

**DYNAMIC ANALYSIS OF A ROTOR SYSTEM SUPPORTED BY
RADIAL ACTIVE MAGNETIC BEARINGS WITH THE SHAFT
CONTAINING BOTH TRANSVERSE CRACK AND SLANT CRACK**

P. Ferrecki *

Summary: *In the present study, finite element method analysis of a rotor system supported by radial active magnetic bearings has been performed for a shaft containing a transverse and a slant crack. The influence of breathing slant crack and transverse crack on the steady-response of a rotor system excited by centrifugal forces is shown through computer simulations. The response of the rotor system is obtained by direct integration of equations of motion. The steady-state response of the rotor system with a slant crack in the shaft excited by centrifugal forces due to an unbalance of rotating parts contains various subharmonic resonances. The effect of the slant crack on a lateral steady-state response of a rotor system is practically same as the transverse crack.*

1. Úvod

Šikmo orientované trhliny k ose hřídele v rotorových soustavách vznikají v důsledku jejich torzního zatížení. Nadměrné torzní zatížení v rotorech generátorů, turbosoustrojí, apod. má původ v jejich elektronickém řízení, zatěžující charakteristice zátěže a špatné synchronizaci.

Odborná literatura zabývající se rotory s trhlinami je v převážné většině zaměřena na příčně orientované trhliny k ose hřídele. Sekhar & Prasad (1997) jako první odvodili matici lokální poddajnosti reprezentující přítomnost šikmé trhliny v hřídeli, ve které jsou uváženy pouze nenulové prvky na stejných pozicích jako u příčné trhliny. Tato matice je odvozena analogickým způsobem s odvozením matice lokální poddajnosti pro příčnou trhlinu v hřídeli. V příspěvku je zkoumána rotorová soustava s pružným hřídelem, s diskem nasazeným uprostřed meziložiskové vzdálenosti a uložená v izotropních ložiskách. Dýchání trhliny je modelováno pomocí zkrácené kosinové řady o čtyřech členech. Z výsledků plyne, že pokles vlastní frekvence pro stejnou hloubku a polohu trhliny je menší v případě šikmé trhliny v porovnání s příčnou trhlinou.

Později v příspěvcích Darpe (2007) odvodil lokální matici poddajnosti šikmo orientované trhliny k ose hřídele pro diskrétní Jeffcottův model rotoru a diskretizovaný model rotoru za pomoci hřídelových konečných prvků. Prvky v matici lokální poddajnosti šikmé trhliny jsou porovnány s maticí z příčné trhliny a je ukázána silná závislost mezi torzním kmitáním

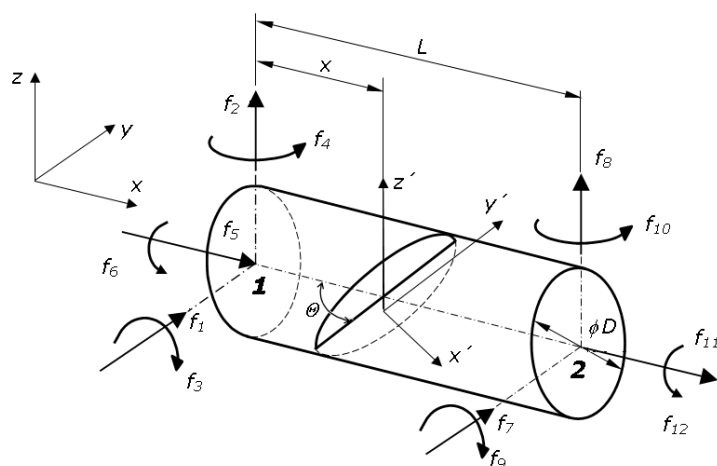
* Ing. Petr Ferrecki, Ph.D.: Center of Advanced Innovation Technologies, VŠB-Technical University of Ostrava, 17. listopadu 15; 708 33 Ostrava-Poruba; tel.: +420 597 325 752, fax: +420 597 321 228; e-mail: petr.ferrecki@vsb.cz

a axiálním a příčným kmitáním. Ve frekvenčních spektrech sestavených z časových průběhů posuvů podélného, torzního a příčného kmitání se zjistily celistvé násobky základní otáčkové frekvence, ale i součtové a rozdílové násobky frekvence torzního buzení a otáčkové frekvence.

V příspěvku je představen výpočetní postup ke stanovení odezvy rotorové soustavy uložené v radiálních aktivních magnetických ložiskách (AML) s hřídelem poškozeným šikmou únavovou trhlinou. Matice tuhosti hřídelového prvku s trhlinou je odvozena na základě teorie lomové mechaniky a tzv. dýchání trhliny je zahrnuto pomocí hodnoty znaménka součinitele intenzity napětí. Výpočetní postup ke stanovení odezvy rotorové soustavy na buzení odstředivými silami byl algoritmován v prostředí systému MATLAB a odezva byla vypočítána numericky přímou integrací. Zjištěné výsledky jsou původní, protože doposud nebyly publikovány pro rotory uložené v AML s hřídelem poškozeným šikmou trhlinou. Zjistilo se, že za zkoumaných podmínek je vliv změn parametrů regulátoru AML na ustálenou složku odezvy na buzení odstředivými silami nevýznamný. Naopak se potvrdilo, že se vybudí výraznější torzní odezva než u rotoru s příčnou trhlinou a ta je silně svázána s příčným a axiálním kmitáním.

