

STABILITY ANALYSIS OF PLANE SERENDIPITY FINITE ELEMENT FOR EXPLICIT LINEAR ELASTODYNAMICS

R. Kolman*, J. Plešek*, D. Gabriel *

Summary: *The central difference method is widely used for the numerical solution of the transient elastodynamics problems by the finite element method. The effectiveness of this explicit conditional stable direct time integration methods is limited by using diagonal mass matrix, which entails significant computational savings and storage advantages. However, for the serendipity type element the construction of such diagonalized matrices is not uniquely defined and various class of lumped mass matrices can be assembled. In this paper the stability analysis for the plane square serendipity finite element is performed for various class of lumped mass matrices.*

1. Úvod

Při numerickém řešení přechodových úloh lineární elastodynamiky diskretizovaných metodou konečných prvků (MKP) je často využívána metoda centrálních diferencí (Dokainish et al., 1989). Tato explicitní metoda přímé numerické integrace pohybových rovnic je velmi efektivní ve spojení s diagonální maticí hmotnosti a navíc je podmíněně stabilní. To znamená, že časový krok je nutné volit nižší, než je určitá kritická hodnota závislá na typu konečného prvku a volbě diagonální matice hmotnosti. Nad touto mezní hodnotou časového kroku metoda centrálních diferencí produkuje nestabilní numerické výsledky a navíc jsou fyzikálně nesprávné. Přesnost a časová náročnost numerického řešení nezáleží pouze na počtu stupňů volnosti celé úlohy, ale také na zvolené velikosti integračního kroku. Na jedné straně je nutné volit časový krok dostatečně malý, aby se dosáhlo požadované přesnosti výpočtu. Na druhé straně by se neměl volit zbytečně nízké hodnoty, aby nenarůstal neúměrně čas výpočtu.

V práci (Mullen et al., 1983) byla odvozena podmínka stability pro jednorozměrný lineární konečný prvek při použití diagonální matice hmotnosti a kritická hodnota časového kroku pro tento typ prvku je vypočtena takto

$$\Delta t_{krit} = \frac{H}{c_0}, \quad (1)$$

kde H je délka prvku a c_0 označuje rychlost podélné elastické vlny pro jednorozměrnou úlohu. V práci (Belytschko et al., 1978) bylo prokázáno pro tento typ prvku, že při takto zvoleném

* Ing. Radek Kolman, Ing. Jiří Plešek, CSc., Ing. Dušan Gabriel, Ph.D., Ústav termomechaniky AV ČR, v.v.i., Dolejškova 1402/5, 182 00 Praha 8, tel. +420 266 053 441, e-mail kolman@it.cas.cz

časovém kroku jsou nejnižší disperzní chyby způsobené prostorovou a časovou diskretizací. S rostoucím časovým krokem se disperzní chyby tohoto typu potlačují a při kritické hodnotě Δt_{krit} téměř vymizí. Proto se pro metodu centrálních diferencí doporučuje integrovat pohybové rovnice s hodnotou časového kroku blízké kritické hodnotě.

Hodnota kritického časového kroku je pro každou výpočetní MKP síť různá, proto dále uvažujeme pouze případy strukturovaných sítí (pravidelné čtvercové sítě). Obecně platí, že kritický časový krok je pro jednotlivé typy konečného prvku odlišný a závisí hlavně na volbě diagonální matice hmotnosti. Jeho hodnota se nejčastěji vyjadřuje v bezrozměrném tvaru pomocí Courantova čísla Co , které má význam poměru dráhy proběhnuté elastickou vlnou za jeden časový krok ku délce hrany prvku. Pro rovinný čtvercový lineární prvek nabývá kritické Courantovo číslo hodnoty $Co_{krit} = 1$. U toho typu konečného prvku je matice hmotnosti jednoznačně určena. Pro její výpočet je možné použít tzv. metodu řádkových součtů (Zienkiewicz et al., 2000), kde diagonální prvky matice hmotnosti jsou dány řádkovými součty konzistentní matice hmotnosti.

