



ANALYSIS OF ANGULAR VIBRATION MEASUREMENT ERRORS

J. Tůma^{*}

Summary: *The paper deals with angular vibration measurements using incremental rotation encoders. The main topic is focused at errors due to the impulse non-uniform distribution versus rotation angle of encoders. The paper introduction part is reviewing the sensors for angular vibration. The following part is focused at the hypothesis on error statistical properties. The main part of the paper is a comparison of the phase of two strings of impulses generated by two encoders rotating at the same angular frequency because both the encoders are mounted on a shaft. The finishing part of paper demonstrates the measurement of the rotation uniformity in angular velocity using the encoder and the laser angular vibrometer of the Doppler type.*

1. Úvod

Hlavním zdrojem kmitání rotačních strojů je nejen nevyváženost rotorů a nesouosost ustavení soustrojí, ale také úhlové kmity, jejichž přesnost měření je tématem příspěvku. Úhlové kmity vznikají v důsledku časově proměnlivého hnacího nebo brzdícího momentu. Hnací moment pohonu je principiálně proměnlivý s úhlem otočení, což je zřejmé u pístových motorů. U ozubených soukolí je příčinou dynamických sil periodicky proměnlivá kontaktní tuhost zabírajících zubů, což způsobí samobuzené kmity. Výhodou měření úhlových kmitů za rotace je to, že se lze přiblížit k místu vzniku vibrací a tím i hluku. Je vždy výhodné zkoumat vibrace a hluk u samotného zdroje bez zkreslujících přenosových cest k vybranému místu kde se měří vibrace nebo hluk. Stroje pracují obvykle buď na ustálených otáčkách nebo se po startu rozbíhají, popřípadě po odstavení dobíhají. Tzv. ustálený stav nikdy neznamená, že otáčky jsou ideálně stálé. Vždy dochází k jejich pomalým změnám a nebo dokonce jejich okamžitá hodnota kolísá v jistých mezích, tj. jsou přítomny úhlové kmity. Úhlové kmity za rozběhu nebo doběhu nejsou předmětem zvláštní pozornosti, protože tento režim je obvykle krátkodobý ve srovnání s běžnými režimy provozu stroje.

Jako každé měření je také měření úhlových kmitů zatíženo chybou, kterou je třeba odhadnout. V referátu bude analyzována chyba měření založeného na použití úhlových snímačů otočení, tzv. IRC – Incremental Rotary Encoder.

2. Přehled snímačů pro měření úhlových kmitů

^{*} Prof. Ing. Jiří Tůma, CSc.: Fakulta strojní, VŠB – Technická univerzita Ostrava; 17. listopadu 15; 708 33 Ostrava; tel.: +420 59 699 3482, fax: +420 59 699 3482; e-mail: jiri.tuma@vsb.cz

V minulosti se používaly k měření úhlových kmitů hlavně torziografy se setrvačnou hmotou, která je svázána torzní pružinou s hřídeli, jejíž nerovnoměrné otáčky bylo třeba měřit. Vzájemné torzní posuny mezi hřídeli a zmíněnou setrvačnou hmotou se měří a výsledkem měření je signál charakterizující úhlové kmity. Dalším způsobem měření úhlových kmitů jsou tangenciálně montované akcelerometry na rotoru. Oba uvedené způsoby měření vyžadují přenést signál z rotoru na stacionární analyzátor. K přenosu lze použít stírací kontakty na kroužcích nebo bezdrátový přenos. Frekvenční rozsah tohoto měření je 3 až 1000 Hz.

Pokrokem v měření úhlových kmitů jsou dopplerovské lasery se dvěma paralelními paprsky koherentního světla, které se odráží od rotujícího povrchu. Rozdíl frekvence odražených světelných paprsků je úměrný úhlové rychlosti otáčení. Výhodou tohoto způsobu měření je necitlivost na přímočaré pohyby osy rotace a na nekruhovitost rotující hřídele. Na trhu jsou k dispozici zařízení, které dodávají firmy Brüel & Kjær nebo Polytec. Například zařízení laserový úhlový vibrometr od firmy BK typ 2523 má následující technické parametry:

- Zdroj záření Ga-Al-As dioda produkující neviditelné světlo o vlnové délce 780 nm
- Měřicí rozsah 10, 100, 1000, 100000/s
- Frekvenční rozsah 0.3 až 1000 Hz
- Přesnost měření $\pm 1\%$ celého rozsahu.

