

LOCALIZATION PROPERTIES OF ISOTROPIC DAMAGE MODELS

M. Horák, M. Jirásek¹

Summary: *Continuum damage mechanics provides an appropriate modeling framework for materials weakened by evolving defects. However, local damage models fail to provide an objective description of the material behavior after the loss of ellipticity, which can be detected by classical methods of localization analysis based on the acoustic tensor. This paper presents analysis of localization properties of the family of isotropic damage models with one scalar damage variable driven by the equivalent strain, and also of a more sophisticated model proposed by Comi and Perego (2001) and designed specifically for concrete. Necessary conditions for the formation of a weak discontinuity (jump in strain) are derived and the dependence of the orientation of potential discontinuity surface and of the critical tangent modulus on the stress state is discussed. The results are confirmed by finite element simulations.*

1. Úvod

Pro popis porušování kvazikřehkých materiálů (jako je například beton) je zapotřebí konstitutivní zákon se změkčením. Jak je známo, změkčení může vést k lokalizaci nepružné deformace. Pro tradiční modely založené na lokální mechanice kontinua může docházet k nerealistickým jevům, jako je lokalizace do libovolně malých zón, při níž se disipovaná energie blíží k nule. Takové výsledky nejsou fyzikálně přijatelné. Další obtíže nastávají při numerickém řešení metodou konečných prvků, neboť výsledky velmi silně závisejí na velikosti prvků a dochází k patologické závislosti řešení na použité síti.

Z matematického hlediska jde zprvu o úlohu s eliptickým operátorem, ale změkčování vede ke ztrátě eliptičnosti a v jejím důsledku k již zmíněným nesrovnalostem. Je tedy velice důležité vědět, v jakých případech jsou modely mechaniky poškození schopné objektivně popsat reálné chování materiálu. Z tohoto důvodu je užitečné zabývat se podmínkami, za kterých dochází k lokalizaci nepružné deformace.

Hlavním cílem této práce je popsat nutné podmínky pro vznik slabých nespojitostí (tj. nespojitostí v poli deformace) při použití izotropních modelů poškození dvou typů:

- modelů s jedním skalárním parametrem poškození a s různými definicemi ekvivalentní deformace (Mazarsova, Rankinova, upravená Misesova),
- modelu pro beton se dvěma skalárními parametry, který navrhli Comi a Perego (2001).

¹ Bc. Martin Horák, Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc., Department of Mechanics, Faculty of Civil Engineering Czech Technical University in Prague, 166 29 Prague, Czech Republic, nitramkaroh@seznam.cz

2. Izotropní modely poškození

2.1. Modely s jedním skalárním parametrem poškození

Tato skupina modelů je popsána konstitutivním vztahem

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega) \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor napětí, $\boldsymbol{\varepsilon}$ je tenzor deformace, \mathbf{D}_e je tenzor pružné tuhosti a ω je vnitřní proměnná popisující poškození. Rozvoj poškození je řízen zákonem poškození

$$\omega = g(\kappa) \quad (2)$$

a zatěžovacími–odtěžovacími podmínkami

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) \equiv \varepsilon_{eq}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \kappa \leq 0, \quad \dot{\kappa} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) \dot{\kappa} = 0 \quad (3)$$

kde f je zatěžovací funkce, g je funkce poškození související s tvarem pracovního diagramu pro jednoosou napjatost, ε_{eq} je ekvivalentní deformace (tj. skalární míra hladiny dosažené deformace) a vnitřní proměnná κ představuje maximální hodnotu ekvivalentní deformace dosaženou v dosavadním průběhu deformačního procesu. Konkrétní volba výrazu pro ekvivalentní deformaci silně ovlivňuje tvar obálky pevnosti a také lokalizační vlastnosti modelu, jak bude předvedeno později.

2.2. Model Comi–Perego

Tento izotropní model se dvěma parametry poškození je vhodný pro popis betonu. Podle něj je objemový modul pružnosti K redukován faktorem $(1 - \omega_t)(1 - \omega_c)$, pokud je objemová část deformace $\varepsilon_V = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ kladná, respektive $(1 - \omega_c)$, pokud je záporná. Smykový modul G je vždy redukován faktorem $(1 - \omega_t)(1 - \omega_c)$. Vztah mezi napětím a deformací je vhodné rozdělit na objemové a tvarové změny:

$$\sigma_m = (1 - \omega_c) K [(1 - \omega_t) \langle \varepsilon_V \rangle - \langle -\varepsilon_V \rangle] \quad (4)$$

