

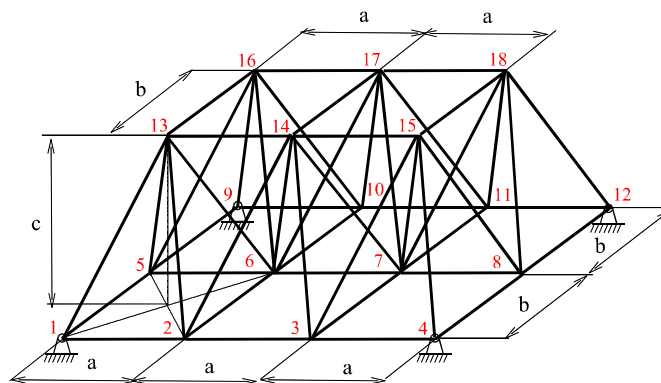
RECONSTRUCTION OF THE ELASTIC MODEL OF 3D STRUCTURES FROM REDUNDANT MEASUREMENTS

T. Vampola¹, M. Valášek², Z. Šika³, S. Gráf⁴

Summary: *The paper describes the way how the method of redundant measurements used for calibration of redundant parallel kinematical structures within the machine tool operation is extended into the on-line determination of mechanical properties of engineering constructions, in particular 3D trusses and frames. The developed method enables to determine the deformation and stiffness of truss that is equipped with redundant measurements (distances of nodes, rotations of joints etc.) during varying loading which is partially measured.*

1. Úvod

V příspěvku je naznačen postup, jak ze změřených hodnot deformací jednotlivých prvků konstrukce rekonstruovat matici tuhosti systému za účelem predikce zátěžných sil působící na konstrukci. V prvním přiblížení předpokládáme platnost lineární teorie pružnosti a tudíž možnost využít výpočtu celkové deformace soustavy superposicí jednotlivých zátěžných stavů.



Obr.1 Řešená 3D konstrukce

¹ Doc. Dr. Ing. Tomáš Vampola, Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky FS ČVUT v Praze, Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2, e-mail: tomas.vampola@fs.cvut.cz

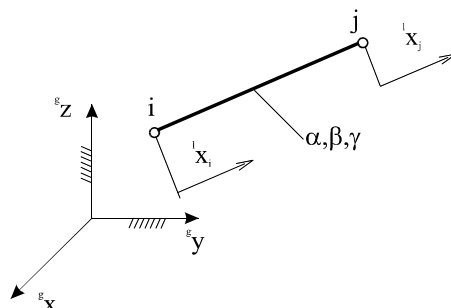
² Prof. Ing. Michael Valášek, DrSc., Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky FS ČVUT v Praze, Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2, e-mail: michael.valasek@fs.cvut.cz

³ Doc. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D., Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky FS ČVUT v Praze, Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2, e-mail: zbynek.sika@fs.cvut.cz

⁴ Stanislav Gráf, Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky FS ČVUT v Praze, Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2,

2.Rekonstrukce matice tuhosti - 1D prvek – osové zatížení

V prvním přiblížení bylo testováno, zda lze rekonstruovat matici tuhosti příhradové konstrukce naznačené na Obr.1 při popisu 1D prvku zohledňujícími pouze axiální deformace. Schéma uvažovaného prvku je uvedeno na Obr.2.



Obr.2 Schéma 1D prvku typu axiální zatížení

Matici tuhosti v lokálním souřadnicovém systému 1D prvku zohledňující pouze axiální zatížení uvažujeme ve tvaru

$${}^1\mathbf{K}_n = k_n \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

kde k_n je neznámý tuhostní parametr, jež je funkcí materiálových charakteristik a geometrických rozměrů daného prvku. Zavedeme-li transformační matici ve tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\alpha & c\beta & c\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c\alpha & c\beta & c\gamma \end{bmatrix}^T, \quad (2)$$

kde α, β, γ jsou směrové úhly vztažené ke globálnímu souřadnicovému systému, lze matici tuhosti prvku vyjádřenou v lokálním souřadnicovém systému transformovat do systému globálního vztahem

$${}^g\mathbf{K}_n = \mathbf{T} {}^1\mathbf{K}_n \mathbf{T}^T. \quad (3)$$

Rozšíříme-li matici tuhosti prvku vyjádřenou v globálním souřadnicovém systému tak, aby svou dimenzí odpovídal rozměru celkové matice tuhosti soustavy lze maticovou rovnici vyjadřující statickou rovnováhu vyšetřované soustavy definovat ve tvaru

$$\left[k_1 {}^g\mathbf{K}_1 + k_2 {}^g\mathbf{K}_2 + \dots + k_{N_{prutu}} {}^g\mathbf{K}_{N_{prutu}} \right] [\mathbf{u}] = [\mathbf{f}]. \quad (4)$$