2. Pohybová rovnice rotorové soustavy uložené v radiálních AML s hřídelem poškozeným šikmou únavovou trhlinou

Je uvažován hřídelový prvek s 12 stupni volnosti, průměrem D , délkou L a šikmou únavovou trhlinou skloněnou o úhel θ od osy rotace a nacházející se ve vzdálenosti x od prvního uzlu elementu. Hřídelový prvek z obr. 1 je ve svých uzlech namáhán smykovými silami f_1, f_7, f_2, f_8 ve směru souřadnicových os y, z , ohybovými momenty f_3, f_9, f_4, f_{10} kolem os y, z , axiálními silami f_5, f_{11} ve směru souřadnicové osy x a torzními momenty f_6, f_{12} kolem souřadnicové osy x .

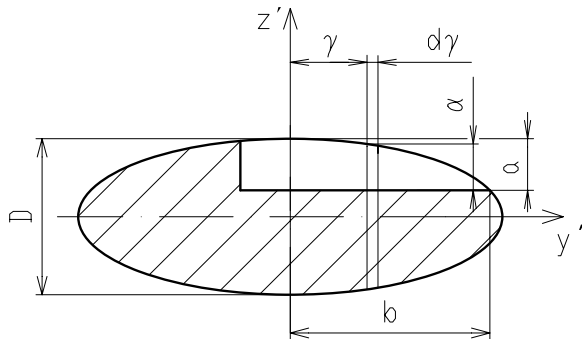


Obr. 1: Hřídelový prvek se šikmou trhlinou

způsobené trhlinou C_{tr}^e a matice poddajnosti hřídelového prvku bez trhliny C_{btr}^e .

O trhlíně se předpokládá, že ovlivňuje pouze poddajnost ve svém blízkém okolí a matice lokální poddajnosti hřídelového prvku způsobené trhlinou C_{tr}^e je stanovena pro zobecněné posuvy od všech stupňů volnosti, jak je uvedeno v článku Darpe (2007), resp. podobně v Sekhar et al. (1997). Matice celkové poddajnosti hřídelového prvku s trhlinou C^e , sestavena v jednom z jeho uzlů, je dána součtem matice lokální poddajnosti

Matice lokální poddajnosti trhliny C_{tr}^e je vypočítána z celkové hustoty deformační energie stanovené ze součinitelů intenzity napětí pro tři základní způsoby zatížení trhliny (módy zatížení I., II. a III.). Součinitele intenzity napětí jsou složeny z elementárních obdélníkových proužků a jejich celková hodnota je získána integrací přes plochu trhliny, jak je



Obr. 2: Plocha řezu v místě trhliny

prvku s trhlinou ve spolurotujícím souřadnicovém systému. Než se matice tuhosti hřídelového prvku s trhlinou vřadí do globální matice tuhosti rotorové soustavy, musí se transformovat do pevného souřadnicového systému.

znázorněno na obr. 2, kde a je celková hloubka trhliny, b je polovina šířky trhliny, α a $d\gamma$ určuje plochu elementárního obdélníkového proužku a γ je jeho vzdálenost od osy z' .

Transformační maticí sestavenou z rovnic statické rovnováhy hřídelového prvku mezi vektorem zobecněných posuvů jednoho uzlu prvku a jeho obou uzlů se získá matice celkové poddajnosti hřídelového

Pohybová rovnice zkoumané rotorové soustavy se šikmou trhlinou je sestavena v pevném souřadnicovém systému a byla odvozena za těchto předpokladů: (i) hřídel je poddajný, lineárně pružný a ve výpočtovém modelu je nahrazen prutem, který je pro účely výpočtů diskretizován na konečné prvky, (ii) hřídelový prvek je odvozen na základě Bernoulliovy nosníkové teorie, (iii) stacionární část je absolutně tuhá, (iv) spojení hřídele se stacionární částí je provedeno pomocí radiálních AML a nehmotného axiálního ložiska, (v) v ložiskovém subsystému se uvažuje s nelinearitami v obvodu elektromagnetu, (vi) kotouče jsou absolutně tuhá a rotačně symetrická tělesa, (vii) jsou uvaženy setrvačné a gyroskopické účinky rotujících částí, (viii) materiálové tlumení hřídele i ostatní druhy tlumení jsou považovány za lineární, (ix) v hřídeli je šikmá dýchající únavová trhlina, o které se předpokládá, že má přímou hranu a v pohybové rovnici ovlivňuje pouze matici tuhosti rotorové soustavy, (x) rotor je zatížen osamělými a rozloženými silami konstantního a periodického časového průběhu a (xi) rotor se otáčí konstantní úhlovou rychlostí a její vyjádření je následující

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \eta_v \mathbf{K}_{SH} + \omega \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + \{\mathbf{K}[\mathbf{q}(t)] + \omega \mathbf{K}_C\}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_M(\mathbf{q}, \mathbf{i}) + \mathbf{f}_A(t) + \mathbf{f}_V, \quad (1)$$

$$\mathbf{q}_{OP} = \mathbf{q}_{OP}(t), \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0,$$

kde $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_{SH}$, $\mathbf{K}_C$ jsou matice hmotnosti, tlumení (vnějšího a materiálového stacionární části), gyroskopických účinků, tuhosti rotorové soustavy se šikmou trhlinou, tuhosti hřídele a cirkulační matice rotorové soustavy, $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$ jsou vektory zobecněných posuvů, rychlostí a zrychlení, $\mathbf{q}_{OP}$, $\mathbf{q}_0$, $\dot{\mathbf{q}}_0$ jsou vektory okrajových a počátečních podmínek $\mathbf{f}_M$, $\mathbf{f}_A$, $\mathbf{f}_V$, $\mathbf{i}$ jsou vektory magnetických sil, zobecněných sil působících na soustavu (vnějších a vazbových sil), řídicích proudů procházejících cívkami elektromagnetů, η_v je součinitel viskózního tlumení materiálu hřídele, ω je úhlová rychlost otáčení hřídele a t je čas.