$$\mathbf{s} = (1 - \omega_t)(1 - \omega_c) 2G \mathbf{e} \quad (5)$$

Přitom $\sigma_m = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$ je střední (hydrostatické) napětí, \mathbf{s} je deviatorická část tenzoru napětí a \mathbf{e} je deviatorická část tenzoru deformace. Výraz $\langle \varepsilon_V \rangle$ značí kladnou část objemové deformace a $\langle -\varepsilon_V \rangle$ její zápornou část. Pro $\varepsilon_V > 0$ můžeme rovnice (4) a (5) přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega_t) \mathbf{D}_e^c : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

kde

$$\mathbf{D}_e^c = \left(K - \frac{2}{3} G^c \right) \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} + 2G^c \mathbf{I} \quad (7)$$

je tenzor sečné tuhosti, $G^c = (1 - \omega_c)G$ je smykový modul redukováný tlakovým poškozením, $\boldsymbol{\delta}$ je jednotkový tenzor 2. řádu a \mathbf{I} je symetrický jednotkový tenzor 4. řádu.

Na rozdíl od předešlých modelů nejsou parametry poškození přímo závislé na ekvivalentní deformaci, ale jejich vývoj je určen složitější zatěžovací funkcí. Každý parametr poškození je sružený s jinou zatěžovací funkcí, takže vývoj tahového a tlakového poškození je nezávislý.

Zatěžovací funkce byly původně definovány v prostoru napětí, ale po dosazení z rovnic (4)–(5) je lze přepsat v závislosti na deformaci a poškození:

$$f_t(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) = 4(1 - \omega_t)^2(1 - \omega_c)^2 G^2 J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) - 9(1 - \omega_c)^2 K^2 a_t [(1 - \omega_t)^2 \langle \varepsilon_V \rangle^2 + \langle -\varepsilon_V \rangle^2] + 3(1 - \omega_c) K b_t r_t(\omega_t) [(1 - \omega_t) \langle \varepsilon_V \rangle - \langle -\varepsilon_V \rangle] - (1 - \alpha \omega_c) k_t r_t^2(\omega_t) \quad (8)$$

$$f_c(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) = 4(1 - \omega_t)^2(1 - \omega_c)^2 G^2 J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + 9(1 - \omega_c)^2 K^2 a_c [(1 - \omega_t)^2 \langle \varepsilon_V \rangle^2 + \langle -\varepsilon_V \rangle^2] + 3(1 - \omega_c) K b_c r_c(\omega_c) [(1 - \omega_t) \langle \varepsilon_V \rangle - \langle -\varepsilon_V \rangle] - k_c r_c^2(\omega_c) \quad (9)$$

kde $J_2 = \boldsymbol{e} : \boldsymbol{e} / 2$ je druhý invariant deviatorické části deformace, $\alpha, a_t, a_c, b_t, b_c, k_t$ a k_c jsou nezáporné parametry a r_t a r_c jsou bezrozměrné funkce, které souvisejí s tvarem pracovního diagramu v jednoosém tahu a jednoosém tlaku. Případy, kdy obě funkce poškození nabývají záporných hodnot, odpovídají pružnému stavu a poškození zůstává konstantní. Jakmile je dosaženo hodnoty $f_t = 0$, materiál se začne poškozovat v tahu a ω_t začne růst. Obdobně ω_c roste, pokud je $f_c = 0$. Kladné hodnoty zatěžovacích funkcí jsou nepřípustné. To vše lze popsat podmínkami

$$f_t(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) \leq 0, \quad \dot{\omega}_t \geq 0, \quad f_t(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) \dot{\omega}_t = 0 \quad (10)$$

$$f_c(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) \leq 0, \quad \dot{\omega}_c \geq 0, \quad f_c(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) \dot{\omega}_c = 0 \quad (11)$$

Jak již bylo zmíněno, tvar pracovního diagramu závisí na bezrozměrných funkcích r_t a r_c . Jejich konkrétní podoba, kterou navrhli Comi a Perego, je

$$r_i(\omega_i) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{\sigma_{ei}}{\sigma_{0i}}\right) \left(1 - \frac{\omega_i}{\omega_{0i}}\right)^2 & \text{pro } \omega_i < \omega_{0i} \\ \left[1 - \left(\frac{\omega_i - \omega_{0i}}{1 - \omega_{0i}}\right)^{c_i}\right]^{0.75} & \text{pro } \omega_i \geq \omega_{0i} \end{cases} \quad i = t, c \quad (12)$$

Přitom index i nabývá hodnot t nebo c , σ_{ei} představuje mezní pružné napětí (mez úměrnosti), σ_{0i} je maximální napětí na vrcholu pracovního diagramu (pevnost), ω_{0i} je odpovídající poškození a c_i je bezrozměrný parametr.