Poslední zde popisovaná metoda měření úhlových kmitů je založena na měření okamžité frekvence impulsního signálu, který je generován například inkrementálním snímačem otočení nebo přerušováním světelného paprsku kódovacím kotoučem a nebo indukčním snímačem citlivým na průchod výstupků (zubů) nebo magnetů na rotoru.

Inkrementální snímače prodává například firma Heidenhain. Předmětem naší pozornosti je typ ERN 460-500 type, popřípadě ERN 460-1024 type. První snímač generuje 500 impulsů za otáčku a druhý až 1024. Tyto impulsy se generují optickým zařízením s kotoučem, který je opatřen ryskami. Pro účel analýzy přesnosti těchto snímačů je však rozhodující impulsní signál na výstupu. Existují snímače, které produkují několik tisíc impulsů za otáčku. Avšak pro počty nad deset tisíc jsou výstupní impulsy interpolovány elektronickými obvody, tj. skutečný počet rysek je několikrát menší. Vysoký počet impulsů není pro měření úhlových kmitů výhodný, protože vyžaduje vysokou vzorkovací frekvenci. V katalogu uvedené firmy se uvádí, že přesnost rozložení rysek na kotouči s optickou mřížkou je menší než dvacetina rozteče rysek.

3. Chyby úhlových snímačů otočení

Pro odvození zákonitosti chyb úhlového snímače otočení bude formulována následující hypotéza. Necht' jsou chyby v rozdělení generovaných impulsů označeny podle obr. 1. Za chybu je tedy považována odchylka skutečné polohy impulsu od teoreticky správné polohy, která je dána rozdělením jedné kompletní otáčky na počet dílů odpovídajících počtu impulsů.

Necht' je také předpokládáno, že střední hodnota chyby polohy impulsu pro $i = 1, \dots, N$ je nulová, tj.

$$E\{\varepsilon_i\} = 0, \quad (1)$$

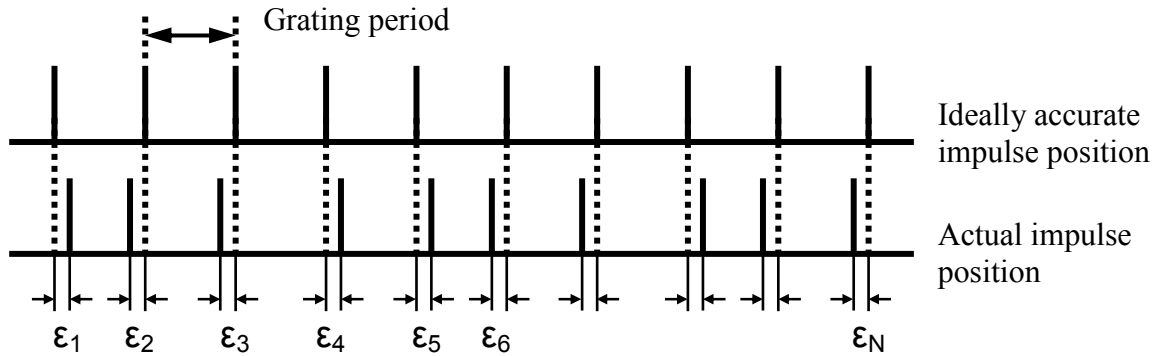
a rozptyl chyb je roven konstantě, přičemž velikost této konstanty nezávisí na pořadí impulsu

$$E\{\varepsilon_i^2\} = \sigma_\varepsilon^2, \quad (2)$$

Jestliže je celkový počet impulsů za otáčku roven N , pak počet impulsů, které odpovídají otočení snímače typu IRC o zlomek otáčky $1/ord$, je dán vztahem

$$n = N/ord, \quad (3)$$

Veličina ord odpovídá počtu úseků, na které lze rozdělit dobu otočení snímače, resp. jeho kotouče s optickou mřížkou.