U kvadratických (8-uzlových) rovinných prvků není situace takto jednoduchá. Diagonální matice hmotnosti není pro tento typ prvku jednoznačně definována a pro její sestavení nelze metodu řádkových součtů použít, protože generuje záporné diagonální prvky odpovídající uzlům ležících v rohu prvku. Takto vypočtená matice hmotnosti není pozitivně definitní a nelze ji pro transienční výpočet použít. Pro prvky vyšších řádů byly nalezeny různé diagonalizační algoritmy. Nejznámějším a nejpoužívanějším je HRZ diagonalizační algoritmus nazvaný podle autorů (Hinton, Rock a Zienkiewicz) popsáný v článku (Hinton et al., 1976). Tento algoritmus je založen na myšlence přeškálování diagonálních prvků konzistentní matice hmotnosti tak, že je zachována celková hmotnost prvku. HRZ algoritmus je prováděn na úrovni jednotlivých prvků a lze použít např. i pro skořepinové prvky.

Tento příspěvek si klade za cíl stanovit kritický časový krok pro výpočtovou síť složenou z rovinných čtvercových kvadratických konečných prvků za stavu rovinné deformace. Vzhledem k tomu, že pro tento typ prvku je možné sestavit celou řadu diagonálních matic hmotnosti, je pro její výpočet použita tzv. přímá metoda (Malkus et al., 1986). Tato diagonalizační metoda využívá symetrie čtvercových prvků a hmotnostní koeficienty jsou poté stanoveny z podmínky zachování celkové hmotnosti prvku. Jednotlivé diagonální matice hmotnosti se liší poměrem hmotnostních koeficientů odpovídajících uzlům ležících na hraně a v rohu prvku, přičemž se také mění hodnota kritického Courantova čísla. Hlavním výstupem příspěvku je graf přidružující jednotlivým diagonálním maticím hmotnosti kvadratického rovinného čtvercového konečného prvku kritické Courantovo číslo pro numerické řešení lineární úlohy elastodynamiky metodou centrálních diferencí.

2. Diskretizované rovnice elastodynamiky metodou konečných prvků

V mechanice poddajných těles se při hledání přibližného řešení deformační variantou metody konečných prvků aproximuje pole posuvů \mathbf{u} lineární kombinací ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{q}, \quad (2)$$

kde \mathbf{H} je matice tvarových funkcí a \mathbf{q} je vektor uzlových posuvů. Dále uvažujeme, že deformační chování materiálu je plně popsáno Hookeovým zákonem pro homogenní izotropní materiál a platí předpoklady lineární teorie elastodynamiky, poté pohybové rovnice po diskretizaci me-

todou konečných prvků nabývají tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_{ext}, \quad (3)$$

kde \mathbf{F}_{ext} je vektor vnějších zobecněných sil, \mathbf{M} označuje matici hmotnosti definovanou vztahem

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (4)$$

a \mathbf{K} je matice tuhosti určená objemovým integrálem

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV, \quad (5)$$

kde ρ je objemová hustota, matice \mathbf{B} označuje matici derivací tvarových funkcí a \mathbf{C} je matice elastických modulů. V dalším textu budeme předkládat rovinnou úlohu za stavu rovinné deformace, pro niž matice elastických modulů \mathbf{C} je předepsána ve tvaru

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

kde E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonovo číslo.

Pro zvolené předpoklady rovnice rovnováhy odpovídají soustavě lineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu a matice \mathbf{K} a \mathbf{M} jsou konstantní. Podrobnosti o metodách řešení rovnic rovnováhy (3) lze nalézt např. v knihách (Bathe, 1996) a (Zienkiewicz et al., 2000). Matice hmotnosti definovaná rovnicí (4) se nazývá konzistentní.

3. Metoda centrálních diferencí

Metoda centrálních diferencí (Dokainish et al., 1989) je založena na myšlence nahrazení časových derivací uzlových posuvů centrálními diferencemi a z toho vyplývají jednoduché vztahy mezi vektory uzlových posuvů, rychlostí a zrychlení v čase t

$$\dot{\mathbf{q}}^t = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{q}^{t+\Delta t} - \mathbf{q}^{t-\Delta t}), \quad \ddot{\mathbf{q}}^t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{q}^{t+\Delta t} - 2\mathbf{q}^t + \mathbf{q}^{t-\Delta t}), \quad (7)$$

kde Δt označuje časový krok. Předchozí kinematické vztahy (7) jsou poté dosazeny do pohybové rovnice (3) zapsané v čase t a získá se soustava lineárních algebraických rovnic pro výpočet vektoru uzlových posuvů v čase $t + \Delta t$

$$\mathbf{M}_{eff} \mathbf{q}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{eff}, \quad (8)$$

kde efektivní hodnoty matic jsou dány vztahy

$$\mathbf{M}_{eff} = \mathbf{M}/\Delta t^2, \quad \mathbf{F}_{eff} = \mathbf{F}_{ext}^t - (\mathbf{K} - 2\mathbf{M}/\Delta t^2) \mathbf{q}^t - (\mathbf{M}/\Delta t^2) \mathbf{q}^{t-\Delta t}. \quad (9)$$