3. Lokalizační podmínka

Základním úkolem lokalizační analýzy je najít podmínku, při jejímž splnění může dojít ke vzniku slabých nespojitostí, tj. skoků v poli deformace, při zachování spojitosti pole posunutí. Slabé nespojitosti typicky vznikají na plochách oddělujících oblast lokalizované nepružné deformace od oblastí, které se pružně odtěžují. Nutnou podmínkou vzniku slabé nespojitosti (Hill (1958); Rudnicki a Rice (1975)) je singularita tzv. lokalizačního (akustického) tenzoru \boldsymbol{Q} , který závisí na tenzoru tečné tuhosti \boldsymbol{D} podle vztahu

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \quad (13)$$

kde \boldsymbol{n} je jednotkový vektor kolmý na potenciální plochu nespojitosti. Pokud je determinant lokalizačního tenzoru v daném bodě pro všechny jednotkové vektory \boldsymbol{n} kladný, všechny složky rychlosti deformace musejí zůstat spojitě a k lokalizaci nedochází. K lokalizaci může dojít pouze, pokud existuje nějaký jednotkový vektor \boldsymbol{n} , pro který

$$\det \boldsymbol{Q} = 0 \quad (14)$$

Z matematického hlediska je tato podmínka ekvivalentní již zmíněné ztrátě eliptičnosti. Je-li splněna, má rovnice $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{m} = \mathbf{0}$ netriviální řešení \boldsymbol{m} , které charakterizuje mód nespojitosti.

4. Lokalizační analýza modelů poškození

Ze základních rovnic a rychlostního tvaru rovnice (1) pro izotropní model s jedním skalárním parametrem, resp. z rovnic (4)–(5) pro model Comi–Perego, odvodíme tenzor tečné (okamžité) tuhosti. Abychom mohli lokalizační podmínku odvodit pro oba modely současně, omezíme se u modelu Comi–Perego na situaci, kdy je $\varepsilon_V > 0$ a tlakové poškození je $\omega_c = 0$. Pracujeme tedy s rovnicí (6). Tenzor tečné tuhosti má pak pro oba modely stejný tvar

$$\mathbf{D}_{ed} = (1 - \omega)\mathbf{D}_e - g' \bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \boldsymbol{\eta} \quad (15)$$

Pro první skupinu modelů mají symboly v této rovnici následující význam: $g' = dg/d\kappa$ je derivace funkce poškození g , $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon}$ je efektivní napětí a $\boldsymbol{\eta} = \partial \varepsilon_{eq} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ je tenzor druhého řádu, který vznikl derivováním ekvivalentní deformace podle tenzoru deformace. Pro model Comi–Perego mají výrazy z rovnice (15) odlišný význam. Parametrem poškození $\omega = \omega_t$ se rozumí pouze tahová část poškození, tenzor pružné tuhosti \mathbf{D}_e je třeba nahradit tenzorem \mathbf{D}_e^c a veličiny $g' = g'_f = -\frac{1}{\partial f_t / \partial \omega_t}$ a $\boldsymbol{\eta} = \partial f_t / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ jsou odvozeny ze zatěžovací funkce f_t a závisí na deformaci a poškození.

Lokalizační tenzor odpovídající tečné tuhosti (15) má tvar

$$\mathbf{Q}_{ed} = (1 - \omega)\mathbf{Q}_e - g'(\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \otimes (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{Q}_u - g' \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n \otimes \boldsymbol{\eta}_n \quad (16)$$

kde $\mathbf{Q}_u = (1 - \omega)\mathbf{Q}_e$ je sečný akustický tenzor a pro zjednodušení zápisu jsme označili $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = \mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ a $\boldsymbol{\eta}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta}$. Jak ukázal Jirásek (2007), lokalizační tenzor \mathbf{Q}_{ed} ve tvaru (16) je singulární, pokud

$$g' \boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = 1 \quad (17)$$

Součin $\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$ závisí na elastických konstantách, na okamžitém stavu materiálu a na směru plochy nespojitosti, určeném vektorem \mathbf{n} . Pro daný materiál a jeho stav je to spojitá funkce proměnné \mathbf{n} , definovaná na kompaktní množině (všech jednotkových vektorů), která tudíž pro jisté \mathbf{n} nabývá maxima. Minimální hodnota g' , při které dochází ke ztrátě eliptičnosti, je

$$g'_{crit} = \frac{1}{\max_{\|\mathbf{n}\|=1} (\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n)} \quad (18)$$