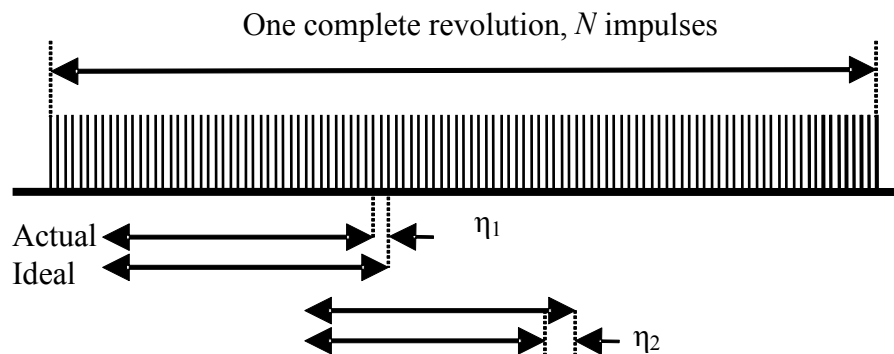
Obr. 1 Označení chyb v rozložení impulsů

Kromě indikace otočení o jeden impuls je snímač typu IRC používán také k odměřování otočení o obecně n impulsů. Celková chyba indikace tohoto otočení je dána součtem jednotlivých chyb poloh impulsů. Tato chyba bude označena jako kumulovaná. Význam kumulované chyby pro dva úseky o shodném počtu impulsů je znázorněn na obr. 2. Velikost této chyby se vypočítá podle vzorce

$$\eta_i = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{i+k}. \quad (4)$$

Střední hodnota kumulované chyby je vzhledem k předpokladu (1) také nulová, platí

$$E\{\eta_i\} = 0. \quad (5)$$



Obr. 2 Kumulovaná chyba v rozložení impulsů

Výpočet rozptylu závisí na tom, zda jsou jednotlivé chyby vzájemně nezávislé náhodné veličiny. Pro případ, že chyby poloh impulsů jako náhodné veličiny budou nezávislé (střední hodnota jejich součinu bude rovna součinu středních hodnot obou chyb) je rozptyl kumulované chyby dán vzorcem, ve kterém bylo využito vzorců (2) a (3)

$$\sigma_{\eta}^2 = E\{\eta_i^2\} = n\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 N/\text{ord} . \quad (6)$$

Směrodatná odchylka kumulované chyby je odmocninou rozptylu

$$\sigma_{\eta} = \sigma_{\varepsilon} \sqrt{N/\text{ord}} . \quad (7)$$

Za předpokladu nezávislosti chyb polohy impulsů lze tvrdit, že směrodatná odchylka kumulované chyby na úseku, který odpovídá rozdělení otáčky na počet ord úseků, je nepřímo úměrná převrácené hodnotě odmocniny zmíněného počtu úseků. To znamená, že při zvětšení počtu úseků stokrát klesne kumulovaná chyba desetkrát. Veličina ord odpovídá například počtu zubů ozubeného kola, u kterého je žádoucí měřit časový průběh úhlu otočení v rozsahu jedné zubové rozteče.

Jestliže předpoklad nezávislosti chyb nebude platit, pak tato nepřímá úměra mezi velikostí kumulované chyby a velikostí úseku otočení snímače typu IRC neplatí. Čtverec kumulované chyby je dán vzorcem

$$\eta_i^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{i+k} \right)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{i+k}^2 + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} \varepsilon_{i+m} \varepsilon_{i+k} . \quad (8)$$

K výpočtu střední hodnoty čtverce kumulované chyby je třeba znát střední hodnotu součinu dvou různých chyb. Nechť tato střední hodnota je dána vzorcem

$$E\{\varepsilon_{i+m} \varepsilon_{i+k}\} = r^{|m-k|} \sigma_{\varepsilon}^2 . \quad (9)$$

kde r je koeficient korelace mezi chybami polohy sousedních impulsů, jehož hodnota je z intervalu od -1 do +1. Pro impulsy vzdálené o absolutní hodnotu rozdílu $m - k$ je koeficient korelace roven mocnině o velikosti této vzdálenosti. Vzhledem k tomu, že koeficient korelace je menší než jedna, výsledný koeficient korelace se zmenšuje s rostoucí vzdáleností impulsů, mezi kterými se popisuje vzájemná závislost chyb polohy. Rozptyl kumulované chyby je pro tento předpoklad dán vzorcem

$$\sigma_{\eta}^2 = E\{\eta_i^2\} = \sum_{k=0}^{n-1} E\{\varepsilon_{i+k}^2\} + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} E\{\varepsilon_{i+m} \varepsilon_{i+k}\} = \sigma_{\varepsilon}^2 \left(n + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} r^{|m-k|} \right) . \quad (10)$$