Kde $k_n, n=1, N_{prutu}$ jsou hledané tuhostní parametry soustavy, ${}^g\mathbf{K}_n$ je modifikovaná matice tuhosti prvku vyjádřená v globálním souřadnicovém systému jejíž dimenze je $[3N_{uzlu}, 3N_{uzlu}]$, \mathbf{u} je vektor posunutí jednotlivých styčníků soustavy v globálním souřadnicovém systému a \mathbf{f} je vektor zátěžných sil. Formální úpravou rovnice (4) dostáváme

$$\left[{}^g\mathbf{K}_1 \mathbf{u}, {}^g\mathbf{K}_2 \mathbf{u}, \dots, {}^g\mathbf{K}_{N_{prutu}} \mathbf{u} \right] [\mathbf{k}] = [\mathbf{f}]. \quad (5)$$

Rovnici (5) lze symbolicky zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A} \mathbf{k} = \mathbf{f}. \quad (6)$$

Po zavedení okrajových podmínek, dostáváme matici soustavy A dimenze $[3N_{uzlů} - N_{reakcí}, N_{prutů}]$. Pro určení neznámých konstant tuhostí jednotlivých prvků konstrukce musí být splněna podmínka

$$(3N_{uzlů} - N_{reakcí})m_{z_stavů} \geq N_{prutů} \cdot \quad (7)$$

Z této podmínky lze určit minimální počet zátěžných stavů potřebných pro určení tuhostních charakteristik vyšetřované soustavy. Pro staticky neurčitě uložený systém dostáváme přeuročenou soustavu. Pro její řešení jsme použili metodu SVD (Singular Values Decomposition) rozkládající matici soustavy na jednotlivé submatice

$$A = USV^T \quad (8)$$

tak, že platí

$$U^T U = E, \quad V^T V = E \quad (9)$$

Dimenze jednotlivých submatic jsou $U[m_{z_stavů} (3N_{uzlů} - N_{reakcí}), m_{z_stavů} (3N_{uzlů} - N_{reakcí})]$, $S[m_{z_stavů} (3N_{uzlů} - N_{reakcí}), N_{prutů}]$, $V[N_{prutů}, N_{prutů}]$. Použijeme-li substituci

$$k = V y \quad (10)$$

lze maticovou rovnici (6) statické rovnováhy soustavy upravit na

$$U S V^T V y = f, \quad (11)$$

vynásobíme-li tuto rovnici zleva U^T dostáváme

$$U^T U S V^T V y = U^T f \quad (12)$$

což lze formálně upravit na

$$S y = c \quad (13)$$

kde matice S je diagonální matice singulárních hodnot vzestupně seřazených. Tato matice definuje počet závislých a nezávislých proměnných řešeného problému, jak je patrné při podrobnějším zápisu rovnice (13).

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(s_i > \varepsilon) & 0 \\ 0 & \text{diag}(s_i \leq \varepsilon) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_D \\ y_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Ve vztahu (14) y_D značí závislé proměnné a y_I značí nezávislé proměnné řešené soustavy a ε je parametr malé velikosti.

Z maticové rovnice (14) lze dopočítat závislé proměnné parametry soustavy.

$$y_D = [\text{diag}(s_i > \varepsilon)]^{-1} c_1 \quad (15)$$

Poněvadž nezávislé proměnné y_I mohou nabývat libovolných hodnot, tudíž mohou být i nulové lze dopočítat tuhostní parametry soustavy

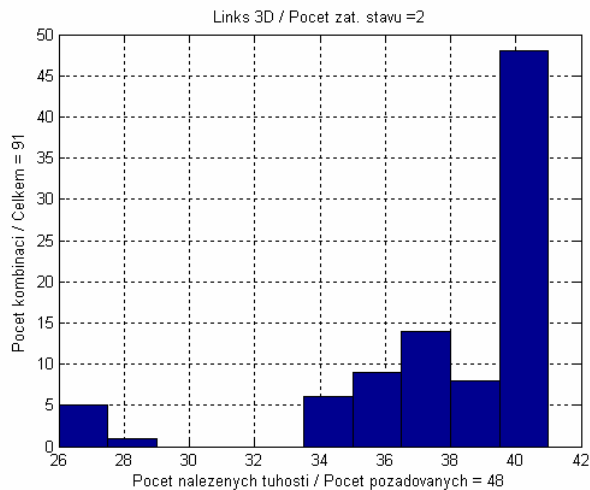
$$k = [V_d \ V_i] \begin{bmatrix} y_D \\ y_I \end{bmatrix}, \quad (16)$$