Samotná rotorová soustava uložená v AML je nestabilní a k řízení jejího pohybu jsou použity dva proudové PD zpětnovazební regulátory, které zajišťují pohyb rotoru ve vodorovném a svislém směru. Rovnice řízení PD regulátoru proudu pro rotorovou soustavu uloženou ve dvou stejných AML je

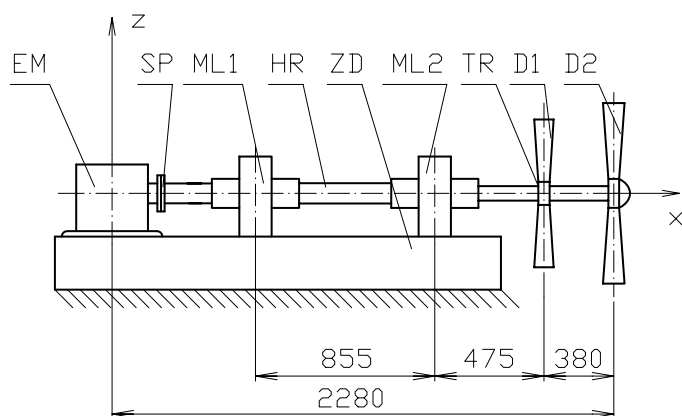
$$\mathbf{i} = \mathbf{D}[k_p] \mathbf{q} + \mathbf{D}[k_d] \dot{\mathbf{q}}, \quad (2)$$

kde $\mathbf{D}[k_p]$ a $\mathbf{D}[k_d]$ jsou diagonální matice s prvky proporcionálních k_p a derivačních konstant k_d regulátoru.

Trhlina během jedné otáčky hřídele může zůstat otevřená, zavřená a nebo se postupně otevírá a zavírá. U dýchající trhliny se hodnoty prvků v matici poddajnosti hřídelového prvku s trhlinou mění v závislosti na velikosti jejího otevření, resp. zavření (obr. 2). Zahrnutí dýchání trhliny do výpočtového modelu rotorové soustavy je provedeno pomocí metodiky „crack closure line“ (CCL), navržené v článku Darpe et al. (2004), ve kterém CCL je myšlená čára kolmá k hraně trhliny a oddělující její otevřenou část od zavřené. Hrana trhliny je rozdělena s několika stejně vzdálenými body, přičemž v každém z nich se určuje hodnota celkového součinitele intenzity napětí z I. zatěžujícího módu trhliny. Kladná hodnota součinitele intenzity napětí znamená, že v daném bodě je tahové napětí a tedy trhlina je otevřená a naopak jeho záporná hodnota indikuje v daném bodě hrany trhliny její zavřený stav. Model dýchání trhliny využívající hodnoty znaménka součinitele intenzity napětí vypočítaného v bodech ležících na hraně trhliny, umožňuje v současné době asi nejpresněji vystihnout fyzikální podstatu dýchání trhliny a je použitelný v celém rozsahu provozních otáček rotorové soustavy, a to jak v oblasti ustáleného stavu, tak i v oblasti přechodového děje.

3. Výsledky numerických experimentů u rotorové soustavy s hřídelem poškozeným šikmou únavovou trhlinou

Úkolem je vypočítat odezvu na buzení odstředivými silami u rotorové soustavy uložené v radiálních AML s hřídelem poškozeným šikmou únavovou trhlinou. Za tímto účelem je vytvořen algoritmus k jejímu výpočtu v programovém systému MATLAB R2007a. V pohybové rovnici rotorové soustavy (1) matice tuhosti závisí na vektoru zobecněných



Obr. 3 Schéma testovací rotorové soustavy se šikmou únavovou trhlinou

posuvů a radiální AML jsou zahrnuta pomocí nelineárního vazbového vektoru, a proto jsou k jejímu výpočtu použity přímé integrační metody implementované v MATLABu a konkrétně se jednalo o funkce Ode23s a Ode45.

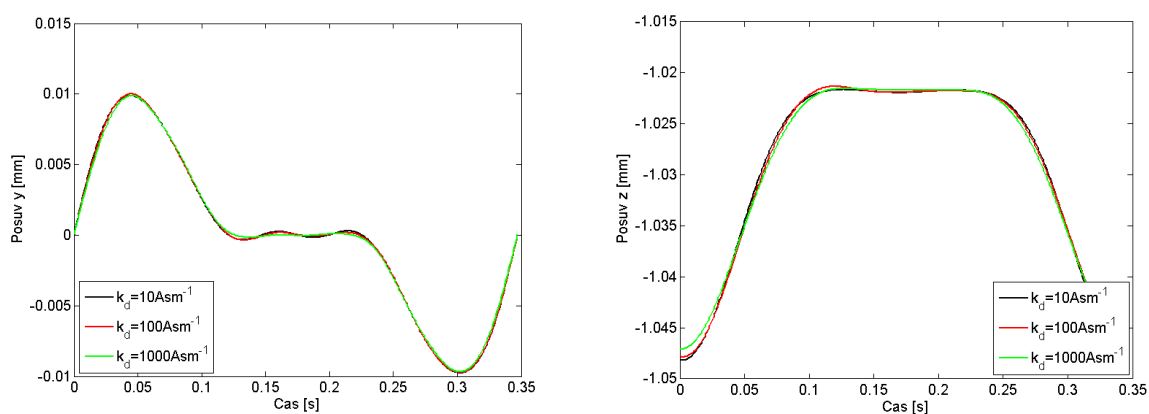
Testovací rotorová soustava z obr. 3 se skládá z hřídele (HR), který je poháněn elektromotorem (EM) přes spojku (SP) a dvou disků (D1, D2) nasazených na převíslém konci hřídele. Spojení rotoru se základovou deskou (ZD) je provedeno pomocí dvou radiálních AML (ML1 a ML2). Šikmá trhlina (TR) se nachází za D1 na straně