Pokud je $g' < g'_{crit}$, lokalizační tenzor je pro každé \mathbf{n} regulární a ke vzniku slabé nespojitosti nemůže dojít. V kritickém případě $g' = g'_{crit}$ je lokalizační tenzor singulární právě pro jeden vektor \mathbf{n} , který maximalizuje výraz $\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$. Konečně v postkritickém případě $g' > g'_{crit}$ existuje nekonečně mnoho vektorů \mathbf{n} , pro které je \mathbf{Q}_{ed} singulární.

5. Lokalizační analýza v jedné dimenzi

Pro získání lepší představy o fyzikálním významu kritické hodnoty g' je užitečné provést lokalizační analýzu izotropního modelu poškození s jedním skalárním parametrem pro úlohu formulovanou v jedné prostorové dimenzi. V tomto případě všechny tenzory nahradíme skalárními veličinami. Tenzor pružné tuhosti \mathbf{D}_e nahradíme Youngovým modulem E , ekvivalentní deformace ε_{eq} je rovna deformaci ε a tenzor $\boldsymbol{\eta}$ přejde na skalár $\eta = d\varepsilon_{eq}/d\varepsilon = 1$. Jednotkový vektor \mathbf{n} , který určuje plochu nespojitosti, je také nahrazen skalárem $n = 1$. Ještě je třeba vyhodnotit efektivní napětí $\bar{\sigma} = E\varepsilon$. Po dosazení všech těchto veličin do (15) dostaneme tečnou tuhost

$$E_{ed} = (1 - \omega)E - g'E\varepsilon = (1 - \omega - g'\varepsilon)E \quad (19)$$

Lokalizační podmínku $\det \mathbf{Q}_{ed} = 0$ nahradíme podmínkou $E_{ed} = 0$, která znamená, že k lokalizaci dochází na vrcholu pracovního diagramu, tedy při dosažení maximálního napětí. Odpovídající hodnota g'_{crit} odpovídající vymizení tečného modulu je

$$g'_{peak} = \frac{1 - \omega}{\varepsilon} \quad (20)$$

Pro model Comi–Perego je situace o něco komplikovanější. Tenzor η můžeme také nahradit skalárem, který má však v tomto případě složitější tvar

$$\eta = (1 - \omega_t)^2(1 - \omega_c)^2 \left(\frac{2}{3} - 2a_t \right) E^2 \varepsilon + (1 - \omega_t)(1 - \omega_c) E b_t r_t(\omega_t) \quad (21)$$

Tečná tuhost pak bude dána vztahem

$$E_{ed} = (1 - \omega)E - g'E\varepsilon\eta = (1 - \omega - g'\varepsilon\eta)E \quad (22)$$

I v tomto případě k lokalizaci dojde přesně na vrcholu pracovního diagramu.

6. Lokalizační analýza za rovinné napjatosti

Lokalizační analýza v jedné dimenzi byla velmi snadná, neboť všechny tenzory jsme mohli nahradit skaláry a nebylo tedy třeba provádět maximalizaci funkce $\eta_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\sigma}_n$ přes všechny potenciální plochy nespojitosti. V této části se budeme zabývat analýzou ve dvou rozměrech za předpokladu rovinné napjatosti. Tenzor pružné tuhosti za rovinné napjatosti má tvar

$$\mathbf{D}_e = 2G \left(\mathbf{I} + \frac{\nu}{1 - \nu} \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \right) \quad (23)$$

kde ν je Poissonův součinitel. Příslušný elastický akustický tenzor je

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{n} = G \left(\boldsymbol{\delta} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) \quad (24)$$

Pro dosažení do (18) potřebujeme vypočítat inverzi tenzoru $\mathbf{Q}_u = (1 - \omega)\mathbf{Q}_e$,

$$\mathbf{Q}_u^{-1} = \frac{1}{1 - \omega} \mathbf{Q}_e^{-1} = \frac{1}{(1 - \omega)G} \left(\boldsymbol{\delta} - \frac{1 + \nu}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) \quad (25)$$