Po úpravách platí

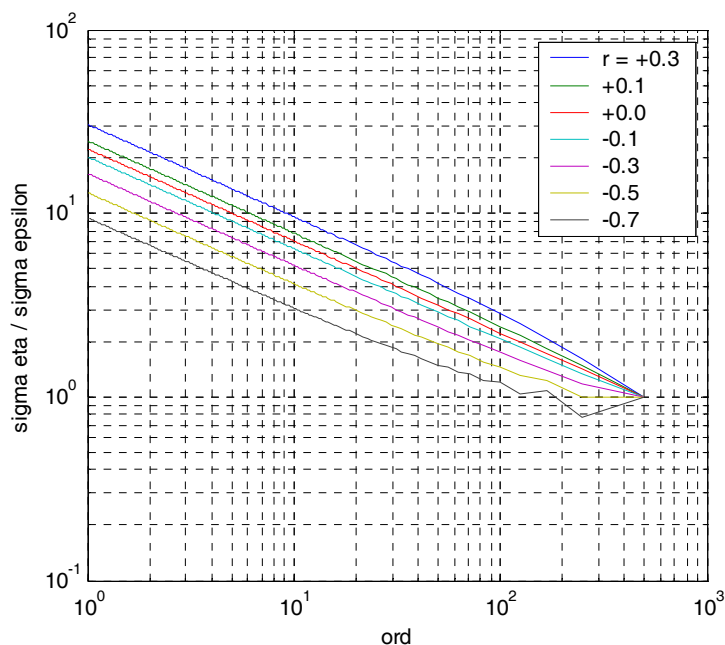
$$\sigma_{\eta}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 \left(n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) r^k \right) . \quad (11)$$

Vzorec (11) lze upravit využitím vzorců pro součet konečné geometrické řady do tvaru

$$\sigma_{\eta}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 \left(n + 2 \left(nr \frac{1-r^{n-1}}{1-r} - r \frac{d}{dr} \left(r \frac{1-r^{n-1}}{1-r} \right) \right) \right) . \quad (12)$$

Závislost podílu směrodatné odchylky kumulované chyby k směrodatné odchylce chyby polohy impulsů na počtu úseků ord , ze kterých se skládá jedná otáčka, a parametru r je znázorněna na obr. 3. Kumulovaná chyba klesá se zvětšujícím se počtem úseků otáčky a klesá také se zmenšováním koeficientu korelace z kladných hodnot k záporným hodnotám. Pokles

směrodatné odchytky je desetinásobný při zvětšení *ord* stokrát, tj. o dekádu (20 dB) na dvě dekády zvětšení frekvence.

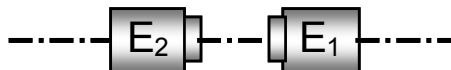


Obr. 3 Závislost směrodatné odchytky kumulované chyby v rozložení impulsů na počtu úseků *ord*, ze kterých se skládá jedná otáčka, a parametru *r*

Jak již bylo uvedeno, je chyba polohy impulsů rovna dvacetině vzdálenosti mezi impulsy, tj. 0,036 úhlového stupně. Jestliže by se předpokládalo, že rozsah možných chyb odpovídá šesti směrodatným odchytkám, pak je směrodatná odchytky chyby 0,006 úhlového stupně. Experimentální měření však ukazují asi šedesátkrát menší hodnotu chyby polohy impulsů na desetinu otáčky. Katalogový údaj zahrnuje zřejmě systematickou a náhodnou složku dohromady. Pod označením systematická chyba je třeba rozumět chybu za otočení o polovinu úplné otáčky.