kde dimenze vektoru neznámých tuhostí je $k \leq N_{prutů}$ v závislosti na volbě zatěžovacích bodů soustavy. Nevhodnou volbou zatěžovacích bodů soustavy, kdy jsou generovány malé či nulové síly v jednotlivých prutech, nemusíme být tedy schopni dopočítat všechny požadované tuhostní parametry soustavy. Pro náš konkrétní příklad soustavy dle Obr.1, kdy hledáme 48

neznámých tuhostních parametrů a předpokládáme soustavu uloženu ve 4 bodech ve všech směrech globálního souřadnicového systému, musí být splněna nerovnost

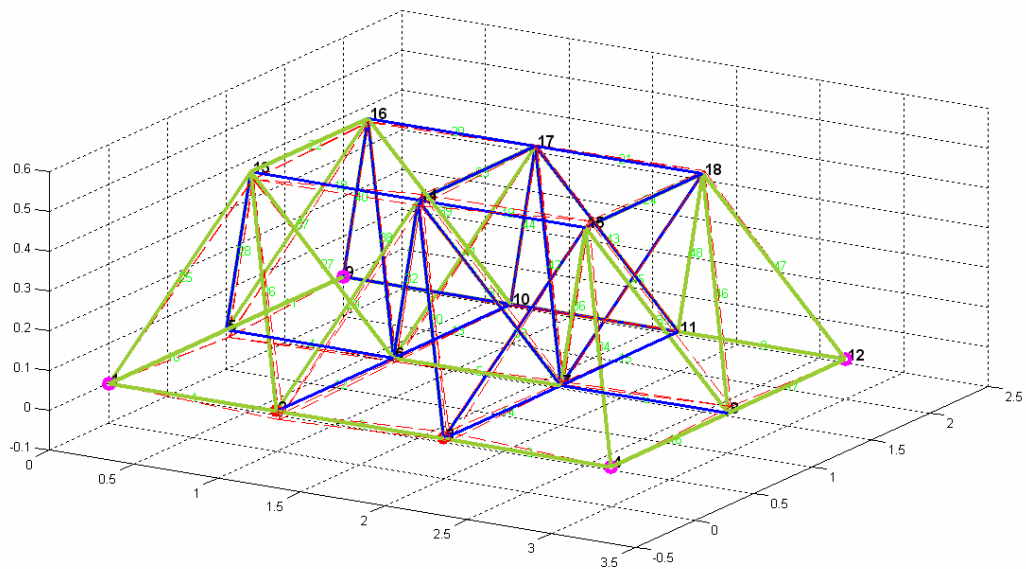
$$m_{z_stavů} \geq \frac{N_{prutů}}{(3N_{uzlů} - N_{reakcí})} \Rightarrow m_{z_stavů} \geq \frac{48}{(3 \cdot 18 - 4 \cdot 3)} = 1.14. \quad (17)$$

Pro volbu $m_{z_stavů} = 2$ je definováno celkem $\frac{(N_{uzlů} - N_{BC})(N_{uzlů} - N_{BC} - 1)}{2} = 91$ možných kombinací zátěžných stavů, N_{BC} je počet uzlů, kde je aplikována okrajová podmínka.



Obr.3 Počet zjištěných tuhostních parametrů – axiální prvek

Z obr.3 je patrné, že ani pro jednu kombinaci zátěžných bodů se nepodařilo dopočítat všechny tuhostní charakteristiky řešené soustavy. Na Obr.4 jsou označeny modrou barvou prvky, pro něž se nepodařilo dopočítat tuhostní charakteristiky v případě postupné aplikace zátěžné síly v bodech označených červeným kroužkem.