Pro přehlednost zavedeme funkci

$$f(\mathbf{n}) = \eta_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\sigma}_n = \frac{1}{(1 - \omega)G} \left[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} - \frac{1 + \nu}{2} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \right] \quad (26)$$

Pokud tuto funkci přepíšeme ve složkovém zápisu vzhledem k hlavním směrům tenzorů $\boldsymbol{\sigma}$ a $\boldsymbol{\eta}$ (oba mají stejné hlavní směry), dostaneme polynom 4. stupně

$$f(n_1, n_2) = \frac{1}{(1 - \omega)G} \left[\eta_1 \bar{\sigma}_1 n_1^2 + \eta_2 \bar{\sigma}_2 n_2^2 - \frac{1 + \nu}{2} (\eta_1 n_1^2 + \eta_2 n_2^2)(\bar{\sigma}_1 n_1^2 + \bar{\sigma}_2 n_2^2) \right] \quad (27)$$

Tento polynom musíme maximalizovat s omezením $n_1^2 + n_2^2 = 1$. Označíme-li $n_1^2 = N_1$ a položíme $N_2 = 1 - N_1$, přejde funkce f na kvadratickou funkci jedné proměnné N_1 . Musíme ale zabezpečit splnění omezující podmínky $0 \leq N_1 \leq 1$.

Za předpokladu $\bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2$ a $\eta_1 \geq \eta_2$ je maximalizovaná funkce konkávní a globálního maxima nabývá pro

$$N_{1,crit} = \frac{\eta_1 \bar{\sigma}_1 + \nu \eta_2 \bar{\sigma}_1 - (1 + \nu)(\eta_1 \bar{\sigma}_2 + \eta_2 \bar{\sigma}_1)/2}{(1 + \nu)(\eta_1 - \eta_2)(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)} \quad (28)$$

Pokud je tato hodnota záporná, je hledaným řešením $N_{1,crit} = 0$ a plocha nespojitosti je kolmá na směr největšího hlavního napětí. Pokud je větší než 1, je řešením $N_{1,crit} = 1$ a plocha nespojitosti je kolmá na směr nejmenšího hlavního napětí. Kritická hodnota g' se vypočte jako $g'_{crit} = 1/f(n_{1,crit}, n_{2,crit})$, kde $n_{1,crit} = \sqrt{N_{1,crit}}$ a $n_{2,crit} = \sqrt{1 - N_{1,crit}}$. Lepší představu o chování modelu než g'_{crit} nám dá kritická hodnota tečného modulu

$$E_{ed,crit} = (1 - \omega - g'_{crit} \varepsilon_{eq}) E = \left(1 - \omega - \frac{\varepsilon_{eq}}{f(n_{1,crit}, n_{2,crit})} \right) E \quad (29)$$

Závislost lokalizačních vlastností na volbě výrazu pro ekvivalentní deformaci ukážeme na třech případech:

- Mazarsova ekvivalentní deformace

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \varepsilon_I \rangle^2} \quad (30)$$

$$\eta = \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\varepsilon_{eq}} \quad (31)$$

- Rankinova ekvivalentní deformace

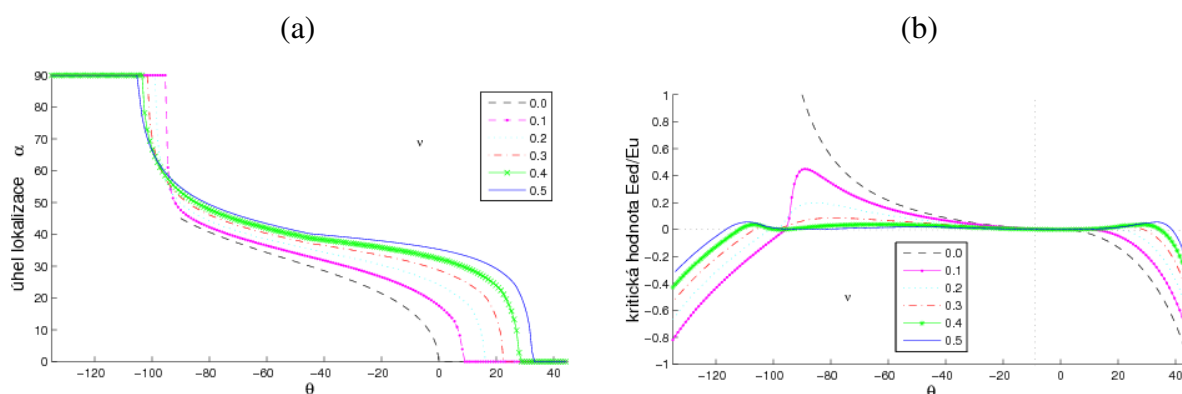
$$\varepsilon_{eq} = \frac{\bar{\sigma}_1}{E} \quad (32)$$