Vektory uzlových rychlostí $\dot{\mathbf{q}}^t$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{q}}^t$ se poté určí ze vztahů (7), které je nutné pro výpočet odezvy doplnit startovacím vektorem $\mathbf{q}^{-\Delta t}$. Ten vyjádříme z předepsaných počátečních podmínek - hodnoty uzlových posuvů \mathbf{q}^t a uzlových rychlostí $\dot{\mathbf{q}}^t$ vyhovující rovnici rovnováhy v čase $t = 0$.

Metoda centrální diferencí je řádu $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ a její efektivní nasazení je možné pouze pro diagonální matici hmotnosti. Výpočet inverze efektivní matice hmotnosti \mathbf{M}_{eff} je pak jednoduchou výpočetní záležitostí a další výhodou je také to, že soustava pohybových rovnic se rozpadne na nezávislé rovnice. Pro řešení takto zjednodušeného systému pohybových rovnic není zapotřebí maticového řešiče.

4. Analýza přesnosti a stability

Pro volbu časového kroku se provádí analýza přesnosti a stability metody přímé numerické integrace (Hughes et al., 1984), (Park, 1977). Stabilitu a přesnost netlumených lineárních úloh stačí zkoumat na rovnicích rovnováhy (3) po modální transformaci ve tvaru

$$\mathbf{q} = \Phi \mathbf{X}, \quad (10)$$

čímž se získá soustava nezávislých rovnic

$$\ddot{\mathbf{X}} + \Omega^2 \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

kde \mathbf{X} jsou modální souřadnice, Φ je modální matice (matice vlastních vektorů) a Ω je spektrální matice s hodnotami vlastních frekvencí $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ na diagonále. Počet stupňů volnosti je označen N . Takto získané transformované rovnice rovnováhy jsou navzájem nezávislé, a proto mohou být při stabilitní analýze zkoumány odděleně.

Rekurentní výpočet pro nalezení numerického řešení metodami přímé integrace se může chápat jako lineární operace, která dvojici hodnot \mathbf{X}^t a $\dot{\mathbf{X}}^t$ přiřadí dvojici $\mathbf{X}^{t+\Delta t}$ a $\dot{\mathbf{X}}^{t+\Delta t}$, což je možné zapsat takto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^{t+\Delta t} \\ \dot{\mathbf{X}}^{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^t \\ \dot{\mathbf{X}}^t \end{bmatrix}, \quad (12)$$

kde matice \mathbf{A} je lineární operátor plně popisující stabilitu a přesnost metody přímé integrace. Definujme tzv. spektrální poloměr operátoru \mathbf{A} jako

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{i=1,2,\dots,n} |\lambda_i|, \quad (13)$$

kde λ_i označuje i -té vlastní číslo operátoru \mathbf{A} .

Podmínka stability (Park, 1977) poté zní:

1. jestliže vlastní čísla jsou jednoduchá (navzájem odlišná), pak musí pro spektrální poloměr operátoru \mathbf{A} platit $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$,
2. jestliže operátoru \mathbf{A} odpovídají násobná vlastní čísla, pak se požaduje po všech vlastních číslech, aby platilo $|\lambda_i| < 1$.

Z hodnot vlastních čísel operátoru \mathbf{A} je možné posoudit přesnost metody (velikost zkreslení), která je sledována jak z hlediska amplitudy tak z hlediska frekvence. Měřítkem amplitudového zkreslení je absolutní hodnota $|\lambda|$ a měřítkem frekvenčního zkreslení je hodnota úhlu ϕ , která je dána výrazem $\tan \phi = \text{Im } \lambda / \text{Re } \lambda$, kde $\text{Im } \lambda$ resp. $\text{Re } \lambda$ je imaginární resp. reálná část λ .