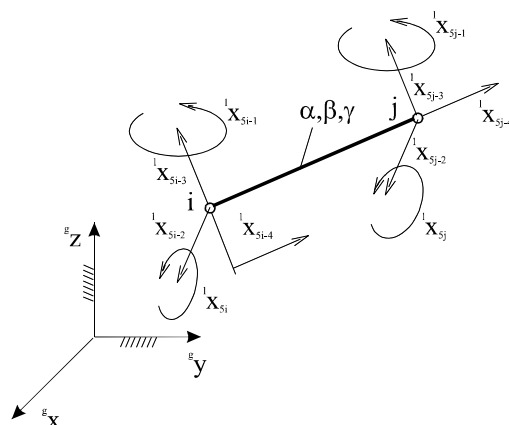


Obr.4 Zjištěné tuhostní parametry

Chceme-li dopočítat všechny tuhostní parametry soustavy, je nutné zvyšovat počet zátěžných stavů a vhodně volit místa aplikace sil.

3.Rekonstrukce matice tuhosti - 1D prvek – prostorový ohyb

Pro odstranění nutnosti znalosti vhodných zátěžných míst systému při rekonstrukci matice tuhosti byly použity 1D prvky zohledňující prostorový ohyb. Schéma uvažovaného prvku je uvedeno na Obr.5.



Obr.5 Schéma 1D prvku typu prostorový ohyb

Při popisu soustavy 1D prvky zohledňující prostorový ohyb uvažujeme matici tuhosti v lokálním souřadnicovém systému ve tvaru

$${}^1\mathbf{K}_n = k_{n1}\mathbf{A}_n + k_{n2}\mathbf{B}_n + k_{n3}\mathbf{C}_n, \quad (18)$$

kde k_{n1} je neznámý tuhostní parametr odpovídající axiálnímu namáhání prvku, k_{n2} je neznámý tuhostní parametr odpovídající ohybovému namáhání prvku v rovině xz lokálního souřadnicového systému a k_{n3} je neznámý tuhostní parametr odpovídající ohybovému namáhání prvku v rovině xy lokálního souřadnicového systému. Struktura jednotlivých matic \mathbf{A}_n , \mathbf{B}_n a \mathbf{C}_n , které jsou definované v lokálním systému tělesa je patrná ze vztahů (19) až (21).

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6l_n^{-2} & -3l_n^{-1} & 0 & 0 & 0 & -6l_n^{-2} & -3l_n^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -3l_n^{-1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 3l_n^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6l_n^{-2} & 3l_n^{-1} & 0 & 0 & 0 & 6l_n^{-2} & 3l_n^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -3l_n^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 3l_n^{-1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6l_n^{-2} & 0 & 0 & 3l_n^{-1} & 0 & -6l_n^{-2} & 0 & 0 & 3l_n^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3l_n^{-1} & 0 & 0 & 2 & 0 & -3l_n^{-1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6l_n^{-2} & 0 & 0 & -3l_n^{-1} & 0 & 6l_n^{-2} & 0 & 0 & -3l_n^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3l_n^{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & -3l_n^{-1} & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Za předpokladu lineární teorie pružnosti vyplývá, že ohyb v rovině xy neovlivňuje ohyb v rovině xz ani axiální deformaci.

Použitím transformační matice ve tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_u \end{bmatrix} \quad (22)$$

kde

$$\mathbf{T}_u = \begin{bmatrix} c({}^l x^g x) & c({}^l y^g x) & c({}^l z^g x) & 0 & 0 \\ c({}^l x^g y) & c({}^l y^g y) & c({}^l z^g y) & 0 & 0 \\ c({}^l x^g z) & c({}^l y^g z) & c({}^l z^g z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c({}^l y^g y) & c({}^l z^g y) \\ 0 & 0 & 0 & c({}^l y^g z) & c({}^l z^g z) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Ize matici tuhosti prvku vyjádřenou v lokálním souřadnicovém systému transformovat do systému globálního

$${}^g \mathbf{K}_n = \mathbf{T} (k_{n1} \mathbf{A}_n + k_{n2} \mathbf{B}_n + k_{n3} \mathbf{C}_n) \mathbf{T}^T. \quad (22)$$

Označíme-li

$${}^g \mathbf{K}_{n,1} = \mathbf{T} (\mathbf{A}_n) \mathbf{T}^T, \quad {}^g \mathbf{K}_{n,2} = \mathbf{T} (\mathbf{B}_n) \mathbf{T}^T, \quad {}^g \mathbf{K}_{n,3} = \mathbf{T} (\mathbf{C}_n) \mathbf{T}^T, \quad (23)$$