$$\eta = \frac{1}{E} \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \varepsilon} : \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{E} (\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1) : \mathbf{D}_e = \frac{1}{1 + \nu} \left(\frac{\nu}{1 - 2\nu} \boldsymbol{\delta} + \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 \right) \quad (33)$$

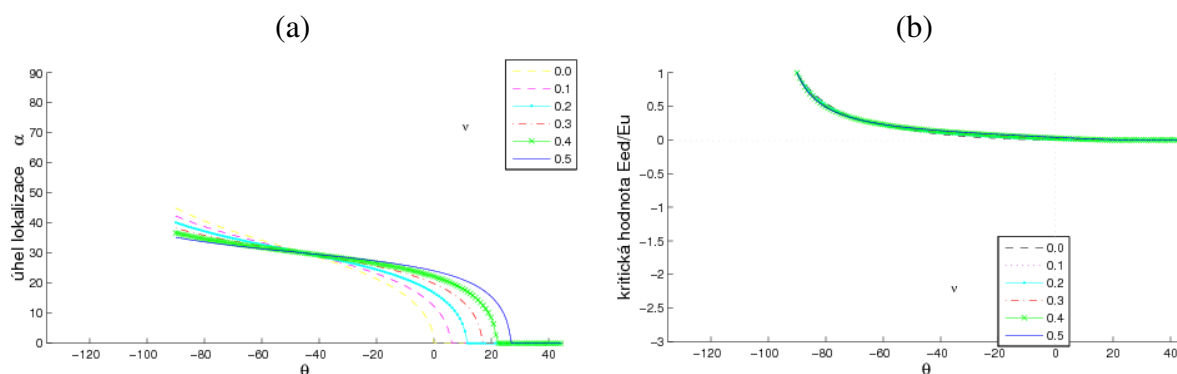
- upravená von Misesova ekvivalentní deformace

$$\varepsilon_{eq} = \frac{(k-1)I_{1\varepsilon}}{2k(1-2\nu)} + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{1\varepsilon}^2 + \frac{12kJ_{2\varepsilon}}{(1+\nu)^2}} \quad (34)$$

Výsledky lokalizační analýzy pro tyto tři případy za rovinné napjatosti jsou znázorněny na obrázcích 1-3. Směr potenciální plochy nespojitosti je popsán lokalizačním úhlem α , což je úhel mezi normálou na plochu nespojitosti a hlavní osou, odpovídající největšímu hlavnímu napětí. Tento úhel se vypočítá jako $\alpha = \arccos n_{1,crit} = \arccos \sqrt{N_{1,crit}}$. Místo hodnoty g'_{crit} je vykreslen kritický poměr tečného a sečného modulu $E_{ed,crit}/E_u$. Jak lokalizační úhel, tak hodnota kritického modulu závisejí na zvoleném typu ekvivalentní deformace, Poissonově součiniteli a napjatosti. Napjatost je charakterizována poměrem $\bar{\sigma}_2/\bar{\sigma}_1$. Pro její názorný popis zavedeme v rovině hlavních napětí polární úhel θ , pro který platí $\bar{\sigma}_1 = c \cos \theta$ a $\bar{\sigma}_2 = c \sin \theta$, kde $c = \sqrt{\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2}$ je nezáporné číslo. Pro $\bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2$ je $\theta \in [-135^\circ; 45^\circ]$. Hodnoty $\theta = -135^\circ, -90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$ odpovídají dvojosému tlaku, jednoosému tlaku, smyku, jednoosému tahu a dvojosému tahu.