5. Stabilita metody centrálních diferencí

5.1. Podmínka stability

Dále bude uvedena matice přenosu a její vlastní čísla pro metodu centrálních diferencí (Bathe, 1996). Vzhledem k tomu, že jednotlivé rovnice (11) jsou formálně shodné, stačí uvést výsledky pouze pro jednu rovnici ve tvaru

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0. \quad (14)$$

Matice přenosu \mathbf{A} odpovídající metodě centrálních diferencí nabývá tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

jejíž vlastní čísla jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(2 - \omega^2 \Delta t^2)^2}{4} - 1}. \quad (16)$$

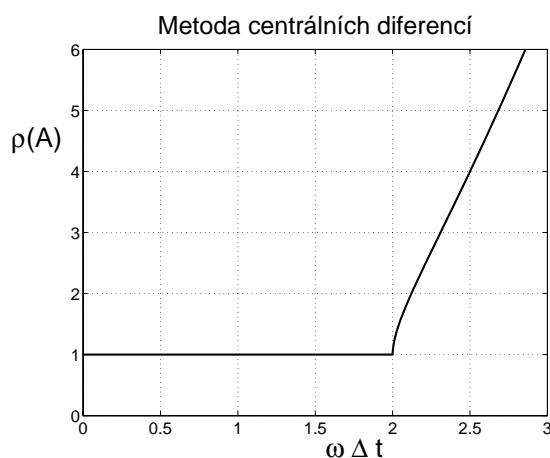
Na Obr. 1 je zobrazena závislost spektrálního poloměru $\rho(\mathbf{A}) = \max_{i=1,2} |\lambda_i|$ na hodnotě $\omega \Delta t$. Je patrné, že metoda centrálních diferencí vykazuje podmíněnou stabilitu. Tato metoda ztrácí svoji stabilitu při hodnotě $\omega \Delta t = 2$. Z čehož plyne známá podmínka stability (Park, 1977) ve tvaru

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega}. \quad (17)$$

Podmínka stability pro celou soustavu rovnic (11) musí být splněna pro všechny vlastní čísla matice $\mathbf{\Omega}$. Z tohoto důvodu podmínka stability pro celou soustavu musí nabývat tvaru

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}}, \quad (18)$$

kde ω_{max} je maximální vlastní úhlová rychlost celé soustavy.



Obrázek 1: Závislost spektrálního poloměru $\rho(\mathbf{A})$ pro metodu centrálních diferencí na hodnotě $\omega \Delta t$ (Bathe, 1996).

Podle rovnice (18) je úloha nalezení podmínky stability převedena na úlohu nalezení maximální vlastní frekvence systému. Výpočet maximálního vlastního čísla soustavy je velmi náročná úloha a pro velmi rozlehlé výpočtové sítě je realizace výpočtu nemožná. Proto je nutné kritické hodnoty časového kroku určit pro jednodušší-asymptotické případy. Tento článek se věnuje pouze situaci, kdy je rovinná výpočtová síť složena z pravidelných čtvercových prvků. Jedním asymptotickým případem pro tuto síť je osamocený prvek a druhým limitním případem je nekonečně rozlehlá periodická síť. Pro tyto dva případy lze exaktně vyjádřit podmínku stability a to pomocí

- Friedovy poučky - výpočet maximální vlastní frekvence osamocené prvku (Fried, 1972)
- disperzní analýzy - maximální frekvence vlnového řešení nekonečně rozlehlé sítě (Cohen, 2002), (Basabe et al., 2007).

V dalším textu budou obě metodiky popsány a použity pro konkrétní výpočet.

5.2. Bezrozměrný tvar podmínky stability – Courantovo číslo

Velmi výhodný tvar podmínky stability pro praktické použití je vyjádření v bezrozměrném tvaru pomocí Courantova čísla definovaného výrazem

$$Co = \frac{\Delta t c_1}{H}, \quad (19)$$

kde c_1 označuje rychlost podélné vlny a H je délka hrany konečného prvku. Pro rovinnou harmonickou vlnu šířící se neomezeným elastickým rovinným prostředím za stavu rovinné deformace nabývá rychlost podélné vlny hodnoty

$$c_1 = \sqrt{\frac{\Lambda + 2G}{\rho}}, \quad (20)$$

kde Λ a G jsou Lamého konstanty. Vztah mezi Lamého konstantami Λ , G a inženýrskými konstantami - Youngovým modulem pružnosti E a Poissonovým číslem ν je dán

$$\Lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (21)$$

Podmínka stability v bezrozměrném tvaru je poté vyjádřena nerovností

$$Co \leq Co_{krit} = \frac{2}{\bar{\omega}_{max}}, \quad (22)$$

kde $\bar{\omega}_{max}$ má význam bezrozměrné vlastní úhlové rychlosti definované vztahem