Ize maticovou rovnici vyjadřující statickou rovnováhu soustavy upravit do tvaru

$$\begin{aligned} & [k_{1,1} {}^g \mathbf{K}_{1,1} + k_{2,1} {}^g \mathbf{K}_{2,1} + \dots + k_{Nprutu,1} {}^g \mathbf{K}_{Nprutu,1} + \\ & k_{1,2} {}^g \mathbf{K}_{1,2} + k_{2,2} {}^g \mathbf{K}_{2,2} + \dots + k_{Nprutu,2} {}^g \mathbf{K}_{Nprutu,2} + \\ & k_{1,3} {}^g \mathbf{K}_{1,3} + k_{2,3} {}^g \mathbf{K}_{2,3} + \dots + k_{Nprutu,3} {}^g \mathbf{K}_{Nprutu,3}] [\mathbf{u}] = [\mathbf{f}] \end{aligned} \quad (24)$$

Kde ${}^g \mathbf{K}_{n,i}$ $i=1,2,3$ jsou modifikované matice tuhosti prvku vyjádřené v globálním souřadnicovém systému, jejich dimenze jsou $[5N_{uzlu}, 5N_{uzlu}]$. Index $i=1$ přísluší matici tuhosti zohledňující axiální deformace prvku, $i=2,3$ přísluší maticím tuhosti zohledňující ohyb prvku v rovině xy a xz .

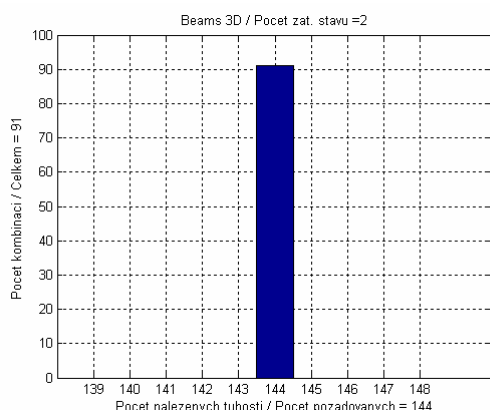
Úpravou vztahu (24) získáme

$$\left[{}^g \mathbf{K}_{1,1} \mathbf{u}, {}^g \mathbf{K}_{2,1} \mathbf{u}, \dots, {}^g \mathbf{K}_{Nprutu,1} \mathbf{u}, {}^g \mathbf{K}_{1,2} \mathbf{u}, \dots, {}^g \mathbf{K}_{Nprutu,2} \mathbf{u}, {}^g \mathbf{K}_{1,3} \mathbf{u}, \dots, {}^g \mathbf{K}_{Nprutu,3} \mathbf{u} \right] \begin{bmatrix} k_{n1} \\ k_{n2} \\ k_{n3} \end{bmatrix} = [\mathbf{f}]. \quad (25)$$

Po zavedení okrajových podmínky dostáváme matici soustavy řádu $[5N_{uzlů} - N_{reakcí}, 3N_{prutů}]$. Pro určení neznámých tuhostí charakteristik jednotlivých prvků musí být splněna podmínka

$$(5N_{uzlů} - N_{reakcí}) m_{z_stavů} \geq 3N_{prutů} \quad (26)$$

Ze které lze dopočítat minimální počet zátěžných stavů pro určení tuhostních charakteristik řešené soustavy. Obdobou postupu prezentovaného pro 1D prvky zohledňující pouze axiální deformace lze dopočítat neznámé tuhostní charakteristiky řešené struktury.



Obr.6 Počet zjištěných tuhostních parametrů-prostorový ohyb

Z Obr.6 je patrné, že při popisu soustavy respektující prostorový ohyb nezáleží na volbě uzlů, kde je aplikována zatěžující síla a pro libovolnou kombinaci uzlů minimálního počtu zátěžných stavů, lze dopočítat všechny požadované tuhostní parametry.

4.Redukce počtu měřených deformací konstrukce

Nevýhodou prezentovaného postupu je nutnost získání vektoru deformací ve směru jednotlivých stupňů volnosti. Vystává otázka možného snížení počtu měřicích míst soustavy. Byla prošetřena možnost použití metody statické kondenzace ke snížení počtu měřených stupňů volnosti soustavy. Rozdělením vektoru deformací na tzv. master (m) stupně volnosti, které mají být v řešené úloze zachovány a slave (s) stupně volnosti, které mají být z řešené úlohy eliminovány lze matici tuhosti soustavy upravit do tvaru

$$\begin{aligned}
 & \left[k_{1,1} \begin{bmatrix} g^* \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}_{1,1} + \dots + k_{Nprutu,1} \begin{bmatrix} g^* \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}_{Nprutu,1} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} + \\
 & \left[k_{1,2} \begin{bmatrix} g^* \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}_{1,2} + \dots + k_{Nprutu,2} \begin{bmatrix} g^* \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}_{Nprutu,2} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} + \\
 & \left[k_{1,3} \begin{bmatrix} g^* \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}_{1,3} + \dots + k_{Nprutu,3} \begin{bmatrix} g^* \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}_{Nprutu,3} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (28)
 \end{aligned}$$