Obrázek 1: Výsledky lokalizační analýzy pro Mazarsovu definici ekvivalentní deformace: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost kritického tečného modulu na typu namáhání

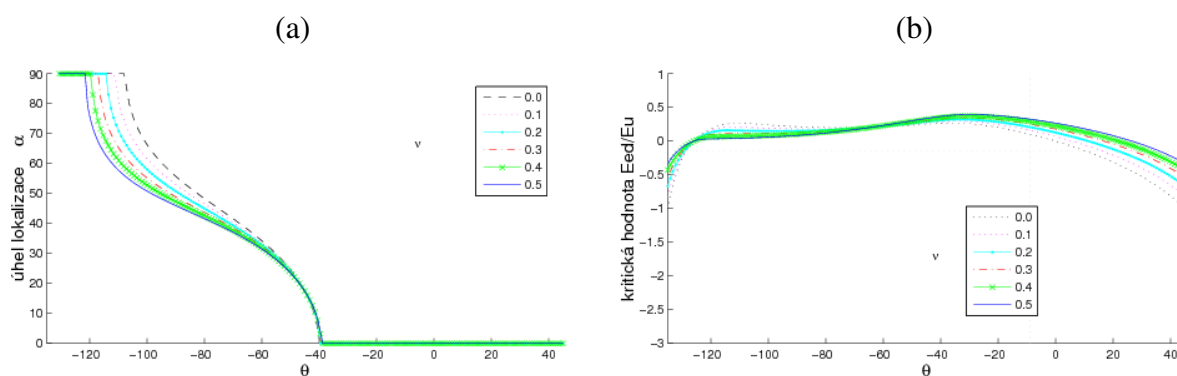


Obrázek 2: Výsledky lokalizační analýzy pro Rankinovu definici ekvivalentní deformace: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost kritického tečného modulu na typu namáhání

Výsledky lokalizační analýzy jsou poněkud překvapivé. Pro **Mazarsovu** definici ekvivalentní deformace (obrázek 1) je za jednoosého tahu lokalizační úhel nulový pouze v případě nulového Poissonova součinitele. Pro typickou hodnotu $\nu = 0.2$ je plocha nespojitosti odkloněná a neprochází tedy kolmo k hlavnímu napětí. Ještě více překvapující je kritická hodnota tečného modulu. V některých případech může k lokalizaci docházet dokonce ještě před dosažením vrcholu pracovního diagramu. Neplatí tedy příliš zjednodušená představa, že lokalizace nastává pouze při změkčování. Pro jednoosý tah je kritická hodnota tečného modulu rovna nule a lokalizaci lze očekávat na vrcholu pracovního diagramu.

Na obrázku 2 jsou zobrazeny lokalizační vlastnosti modelu s **Rankinovou** definicí ekvivalentní deformace. Pokud jsou obě hlavní napětí záporná, k lokalizaci nemůže docházet. To je logické, protože v tomto případě není ekvivalentní deformace podle Rankinovy definice kladná a nedochází vůbec k rozvoji poškození. Pro jednoosý tah je lokalizační úhel opět nulový pouze při nulovém Poissonově součiniteli. Ve většině případů je kritická hodnota tečného modulu kladná a k lokalizaci opět může docházet ve zpevňující části pracovního diagramu.

Nakonec uvažujme upravenou **von Misesovu** definici ekvivalentní deformace (obrázek 3). Na první pohled se zdají být tyto výsledky v dobrém souladu s naším očekáváním, například za jednoosého tahu je lokalizační úhel nulový a plocha nespojitosti je tedy kolmá ke směru



Obrázek 3: Výsledky lokalizační analýzy pro upravenou von Misesovu definici ekvivalentní deformace: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost kritického tečného modulu na typu namáhání

zatížení, avšak tečný modul dosahuje v tomto případě výrazně kladné hodnoty a lokalizace může nastat velmi brzy před dosažením vrcholu pracovního diagramu.