ML2. Rotorová soustava je uložena ve dvou stejných radiálních AML ložiskách složených ze čtyř elektromagnetů rozložených rovnoměrně po obvodu ložiska, jejichž parametry jsou

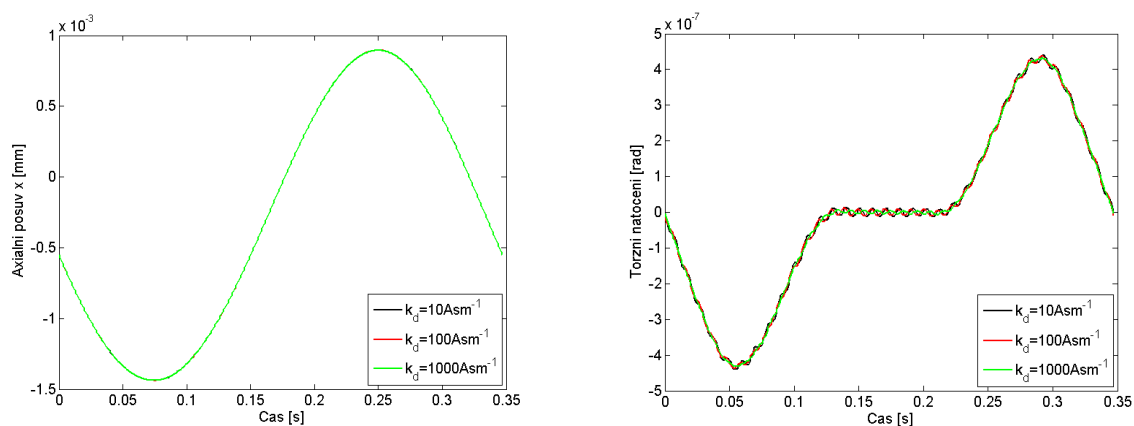
uvedeny v práci Ferfecki (2005). Axiální a torzní kmitání rotorové soustavy zachycuje ložisko elektromotoru a jeho axiální tuhost je $k_x=1\cdot 10^5\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ a torzní tuhost je $k_t=1\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$.

Numerické simulace jsou provedeny na testovací rotorové soustavě (obr. 3) se šikmo a příčně orientovanou dýchající trhlinou o hloubce odpovídající 30% a 40% průměru hřídele (tj. $a=26.4\text{mm}$ a $a=35.2\text{mm}$). Nevývažky obou disků mají stejnou velikost a v počáteční poloze leží na kladné souřadnicové ose z (obr. 3) a poloha trhliny je orientována podle obr. 1 a otáčky rotorové soustavy jsou zvoleny o velikosti $18.1\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ tak, že leží pod polovinou prvních kritických ohybových otáček rotorové soustavy bez trhliny.

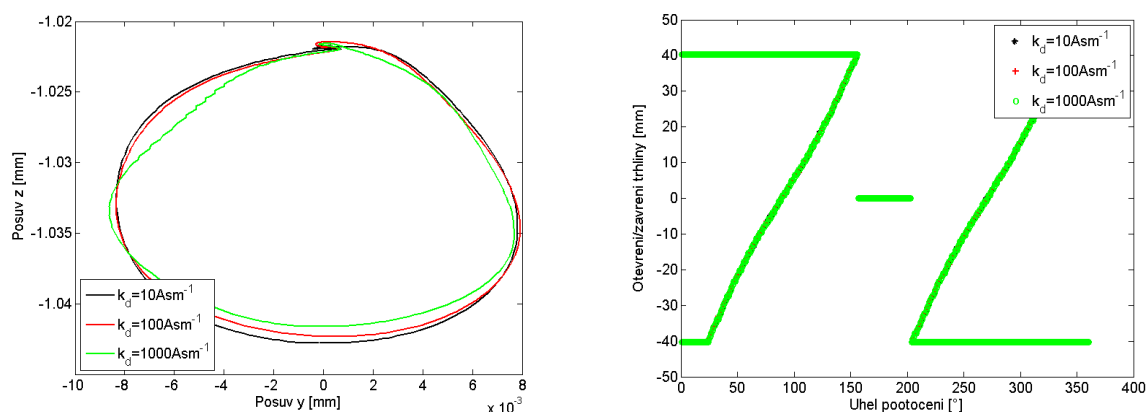
V první fázi numerických experimentů je prozkoumán vliv velikosti derivační konstanty k_d PD regulátoru proudu použitého k řízení AML. Na obr. 4 až obr. 6 jsou zobrazeny výsledky zjištěné v ustáleném stavu u rotorové soustavy s příčnou trhlinou ($\Theta=90^\circ$) a na obr. 7 a obr. 8 se šikmou trhlinou orientovanou pod úhlem $\Theta=45^\circ$ vzhledem ose rotoru a hloubkou odpovídající 30% průměru hřídele.