Chceme-li měřit jen v N_{mer} bodech pak dimenze $m = 5N_{mer} - N_{reakcí}$ a musí být splněna podmínka

$$(5N_{mer} - N_{reakcí}) m_{z_stavů} \geq 3N_{prutů} \cdot \quad (29)$$

Úpravou vztahu (28) dostáváme

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,1} \left({}^g K_{mm} \right)_{n,1} \right) \mathbf{u}_m + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,2} \left({}^g K_{mm} \right)_{n,2} \right) \mathbf{u}_m + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,3} \left({}^g K_{mm} \right)_{n,3} \right) \mathbf{u}_m + \\ & \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,1} \left({}^g K_{ms} \right)_{n,1} \right) \mathbf{u}_s + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,2} \left({}^g K_{ms} \right)_{n,2} \right) \mathbf{u}_s + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,3} \left({}^g K_{ms} \right)_{n,3} \right) \mathbf{u}_s = \mathbf{f}_m \end{aligned} \quad (30)$$

a

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,1} \left({}^g K_{sm} \right)_{n,1} \right) \mathbf{u}_m + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,2} \left({}^g K_{sm} \right)_{n,2} \right) \mathbf{u}_m + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,3} \left({}^g K_{sm} \right)_{n,3} \right) \mathbf{u}_m + \\ & \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,1} \left({}^g K_{ss} \right)_{n,1} \right) \mathbf{u}_s + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,2} \left({}^g K_{ss} \right)_{n,2} \right) \mathbf{u}_s + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,3} \left({}^g K_{ss} \right)_{n,3} \right) \mathbf{u}_s = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

vyjádříme-li ze vztahu (31) eliminované stupně volnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s = & - \left[\left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,1} \left({}^g K_{ss} \right)_{n,1} \right) + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,2} \left({}^g K_{ss} \right)_{n,2} \right) + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,3} \left({}^g K_{ss} \right)_{n,3} \right) \right]^{-1} \\ & \left[\left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,1} \left({}^g K_{sm} \right)_{n,1} \right) + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,2} \left({}^g K_{sm} \right)_{n,2} \right) + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,3} \left({}^g K_{sm} \right)_{n,3} \right) \right] \mathbf{u}_m \end{aligned} \quad (32)$$

Ize po dosazení (32) do (30) odvodit soustavu nelineárních rovnic, které lze formálně zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{f}(k_{n1}, k_{n2}, k_{n3}) = 0. \quad (33)$$

Ze vztahu (33) lze již dopočítat požadované tuhostní charakteristiky řešeného systému. Tento algoritmus výpočtu neznámých tuhostních parametrů vede na problém řešení soustavy nelineárních rovnic a pro rozsáhlejší soustavy je to numericky značně komplikovaný problém.

Proto byla testována možnost přímého výpočtu tuhostních parametrů s jejich iteračním zpřesněním. Upravíme-li výraz (31) na

$$\begin{aligned} & \left(k_{1,1} \sum_{n=1}^{Nprvku} \frac{k_{n,1}}{k_{1,1}} \left({}^g K_{sm} \right)_{n,1} \right) \mathbf{u}_m + \left(k_{1,2} \sum_{n=1}^{Nprvku} \frac{k_{n,2}}{k_{1,2}} \left({}^g K_{sm} \right)_{n,2} \right) \mathbf{u}_m + \left(k_{1,3} \sum_{n=1}^{Nprvku} \frac{k_{n,2}}{k_{1,2}} \left({}^g K_{sm} \right)_{n,3} \right) \mathbf{u}_m + \\ & \left(k_{1,1} \sum_{n=1}^{Nprvku} \frac{k_{n,1}}{k_{1,1}} \left({}^g K_{ss} \right)_{n,1} \right) \mathbf{u}_s + \left(k_{1,2} \sum_{n=1}^{Nprvku} \frac{k_{n,2}}{k_{1,2}} \left({}^g K_{ss} \right)_{n,2} \right) \mathbf{u}_s + \left(k_{1,3} \sum_{n=1}^{Nprvku} \frac{k_{n,2}}{k_{1,2}} \left({}^g K_{ss} \right)_{n,3} \right) \mathbf{u}_s = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

