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
m_{xy} = m_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz = -2 \left(D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_y \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right),
\end{aligned} \tag{5}$$

kde moduly tuhosti jsou

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}, \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}, \quad D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12},$$

$$D_{\lambda x} = \frac{\lambda_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}, \quad D_{xy} = \frac{\lambda_y}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}, \quad D_\eta = \frac{\eta h^3}{12}.$$

Tyto moduly tuhosti charakterizují tuhost pružné, respektive viskosní složky desky. Z rovnic (4) a (5) lze odvodit rovnici příčného kmitání tenké viskelastické, ortotropní desky

$$\left(D_x + D_{\lambda x} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(D_y + D_{\lambda y} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \left[2D_{xy} + D_\mu + (2D_\eta + D_\nu) \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho h w - J_g \nabla^2 w) = p(x, y, t) \quad (6)$$

$$\text{kde } D_\mu = D_x \mu_{yx} = D_y \mu_{xy}, \quad D_\nu = D_{\lambda x} \nu_{yx} = D_{\lambda y} \nu_{xy}.$$

Aplikací Fourierovy metody lze řešení rovnice (6) s ohledem na okrajové podmínky prostě uložené desky hledat ve tvaru

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \cdot \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \quad (7)$$

$$\text{kde } \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}.$$

Dosazením vztahu (7) do rovnice (6) a po provedení skalárního součinu dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} \psi_{mn} \cdot \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} + [D_{\lambda x} \alpha_n^4 + D_{\lambda y} \beta_m^4 + (2D_\eta + D_\nu) \alpha_n^2 \beta_m^2] \frac{dW_{mn}(t)}{dt} + \\ + [D_x \alpha_n^4 + D_y \beta_m^4 + 2 \cdot (2D_{xy} + D_\mu) \alpha_n^2 \beta_m^2] W_{mn}(t) = \\ = \frac{\int_0^a \int_0^b p(x, y, t) \cdot \sin(\alpha_n x) \cdot \sin(\beta_m y) \cdot dx dy}{\int_0^a \int_0^b [\sin(\alpha_n x) \cdot \sin(\beta_m y)]^2 dx dy} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{kde } \psi_{mn} = \rho h + J_g (\alpha_n^2 + \beta_m^2).$$

Pravou stranu rovnice (8) je možno upravit jestliže se vnější budící zatížení vyjádří vztahem

$$p(x, y, t) = F_0 \cdot X_F(x) \cdot Y_F(y) \cdot T_F(t)$$

kde F_0 je maximální hodnota zatížení, $X_F(x)$, $Y_F(y)$ jsou funkce určující rozložení budícího spojitého zatížení na horní ploše a $T_F(t)$ je funkce určující průběh budícího zatížení v čase.

Potom

$$\int_0^a \int_0^b p(x, y, t) \cdot \sin(\alpha_n x) \cdot \sin(\beta_m y) \cdot dx dy = F_0 \cdot T_F(t) \cdot p_{mn},$$

kde bezrozměrný parametr p_{mn} je dán vztahem

$$p_{mn} = \int_0^a \int_0^b X_F(x) \cdot Y_F(y) \cdot \sin(\alpha_n x) \cdot \sin(\beta_m y) \cdot dx dy.$$

Dále platí

$$\int_0^a \int_0^b [\sin(\alpha_n \cdot x) \cdot \sin(\beta_m \cdot y)]^2 \cdot dx dy = \frac{a \cdot b}{4}.$$

Řešení rovnice (8) je možno zapsat ve tvaru

$$W_{mn}(t) = \frac{4F_0}{a \cdot b} \frac{P_{mn}}{\psi_{mn} \cdot \omega_{mn}} \int_0^t T_F(\tau) e^{-\delta_{mn}(t-\tau)} \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau,$$

kde součinitel tlumení je

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot \psi_{mn}} [D_{\lambda x} \alpha_n^4 + D_{\lambda y} \beta_m^4 + (2D_\eta + D_\nu) \cdot \alpha_n^2 \cdot \beta_m^2],$$

netlumená kruhová frekvence

$$\Omega_{mn} = \frac{1}{\psi_{mn}} [D_x \alpha_n^4 + D_y \beta_m^4 + 2 \cdot (2D_{xy} + D_\mu) \cdot \alpha_n^2 \cdot \beta_m^2]$$

a tlumená kruhová frekvence

$$\omega_{mn}^2 = \Omega_{mn}^2 - \delta_{mn}^2.$$

Vertikální posuv desky

$$w(x; y; t) = \frac{F_0}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_{\min}}{\psi_{\min} \omega_{\min}} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) T(t) \quad (9)$$

kde

$$T(t) = \int_0^t T_F(\tau) e^{-\delta_{mn}(t-\tau)} \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau$$

Dosazením vztahu (9) do vztahu (3), respektive (3a) lze určit časový průběh ostatních hledaných veličin.

Poděkování

Tato práce vznikla za podpory grantu GA ČR 101/06/0946.

Literatura

- Volek, J., (1989): Přechodové dynamické chování tenkých viskoelastických desek. In.: *Sb. IV. konferencia Numerické metody v mechanice*. Vrátná dolina, str. 324-329.
- Volek, J., (1990): Ráz a přenos impulsu v soustavě elastických a viskoelastických jedno- a dvourozměrných těles. Výzkumná zpráva PVT Litoměřice.
- Soukup, J., Volek, J., (2003): Transversal impact of elastic rod on thin elastic isotropic and orthotropic rectangular plate. In.: *CD-ROM Proc. of the National Conference with International Participation Engineering Mechanics 2003*, Svratka, 2003, extended abstracts proc. pp. 384-385.
- Volek, J., Soukup, J., Skočilasová, B., (2004) Odvození vztahů pro posuvy, rychlosti a napětí v tenké ortotropní desce s příčně působícím zatížením na jedné ploše II. *Bulletin*

vědeckých, výzkumných a pedagogických prací ÚTRV za r. 2003. ÚTRV UJEP Ústí n. L., 2004, str. 103-110

Adámek, V., (2004): Analytické numerické a experimentální vyšetřování nestacionární napjatosti tenké viskoelastické desky. *Dizertační práce*. FAV ZČU Plzeň, 2004.

Huffington, N., J., Hoppmann, W., J., (1958): On the transverse vibrations of rectangular orthotropic bases. *Journal Applied Mechanics*, vol. 25, 1958, pp. 389-395.