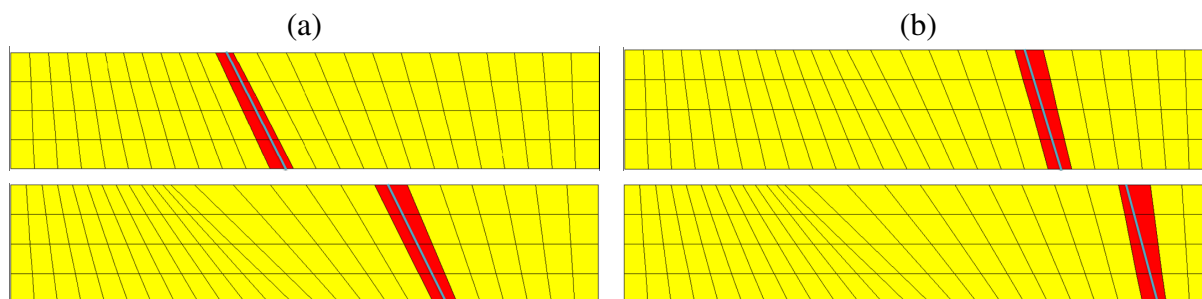
Vlastnosti modelu **Comi–Perego** závisejí na celé řadě parametrů. Lokalizační analýza byla provedena pro následující hodnoty (převzaté od autorů modelu): $E = 31.84$ GPa, $\nu = 0.2$, $a_t = 0.25$, $b_t = 3.16$ MPa, $k_t = 9.8$ MPa², $\sigma_{0t} = 2.882$ MPa, $\sigma_{et} = 1.729$ MPa, $\omega_{0t} = 0.3$, $c_t = 2$, $a_c = 0.003$, $b_c = 2.804$ MPa, $k_c = 233.4$ MPa², $\sigma_{0c} = 30.84$ MPa, $\sigma_{ec} = 15.42$ MPa, $\omega_{0c} = 0.555$, $c_c = 2$. Výsledky s takto zvolenými parametry se v podstatných rysech shodují s intuitivním očekáváním. Za jednoosého tahu i tlaku vychází lokalizační úhel kolmý ke směru největšího hlavního napětí. Za jednoosého tlaku dochází k lokalizaci na vrcholu pracovního diagramu, což odpovídá $\omega_c = 0.555$. Při jednoosém tahu ovšem dochází k lokalizaci až ve změkčující fázi pracovního diagramu, pro $\omega_t = 0.4411$.

7. Simulace lokalizace metodou konečných prvků

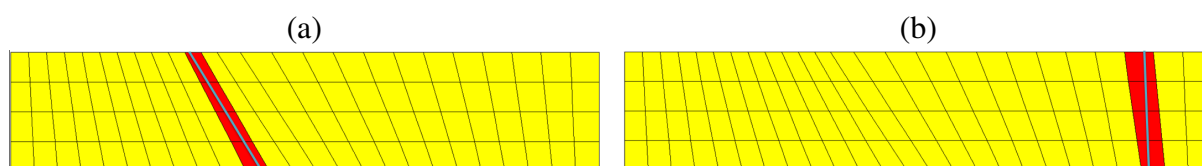
Některé výsledky získané teoretickou analýzou byly ověřeny numericky metodou konečných prvků. Simulovaný vzorek obdélníkového tvaru byl zatížen jednoosým tahem. Výpočty metodou konečných prvků byly provedeny za předpokladu rovinné napjatosti, prvky byly čtyřúhelníkové izoparametrické s bilineární aproximací a čtyřbodovou integrací. Poissonův součinitel byl pevně zvolen jako $\nu = 0.2$.

Bylo sestrojeno několik šikmých sítí, obsahujících natočené pásy prvků. Ukázalo se, že numerické řešení spontánně lokalizuje do vrstvy prvků, která je natočena o úhel velmi blízký úhlu předpovězenému teoretickou analýzou.

Obrázky 4–5 dokumentují vliv sítě konečných prvků na lokalizační vlastnosti. Na obrázku 4a jsou předvedeny výsledky pro dvě různé sítě s izotropním modelem poškození a Mazarsovou definicí ekvivalentní deformace. Lokalizované poškození je znázorněno červeně, modrá čára značí úhel určený teoretickou analýzou. Obdobně jsou prezentovány výsledky na obrázku 4b pro model s Rankinovou ekvivalentní deformací. Obrázek 5 ukazuje lokalizaci pro upravenou von Misesovu definici ekvivalentní deformace na stejné síti, pro různé hodnoty parametru k , který udává poměr pevností v jednoosém tlaku a tahu.



Obrázek 4: Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků na dvou různých sítích pro (a) Mazarsovu, (b) Rankinovu definici ekvivalentní deformace



Obrázek 5: Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků pro upravenou von Misesovu definici ekvivalentní deformace s poměrem pevností (a) $k = 1$, (b) $k = 10$

8. Poděkování

Autoři děkují za finanční podporu Grantové agentury České republiky. Článek vznikl v rámci projektu GAČR 106/08/1508.

9. Reference

- Comi, C. & Perego, U. 2001: Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, 6427-6454.
- Hill, R. 1958: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 6, 236-249.
- Jirásek, M. 2007: Mathematical analysis of strain localization. *Revue Européenne de Génie Civil*, special issue on Damage and Fracture in Geomaterials, vol. 11, 977-911.
- Rudnický, J.W. & Rice, J.R. 1975: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 23, 371-394.