kde byl vytknut neznámý tuhostní parametr příslušící prvému prvku. Poměry neznámých tuhostních parametrů lze definovat ve tvaru

$$\frac{k_{n,1}}{k_{1,1}} = \frac{E_n A_n l_1}{E_1 A_1 l_n} = p_{n1,1}, \quad \frac{k_{n,2}}{k_{1,2}} = \frac{E_n J_{yn} l_1}{E_1 J_{y1} l_n} = p_{n1,2}, \quad \frac{k_{n,3}}{k_{1,3}} = \frac{E_n J_{zn} l_1}{E_1 J_{z1} l_n} = p_{n1,3}. \quad (35)$$

V prvním přiblížení poměry tuhostních parametrů odhadneme pouze poměry délek jednotlivých prvků konstrukce. Úpravou vztahu (34) dostáváme

$$\begin{aligned} & \left(k_{1,1} \sum_{n=1}^{Nprvku} p_{n1,1} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{sm} \right)_{n,1} + k_{1,2} \sum_{n=1}^{Nprvku} p_{n1,2} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{sm} \right)_{n,2} + k_{1,3} \sum_{n=1}^{Nprvku} p_{n1,3} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{sm} \right)_{n,3} \right) \mathbf{u}_m + \\ & \left(k_{1,1} \sum_{n=1}^{Nprvku} p_{n1,1} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{ss} \right)_{n,1} + k_{1,2} \sum_{n=1}^{Nprvku} p_{n1,2} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{ss} \right)_{n,2} + k_{1,3} \sum_{n=1}^{Nprvku} p_{n1,3} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{ss} \right)_{n,3} \right) \mathbf{u}_s = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Vytknutím libovolného tuhostního parametru např. $k_{1,1}$ a jeho eliminací dostáváme

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} p_{n1,1} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{sm} \right)_{n,1} + \frac{k_{1,2}}{k_{1,1}} \sum_{n=1}^{Nprvku} p_{n1,2} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{sm} \right)_{n,2} + \frac{k_{1,3}}{k_{1,1}} \sum_{n=1}^{Nprvku} p_{n1,3} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{sm} \right)_{n,3} \right) \mathbf{u}_m + \\ & \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} p_{n1,1} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{ss} \right)_{n,1} + \frac{k_{1,2}}{k_{1,1}} \sum_{n=1}^{Nprvku} p_{n1,2} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{ss} \right)_{n,2} + \frac{k_{1,3}}{k_{1,1}} \sum_{n=1}^{Nprvku} p_{n1,3} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{ss} \right)_{n,3} \right) \mathbf{u}_s = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

kde

$$\frac{k_{1,2}}{k_{1,1}} = \frac{2J_{y1}}{A_1} = r_{21}, \quad \frac{k_{1,3}}{k_{1,1}} = \frac{2J_{z1}}{A_1} = r_{31} \quad (38)$$

Dosazením (38) do (37) eliminujeme ve výrazu(37) neznámé tuhostní parametry. Formálně lze rovnici (37) upravit na

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{Z}_{sm} \mathbf{u}_m. \quad (39)$$

Matrice \mathbf{Z}_{sm} neobsahuje neznámé tuhostní parametry, ale pouze odhadnuté poměry těchto parametrů. Dosazením vztahu (39) do (30) dostáváme

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,1} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{mm} \right)_{n,1} \right) \mathbf{u}_m + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,2} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{mm} \right)_{n,2} \right) \mathbf{u}_m + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,3} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{mm} \right)_{n,3} \right) \mathbf{u}_m + \\ & \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,1} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{ms} \right)_{n,1} \right) \mathbf{Z}_{sm} \mathbf{u}_m + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,2} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{ms} \right)_{n,2} \right) \mathbf{Z}_{sm} \mathbf{u}_m + \left(\sum_{n=1}^{Nprvku} k_{n,3} \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{ms} \right)_{n,3} \right) \mathbf{Z}_{sm} \mathbf{u}_m = \mathbf{f}_m \end{aligned} \quad (40)$$

Úpravou lze odvodit výslednou maticovou rovnici umožňující výpočet hledaných tuhostních parametrů soustavy. Příslušná matice soustavy je