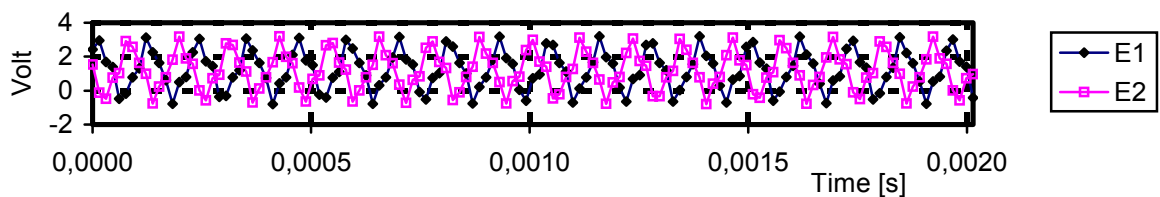
4. Měření chyby úhlových snímačů otočení

V běžných podmínkách školní laboratoře lze chybu snímače typu IRC vyhodnotit jen na základě rozdílů údajů dvou shodných snímačů. K tomuto účelu byly namontovány dva snímače Heidenhain typu ERN 460-500 s 500 impulsy na otáčku na společnou hřídel (obr. 4) a oba výstupní signály, označené E1 a E2, byly souběžně zaznamenány.



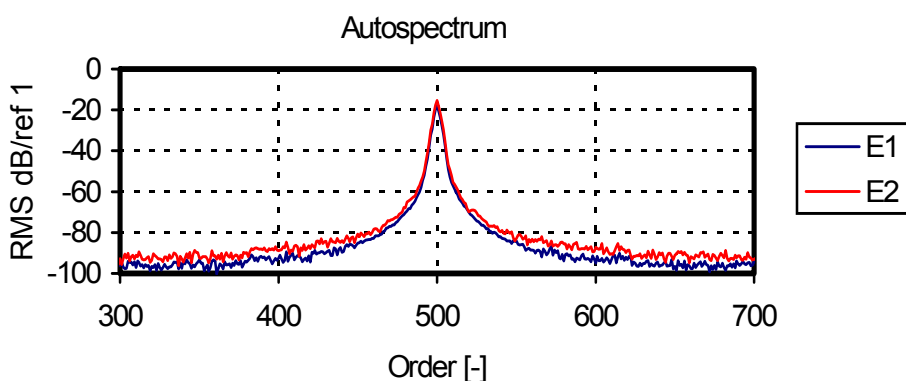
Obr. 4 Snímače typu IRC pro testování jejich přesnosti

Výstupní signál byl zpracován metodou fázové demodulace, která byla již mnohokrát popsána, viz např. [1, 2, 3]. Část sekundového záznamu impulsního signálu je znázorněna na obr. 5. Vzorkovací frekvence byla 65536 Hz. Vlivem chyb poloh impulsů a společně s nerovnoměrností otáčení dochází k fázové modulaci generovaných impulsů. Složka modulačního signálu z důvodu fázové modulace je u obou impulsních signálů totožná. Vzájemným odečtením obou fází se tedy vyruší. Chyby v poloze impulsů jsou však nezávislé.



Obr. 5 Záznam impulsního signálu ze snímačů E1 a E2

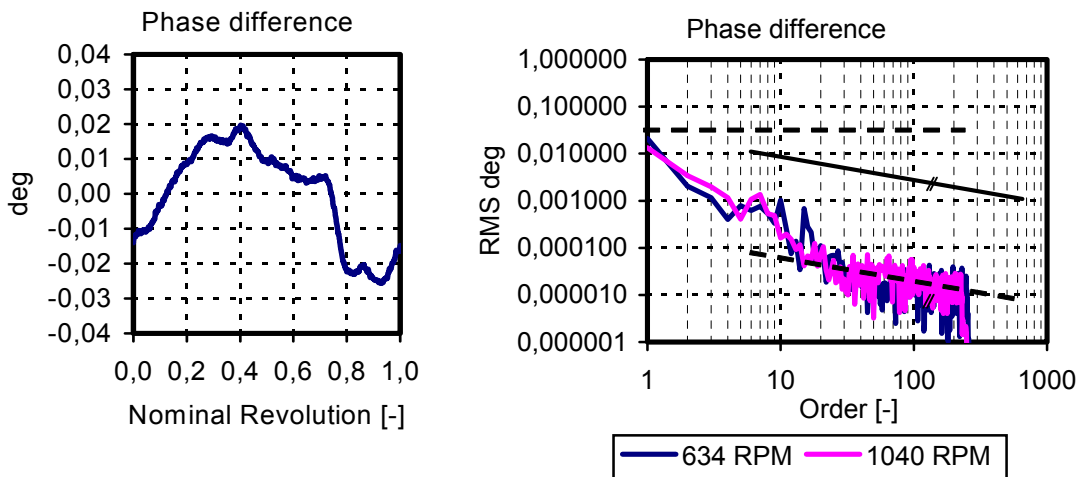
Frekvenční spektrum v řádech (*order*) je znázorněno na obr. 6. Údaj *order* nebo zkráceně *ord* má totožný význam jako ve vzorci (3). Tato bezrozměrná frekvence představuje násobek základní frekvence otáčení. Spektrum je průměrem několika spekter, které mohly být vypočteny ze sekundového záznamu bez překrytí bloků pro výpočet FFT, které odpovídají jedné otáčce.