Obr. 4: Časový průběh posuvů ve vodorovném (vlevo) a svislém (vpravo) směru kmitání rotorové soustavy s příčnou trhlinou ($\Theta=90^\circ$) hloubkou 26.4mm

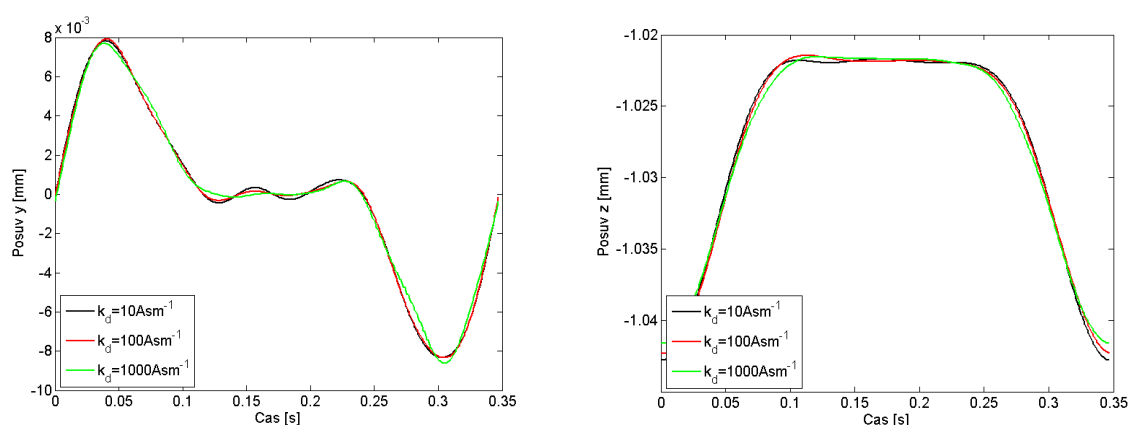


Obr. 5: Časový průběh axiálního (vlevo) a torzního kmitání (vpravo) rotorové soustavy s příčnou trhlinou hloubkou 26.4mm

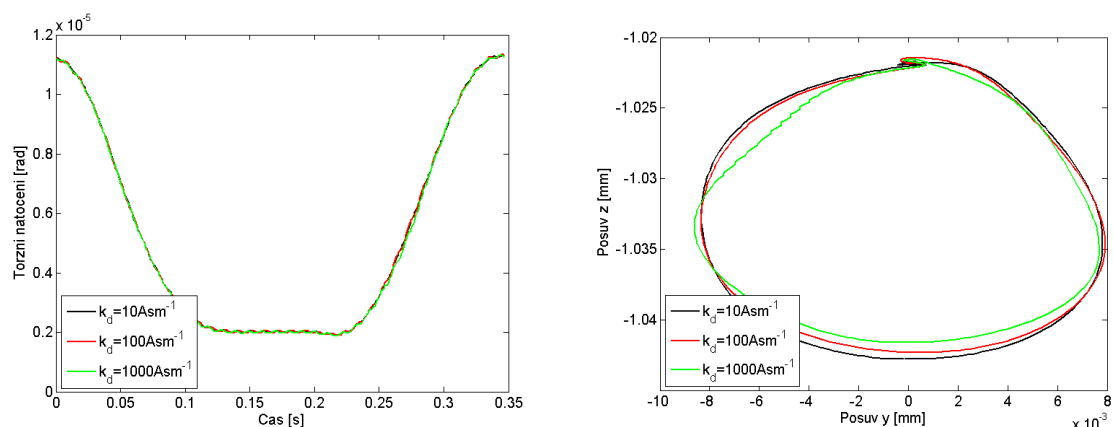


Obr. 6: Trajektorie středu hřídele v místě disku D2 (vlevo) a průběh otevření a zavření trhliny (vpravo) pro příčnou trhlínu hlubokou 26.4mm

Zjistilo se, že při zkoumaných otáčkách rotorové soustavy, kdy se nejvýrazněji v ustálené složce odezvy projevuje trhlina, velikost derivační konstanty regulátoru nemá významnější vliv na její odezvu, ani na její otevření, resp. zavření během jedné otáčky rotoru (pravý obr. 6). Pro zvětšující se hodnotu derivační konstanty se mírně zmenšuje velikost ustálené trajektorie středu hřídele (levý obr. 6 a pravý obr. 8), protože v pohybové rovnici rotorové soustavy přispívá $\mathbf{D}[k_d]$ k její matici tlumení. Axiální a torzní kmitání rotorové soustavy je důsledkem vzájemné vazby způsobené trhlinou mezi příčným kmitáním a velikost derivační konstanty regulátoru ovlivňuje jen nepatrně průběh torzní odezvy (obr. 5 a levý obr. 8).