$$\bar{\omega} = \frac{\omega H}{c_1}. \quad (23)$$

5.3. Dolní odhad kritického Courantova čísla

V práci (Fried, 1972) byla odvozena tzv. Friedova poučka, která říká, že maximální vlastní číslo soustavy je shora omezeno maximálním vlastním číslem osamocené prvku, který je součástí uvažované soustavy, a proto platí

$$\omega_{max} \leq \max \omega_{max}^{(m)} \quad \text{pro} \quad m = 1, \text{ NELEM}, \quad (24)$$

kde NELEM označuje počet prvků soustavy. Pro vyjádření stability pravidelné čtvercové sítě je tedy postačující stanovit maximální vlastní frekvenci jednoho osamocené prvku. Takto získaná hodnota časového kroku bude dolním odhadem pro celou soustavu a pro všechny jiné topologie sítě bude vždy zaručena stabilita metody centrálních diferencí.

5.4. Horní odhad kritického Courantova čísla

Druhým limitním případem je nekonečně rozlehlá síť, pro kterou nalezneme periodické–vlnové řešení pohybových rovnic. Pro tyto účely je využita disperzní analýza metody konečných prvků. Disperzní analýza je založena na Fourierově analýze, kde se časové průběhy uzlových posuvů předepisují ve tvaru rovinné monochromatické vlny a tedy platí

$$\begin{aligned} u_{mn}^h &= U_{0mn} \exp \left[i \left(k^h x_m p_x + k^h y_n p_y - \omega t \right) \right] \\ v_{mn}^h &= V_{0mn} \exp \left[i \left(k^h x_m p_x + k^h y_n p_y - \omega t \right) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka, k^h je vlnové číslo diskretního systému, x_m a y_n jsou složky polohového vektoru \mathbf{x} definující polohu uzlu s indexy m, n (Obr. 2), p_x a p_y jsou složky jednotkového vektoru \mathbf{p} popisující směr šíření vlny, ω je úhlová rychlost vlny, t je čas, U_{0mn} a V_{0mn} jsou složky amplitudového vektoru uzlu definovaného polohovým vektorem \mathbf{x} . Složky jednotkové normály čela vlny jsou definovány pomocí úhlu θ

$$p_x = \cos(\theta), \quad p_y = \cos(\pi/2 - \theta), \quad (26)$$

kde úhel θ je měřen od vodorovné osy.

Souřadnice uzlů pravidelné sítě složené z čtvercových rovinných lineárních a kvadratických konečných prvků je možné vyjádřit jednoduchým způsobem. Na Obr. 2 jsou zobrazeny nekonečně rozlehlé sítě pro oba typy konečných prvků. Jednotlivé čtvercové prvky mají rozměr $H \times H$. Položíme-li počátek souřadnicového systému do rohového uzlu s indexem m, n , pak souřadnice libovolného uzlu sítě s indexem $m + p, n + q$ sítě lineárních konečných prvků jsou dány

$$x_{m+p} = pH, \quad y_{n+q} = qH, \quad \text{kde} \quad p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (27)$$

a pro síť kvadratických konečných prvků platí

$$x_{m+p} = pH, \quad y_{n+q} = qH, \quad \text{kde} \quad p, q = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2, \dots \quad (28)$$

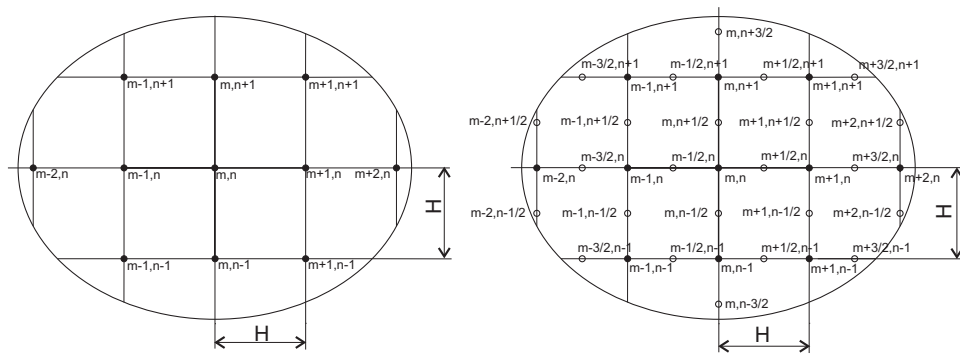
Indexy p, q jednoznačně určují polohu uzlu sítě vůči počátku v uzlu s indexy m, n . Pro síť kvadratických prvků celočíselné hodnoty indexů odpovídají rohovým uzlům (ang. corner nodes), násobky $1/2$ přísluší hranovým uzlům (midside nodes).