Obr. 6 Frekvenční spektrum impulsního signálu ze snímačů E1 a E2

Vyhodnocení rozdílu fází (úhlů) otočení určených fázovou demodulací fázově modulovaného impulsního signálu je v levé části obr. 7. V pravé části tohoto obr. je frekvenční spektrum rozdílu fází. Ve srovnání s výše spočteným odhadem chyby maximální snímače podle katalogu je amplituda složky chyby o frekvenci otáček rovna této maximální chybě. Frekvenční spektrum chyb reprezentuje rozklad jedné periody měření, což je jedna otáčka, na harmonické složky. Nejnižší násobky mají vysokou amplitudu chyby. Kdyby byly oba snímače vzájemně pootočený, pak bychom získali jiné výsledky. Pro frekvence např. aspoň desetinasobku frekvence otáček již bude závislost na vzájemném pootočení snímačů nevýznamná.

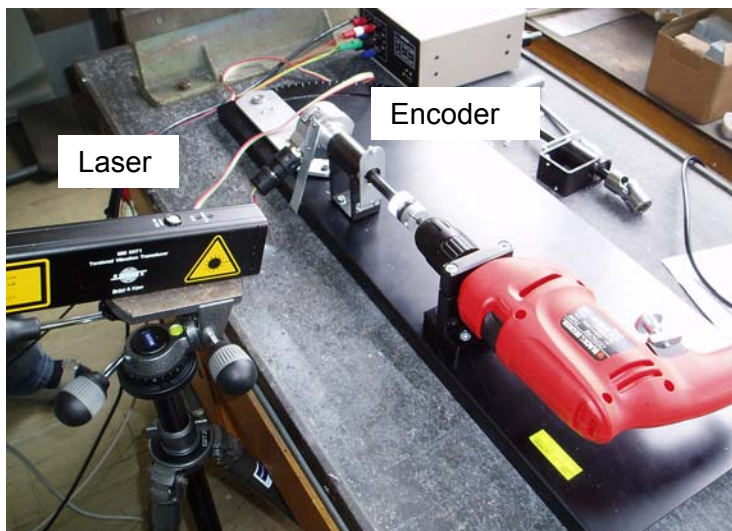
Ve frekvenčním spektru je vyznačena katalogová chyba a dále směr, který odpovídá poklesu chyby desetkrát při stonásobném zvýšení frekvence v *order*. Tento sklon vysvětluje výpočet kumulované chyby v předchozí kapitole. Frekvenční analýza rozdílu fází a odhad velikosti kumulované chyby jsou rozdílné údaje. Vzájemná souvislost platí jen pro tendence změny velikosti chyby v závislosti na *ord(er)*, což je číselně shodná veličina, která udává počet úseků, na které je jedno otočení snímače rozděleno. Shodu v tendencích lze potvrdit jen pro *order* větší než asi 20. S chybou menší než desetina tisícin stupně lze měřit například polohu ozubených kol s více než 20 zuby.



Obr. 7 Časový průběh rozdílu fází a jejich frekvenční spektrum (frekvenční spektrum je vykresleno pro dvě velikosti otáček a to 634 a 1040 za minutu)

5. Příklad měření rovnoměrnosti otáčení snímačem typu IRC a jeho porovnání s laserem

K testování metod měření úhlových kmitů a vlastností snímačů typu IRC byla použita ruční vrtačka s regulovatelnými otáčkami, viz. obr. 8.