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} \mathbf{u}_{m1}, \dots, \mathbf{A}_{Nprvku,1} \mathbf{u}_{m1}, \mathbf{A}_{1,2} \mathbf{u}_{m1}, \dots, \mathbf{A}_{Nprvku,2} \mathbf{u}_{m1}, \mathbf{A}_{1,3} \mathbf{u}_{m1}, \dots, \mathbf{A}_{Nprvku,3} \mathbf{u}_{m1} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{1,1} \mathbf{u}_{mn}, \dots, \mathbf{A}_{Nprvku,1} \mathbf{u}_{mn}, \mathbf{A}_{1,2} \mathbf{u}_{mn}, \dots, \mathbf{A}_{Nprvku,2} \mathbf{u}_{mn}, \mathbf{A}_{1,3} \mathbf{u}_{mn}, \dots, \mathbf{A}_{Nprvku,3} \mathbf{u}_{mn} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

kde

$$\mathbf{A}_{i,j} = \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{mm} \right)_{i,j} + \left({}^{g^*} \mathbf{K}_{ms} \right)_{i,j} \mathbf{Z}_{sm}. \quad (40)$$

Vektor neznámých tuhostních parametrů uvažujeme ve tvaru

$$\left[k_{1,1} \quad \dots \quad k_{Nprvku,1} \quad k_{1,2} \quad \dots \quad k_{Nprvku,2} \quad k_{1,3} \quad \dots \quad k_{Nprvku,3} \right]^T \quad (42)$$

a vektor pravé strany je definován výrazem

$$\left[\mathbf{f}_{m1} \quad \dots \quad \mathbf{f}_{mn} \right]^T, \quad (43)$$

kde uvažujeme 1,...,n zátěžných stavů.

Pro dopočtené tuhostní parametry vypočteme nové tuhostní poměry použité ve vztahu (34). V případě, že nové tuhostní poměry se výrazně liší od předpokládaných tuhostních

poměrů provedeme jejich nahrazení aktuálními hodnotami a provedeme další iterační krok výpočtu. Výpočet ukončíme v okamžiku kdy tuhostní poměry ve dvou po sobě následujících krocích se výrazně neliší.

Při tomto způsobu výpočtu tuhostních parametrů soustavy však vyvstává otázka vhodné volby eliminovaných stupňů volnosti a zátěžných vektorů. Vhodnost eliminovaných stupňů volnosti řešené soustavy je patrný z Tab.1.

Tab.1. Nalezené tuhostní parametry

	Styčník	Eliminované stupně volnosti	Nalezené tuhostní parametry
Středové uzly	6,7,14 či 17	$u_x, u_y, u_z, \varphi_y, \varphi_z$	všechny
Krajové uzly	2,3,8,11,10,5, 13,15,16,18	$u_x, u_y, u_z, \varphi_y, \varphi_z$	Nenalezeny tuhostní parametry prvku spojující eliminovaný uzel s uzlem, kde je definována okrajová podmínka

5. Závěr

V příspěvku je prezentován postup sestavení matice tuhosti soustavy ze změřených deformací jednotlivých styčníků. Za předpokladu platnosti lineární teorie pružnosti, lze použít tohoto postupu ke zjištění aktuálního zatížení řešené soustavy. Byl navržen iterační postup umožňující efektivně snížit počet měřených bodů, potřebných pro rekonstrukci matice tuhosti.

6. Poděkování

Grantové agentuře ČR za podporu tohoto výzkumu grantovým projektem GAČR 101/06/1462.

7. Literatura

- Valášek, M., Šika, Z., Štembera, J., 2004. PKM Calibration by Redundant Measurements, In: Neugebauer, R. (ed.): *Parallel Kinematic Machines in Research and Practice*. Zwickau: Verlag Wissenschaftliche Scripten, 2004, pp. 739-744.
- Vampola, T. - Valášek, M. - Šika, Z.: Reconstruction of Parameters of Truss Model from Redundant Measurements. In *Proceedings of Computational Mechanics 2006*. Plzeň: Západočeská universita, Fakulta aplikovaných věd, 2006, p. 665-671. ISBN 80-7043-477-5.
- Valášek, M., Šika, Z., Bauma, V., Štembera, J., Hamrle, V., 2005. Redundant Measurement and Calibration of Parallel Kinematical Structures, In: *Proceedings of the 15th International Symposium on Measurement and Control in Robotics (ISMCR-2005)* [CD-ROM]. Brussels: IMEKO, 2005.
- Spencer, B.F. jr., Ruiz-Sandoval M.E., Kurata N., 2004, Smart Sensing Technology: Opportunities and challenges. *Structural Control and Health Monitoring* 11 (2004) 349-368