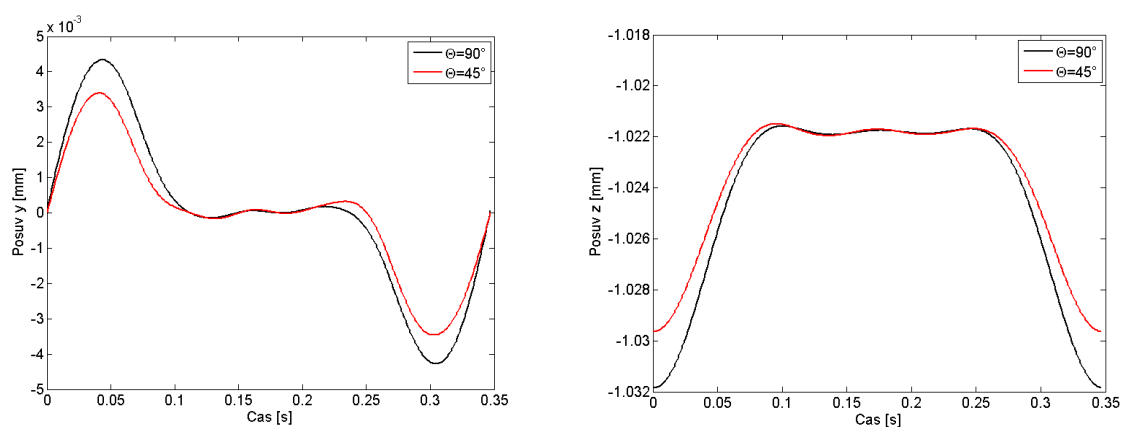


Obr. 7: Časový průběh posuvů ve vodorovném (vlevo) a svislém (vpravo) směru kmitání rotorové soustavy s šikmou trhlinou ($\theta=45^\circ$) hlubokou 26.4mm

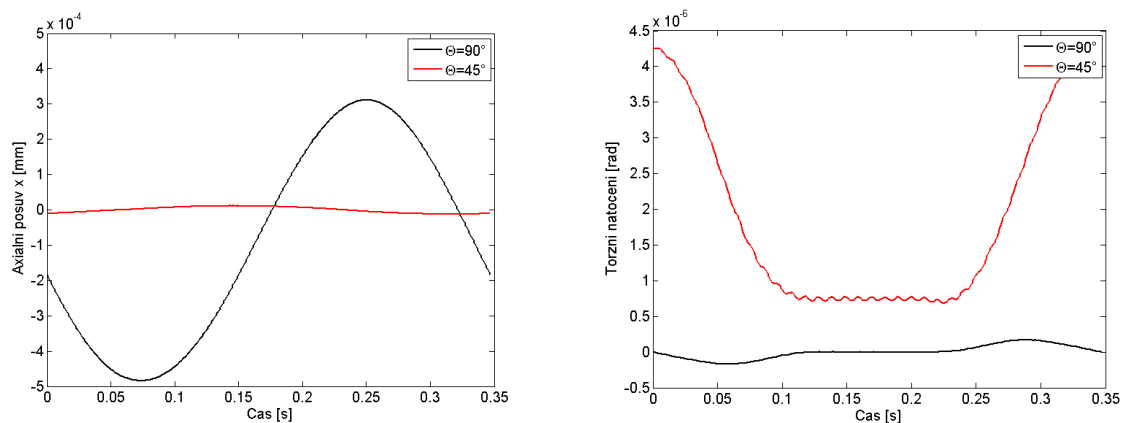


Obr. 8: Časový průběh torzního kmitání (vlevo) a trajektorie středu hřídele v místě disku D2 (vpravo) pro šikmou trhlinu ($\theta=45^\circ$) hlubokou 26.4mm

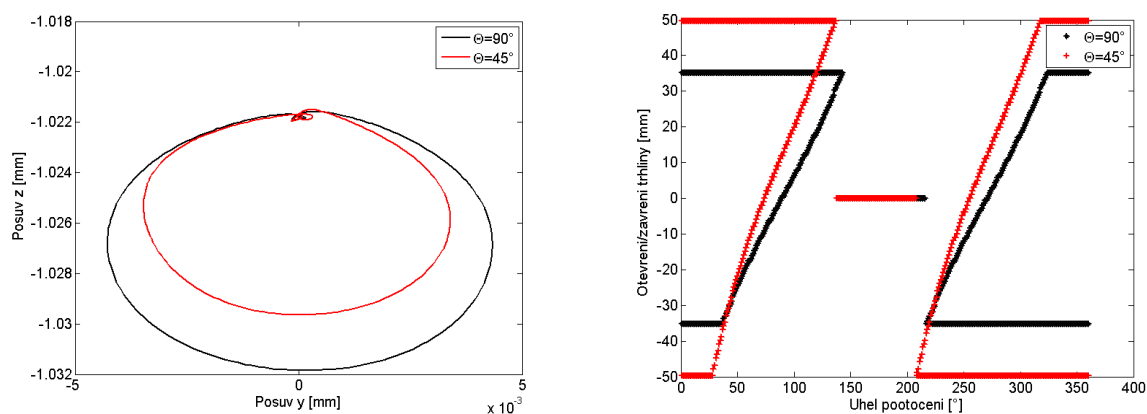
Výsledky ustálené složky odezvy rotorové soustavy s příčnou a šikmou trhlinou skloněnou pod úhlem $\theta=45^\circ$ hlubokou 30% a 40% průměru hřídele jsou vykresleny na obr. 9 až obr. 13. Časový průběh posuvů ve vodorovném a svislém směru kmitání rotorové soustavy se šikmou trhlinou se ukázal, že je trochu menší než u příčné trhliny (obr. 9, obr. 12 a levý obr. 11), ale průběhy axiálního a torzního kmitání jsou zcela odlišné (obr. 10 a obr. 13). Šikmo orientovaná trhlina v rotorové soustavě vybudila odezvu s větší amplitudou v torzním kmitání (pravý obr. 10 a obr. 13) a naopak odezvu s menší amplitudou v axiálním směru kmitání (levý obr. 10 a obr. 13) než u rotoru s příčnou trhlinou. Průběh otevření, resp. zavření šikmo orientované trhliny je v tomto případě podobného charakteru jako u příčné trhliny viz pravý obr. 11.