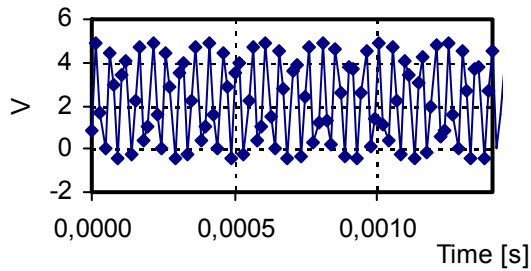
Obr. 8 Měření okamžité úhlové rychlosti ruční vrtačky

Otáčky upínací hlavy byly snímány laserovým úhlovým vibrometrem BK 2523 a snímačem IRC typu ERN 460-1024 od firmy Heidenhain, který generoval 1024 impulsů za otáčku. Vzorkovací frekvence impulsního signálu a výstupu laseru byla u tohoto ukázkového měření 65536 Hz. Naměřený impulsní signál je na obr. 9 a příslušné frekvenční spektrum je na obr. 10.

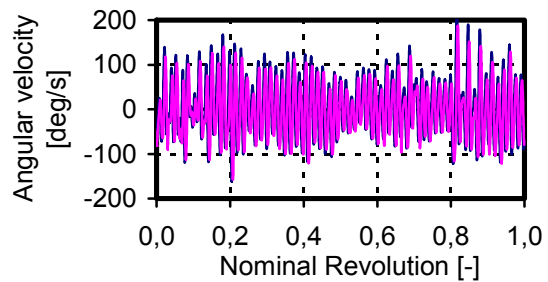
Na obr. 11 a 12 jsou časové průběhy okamžité úhlové rychlosti oběma způsoby měření. Signál z laseru lze do grafu použít přímo, zatímco signál po fázové demodulaci je třeba dále derivovat podle času, protože výstupem fázové demodulace je časový průběh kolísání úhlu otočení. K derivaci je použit FIR filtr, jehož frekvenční charakteristika je dána výrazem $j\omega$, což znamená, že modul přenosové funkce je lineárně závislý na frekvenci. Protože frekvenční rozsah laserového vibrometru je jen do 1000 Hz, stačí derivovat výsledek fázové demodulace také ve frekvenčním pásmu jen do frekvence 1000 Hz.

Derivační filtr proto složky spektra nad 1000 Hz potlačuje a tím je také redukuje vysokofrekvenční šum. Impulsní charakteristika číslicového diferenciátoru je na obr. 13 a frekvenční charakteristika na obr. 14. Frekvenční charakteristika je kreslena v logaritmických souřadnicích. Řád diferenciátoru je 160 a řád Hilbert transformeru je také 160, proto každý filtr zpožďuje o 80 vzorků, tj. celkem o 160 vzorků. Pro danou vzorkovací frekvenci je zpoždění signálu po fázové demodulaci o 2,44 ms oproti signálu z laseru.

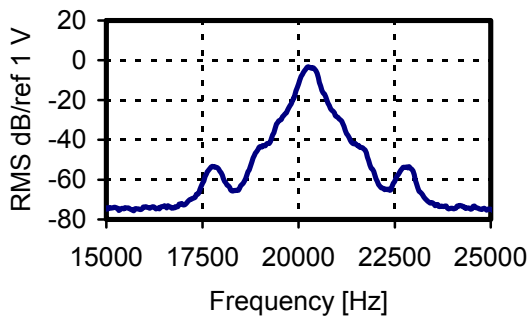
Poslední obr. 15 dokumentuje shodnost spekter úhlových frekvencí



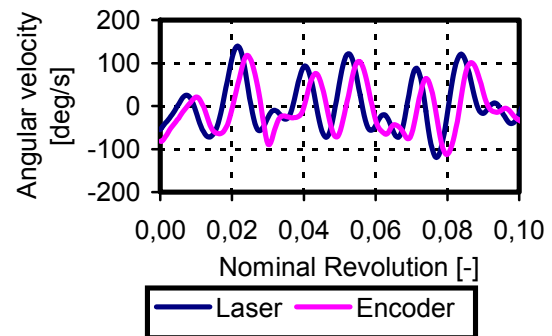
Obr. 9 Záznam časového průběhu impulsního signálu



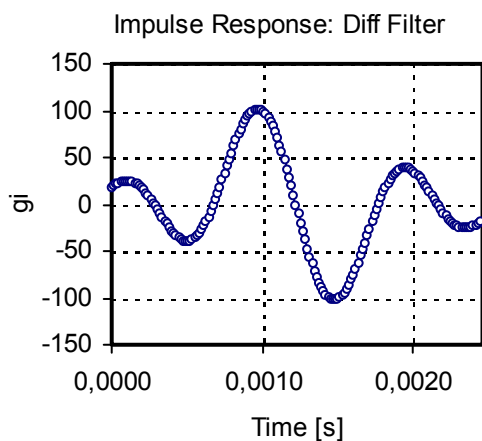
Obr. 11 Časový průběh úhlové rychlosti



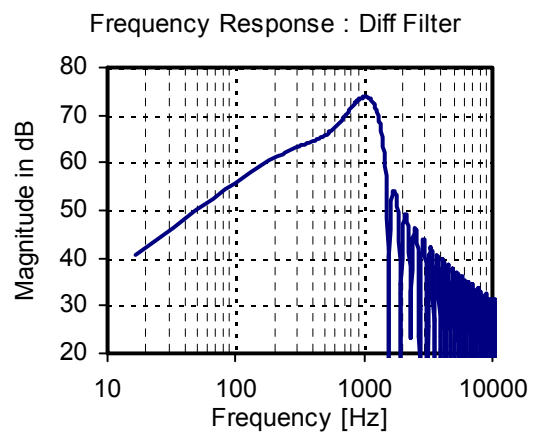
Obr. 10 Frekvenční spektrum impulsního signálu



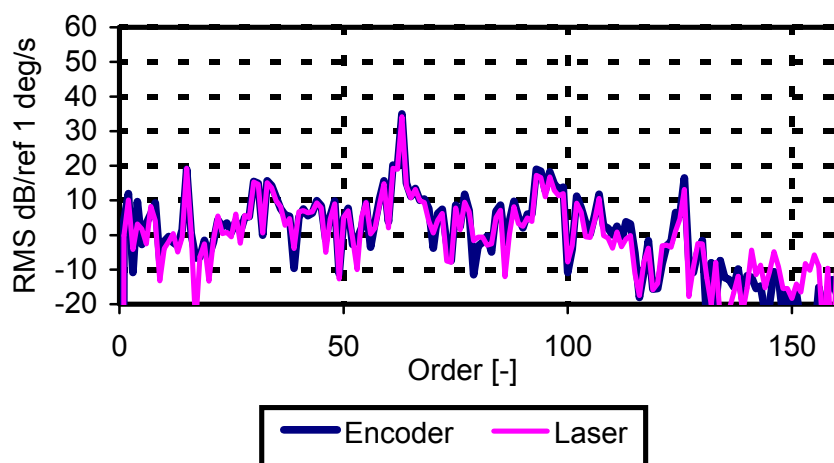
Obr. 12 ZOOM časového průběhu úhlové rychlosti



Obr. 13 Impulsní odezva diferenciátoru



Obr. 14 Frekvenční odezva diferenciátoru



Obr. 15 Frekvenční spektrum úhlové rychlosti z měření laserem a po vyhodnocení snímačem typu IRC

6. Závěr

Měření úhlových kmitů je jedním z perspektivních oborů technické diagnostiky. Získané informace charakterizují mnohé zdroje vibrací a hluku lépe než nepřímé měření vibrací na skříni stroje nebo hluku v okolí stroje.

Přesnost snímačů typu IRC je vyšší než uvádí katalog výrobce a tyto snímače umožňují měřit složky úhlových kmitů o frekvenci deseti nebo dvacetinásobku a nebo větší než je frekvence otáčení s chybou 0,0001 úhlového stupně.

7. Literatura:

- [1] Tůma, J.: Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT. Sdělovací technika, Praha 1997.
- [2] Tůma, J. Phase Demodulation of Impulse Signals in Machine Shaft Angular Vibration Measurements. In: *Proceedings of Tenth international congress on sound and vibration (ICSV10)*. Stockholm, July 7-10, 2003, pp. 5005-5012.
- [3] Tůma, J. Dynamic transmission error measurement. *Engineering Mechanics*, Vol 13, No 2, s. 101-106.

Výzkumné práce v oboru zpracování měření hluku a vibrací jsou podporovány Grantovou agenturou České republiky jako projekt č. 101/07/1345.