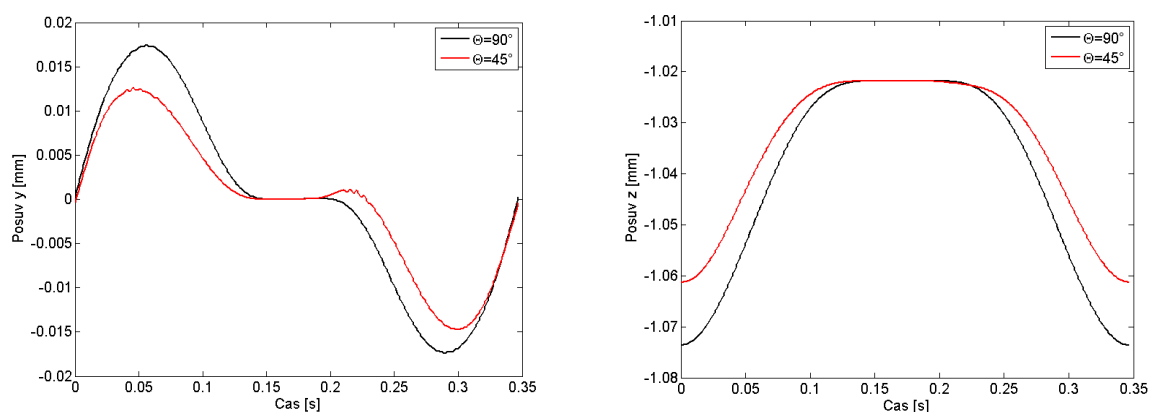
Obr. 9: Časový průběh posuvů ve vodorovném (vlevo) a svislém (vpravo) směru kmitání rotorové soustavy s trhlinou hlubokou 26.4mm a $k_d=10\text{Asm}^{-1}$



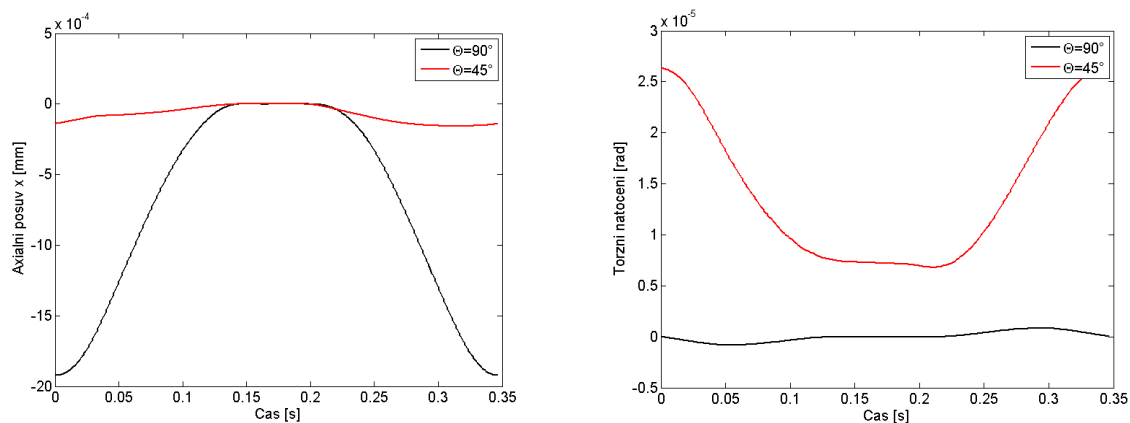
Obr. 10: Časový průběh axiálního (vlevo) a torzního kmitání (vpravo) rotorové soustavy s trhlinou hlubokou 26.4mm a $k_d=10\text{Asm}^{-1}$



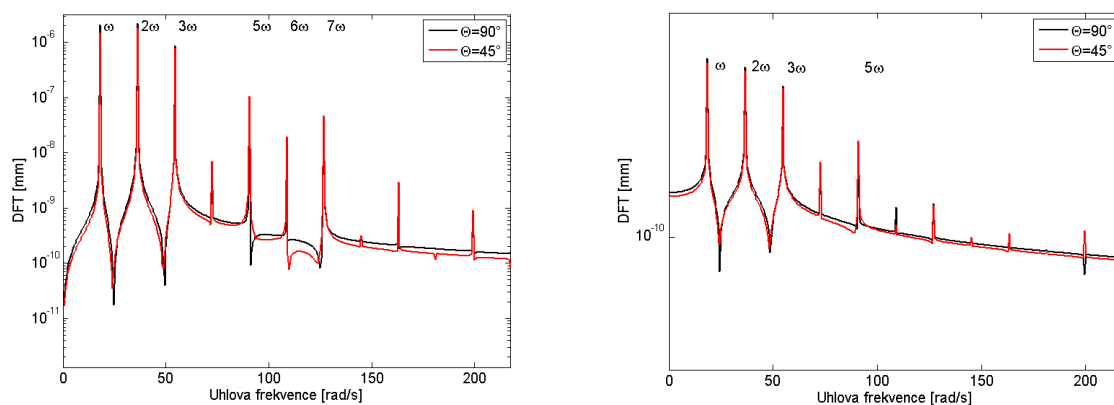
Obr. 11: Trajektorie středu hřídele v místě disku D2 (vlevo) a průběh otevření a zavření trhliny (vpravo) u rotorové soustavy s trhlinou hlubokou 26.4mm a $k_d=10\text{Asm}^{-1}$



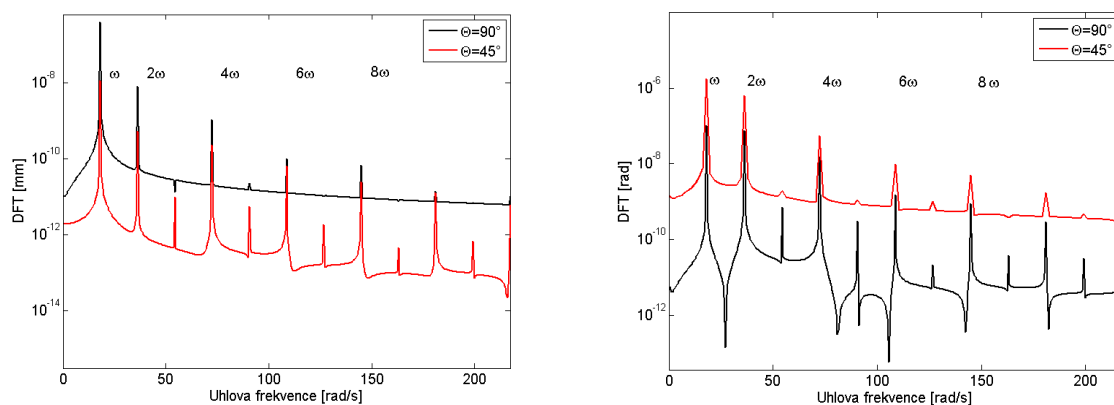
Obr. 12: Časový průběh posuvů ve vodorovném (vlevo) a svislém (vpravo) směru kmitání rotorové soustavy s trhlinou hlubokou 35.2mm a $k_d=10\text{Asm}^{-1}$



Obr. 13: Časový průběh axiálního (vlevo) a torzního kmitání (vpravo) rotorové soustavy s trhlinou hlubokou 35.2mm a $k_d=10\text{Asm}^{-1}$



Obr. 14: Fourierova transformace z časového průběhu posuvů ve vodorovném (vlevo) a ve svislém směru kmitání (vpravo) pro trhlinu hlubokou 26.4mm a $k_d=10\text{Asm}^{-1}$



Obr. 15: Fourierova transformace z axiálního (vlevo) a torzního kmitání (vpravo) pro trhlinu hlubokou 26.4mm a $k_d=10\text{Asm}^{-1}$

Na obr. 14 a obr. 15 jsou uvedeny frekvenční spektra vypočítané Fourierovou transformací z vybraných časových průběhů posuvů. I když u šikmé trhliny např. síla působící

v ose rotace prvku přispívá k I. a III. módu jejího zatížení, tak se v uvažovaných frekvenčních spektrech vybudily jen celistvé násobky základní otáčkové frekvence a v vodorovném a svislém směru kmitání jsou vzájemné poměry špiček skoro stejné jako u příčně orientované trhliny. Spektrum odezvy axiálního a torzního kmitání šikmo orientované trhliny je složeno z většího počtu vyšších násobků základní otáčkové frekvence než je tomu ve spektru odezvy příčné trhliny obr. 15, protože některé zatěžující účinky působící na hranu šikmé trhliny ovlivňují současně několik módů trhliny.

4. Závěry

V příspěvku je pomocí numerických simulací zkoumána ustálená složka odezvy rotorové soustavy uložené v radiálních AML s hřídelem poškozeným únavovou trhlinou šikmo orientovanou k jeho ose. Pohybová rovnice rotorové soustavy je sestavena pro rotor diskretizovaný hřídelovými konečnými prvky s 6 stupni volnosti v uzlu, maticí lokální poddajnosti trhliny odvozenou pro všechny “cross-coupling” členy způsobenými šikmou orientací trhliny a radiálními AML zahrnutými s nelineárním vazbovým vektorem. Z důvodu využití dýchajícího modelu trhliny je matice tuhosti rotorové soustavy v pohybové rovnici závislá na vektoru zobecněných posuvů. Na základě těchto podkladů je v prostředí MATLABu vytvořen algoritmus využívající přímé integrace k výpočtu odezvy rotorové soustavy na buzení odstředivými silami způsobenými nevývažky disků. Provedenými numerickými experimenty se zjistilo, že pro uvažované podmínky není významných rozdílů v ustálené složce odezvy příčného kmitání rotorové soustavy se šikmou a příčnou trhlinou. Bez buzení torzním momentem se v odezvě vybudily jen celistvé násobky základní otáčkové frekvence a ani změna parametru PD regulátoru neměla výraznější vliv na vypočítaný průběh odezvy. A v případě torzní, resp. axiální odezvy rotorové soustavy se šikmou trhlinou se vybudila výraznější, resp. slabší odezva než pro příčnou trhlinu.

Poděkování

Tento příspěvek byl vypracován za podpory GA ČR (postdoktorského grantu číslo 101/07P368) a výzkumného záměru MSM6198910027 s názvem Výpočetně náročné počítačové simulace a optimalizace.

Literatura

Darpe, A. K. (2007) Coupled Vibration of a Rotor with Slant Crack. *Journal of Sound and Vibration*, 305, pp. 172-193.

Darpe, A. K. (2007) Dynamics of a Jeffcott Rotor with Slant Crack. *Journal of Sound and Vibration*, 303, pp. 1-28

Darpe, A. K. & Gupta, K. & Chawla, A. (2004) Coupled Bending, Longitudinal and Torsional Vibrations of a Cracked Rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 269, pp. 33-60.

Ferfecki, P. (2005) Počítačové modelování rotorové soustavy uložené v radiálních aktivních magnetických ložiskách. Ph.D. thesis. Ostrava, VŠB-TU Ostrava, Fakulta strojní. ISBN 80-248-0872-2.

Sekhar, A. S. & Prasad, P. B. (1997) Dynamic Analysis of a Rotor System Considering a Slant Crack in the Shaft. *Journal of Sound and Vibration*, 208, 3, pp. 457-474.