Jelikož je zkoumáno chování pravidelné sítě a není aplikováno žádné zatížení, pohybové rovnice jednotlivých uzlů jsou shodné a řádky globální matice hmotnosti a tuhosti se opakují. Této vlastnosti bude dále využito tak, že stačí uvažovat pouze omezený počet pohybových rovnic pro tzv. charakteristické uzly sítě. Charakteristickými uzly se rozumí takové uzly, jejichž charakter kmitání je navzájem totožný a koeficienty pohybových rovnic jednotlivých uzlů jsou shodné. Počet charakteristických uzlů závisí na typu konečného prvku.

U pravidelné rovinné sítě sestavené pouze z lineárních čtvercových konečných prvků se vyskytuje jeden typ charakteristického uzlu. Kvadratickým čtvercovým rovinným konečným prvkům odpovídají tři typy charakteristických uzlů: rohový uzel (ang. corner node), uzel na vodorovné hraně–vodorovný hranový uzel a uzel na svislé hraně–svislý hranový uzel (ang. midside nodes). Pohybové rovnice charakteristických uzlů sítě můžeme formálně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{q}}_c^h + \mathbf{K}_c \mathbf{q}_c^h = \mathbf{0}, \quad (29)$$

kde matice \mathbf{M}_c a \mathbf{K}_c jsou tvořeny řádky globálních matic \mathbf{M} a \mathbf{K} , \mathbf{q}_c^h je vektor uzlových posuvů. V praktických úlohách se postupuje takto. Sestaví se globální matice hmotnosti a tuhosti sítě, určí se charakteristické uzly a pro tyto uzly se vyjmou příslušné řádky globálních matic.



Obrázek 2: Rovinná síť složená z pravidelných čtvercových lineárních (vlevo) a kvadratických (vpravo) čtvercových konečných prvků.

Dále je výhodné využít izoparametrické formulace konečných prvků, která pro zkoumané typy konečných prvků umožní výpočet matice hmotnosti a tuhosti pro libovolnou velikost prvků. Uvažujme tzv. referenční problém - pravidelnou rovinnou MKP síť složenou ze čtvercových konečných prvků o rozměrech 1×1 . Poté pro libovolnou hustotu sítě definovanou délkou hrany H platí vztahy

$$\mathbf{M} = b \rho H^2 \bar{\mathbf{M}}, \quad \mathbf{K} = b E \bar{\mathbf{K}}, \quad (30)$$

kde $\bar{\mathbf{K}}$ a $\bar{\mathbf{M}}$ jsou matice tuhosti a hmotnosti pro referenční problém za stavu rovinné deformace stanovené pro jednotkové hodnoty Youngova modulu E , hustoty ρ a tloušťky b a pro konkrétní hodnotu Poissonova čísla ν . Poznamenejme, že matice hmotnosti je na rozdíl od matice tuhosti na Poissonovu čísla nezávislá. Matice tuhosti je hodnotou Poissonova čísla jednoznačně určena. V následujícím textu budeme uvažovat hodnotu Poissonova čísla rovnou $\nu = 0, 3$.

Vztahy pro uzlové posuvy (25) libovolného uzlu sítě s indexy $m + p, n + q$ odpovídající vlnovému řešení je možné formálně zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} u_{m+p, n+q}^h &= U_{0m+p, n+q} \mu_x^m \mu_y^n \mu_x^p \mu_y^q \mu_t \\ v_{m+p, n+q}^h &= V_{0m+p, n+q} \mu_x^m \mu_y^n \mu_x^p \mu_y^q \mu_t, \end{aligned} \quad (31)$$

kde μ_x, μ_y a μ_t označují

$$\mu_x = \exp(i \gamma^h p_x), \quad \mu_y = \exp(i \gamma^h p_y), \quad \mu_t = \exp(-i \omega t) \quad (32)$$

a proměnná γ^h má význam bezrozměrného vlnového čísla definovaného takto

$$\gamma^h = k^h H. \quad (33)$$

Časový průběh posuvů jednotlivých uzlů vystupujících v pohybových rovnicích charakteristických uzlů (29) lze zapsat do tvaru

$$\mathbf{q}_c^h = \mathbf{D} \mathbf{P} \mathbf{U}_c(t), \quad (34)$$

kde diagonální matice \mathbf{D} se skládá z násobků $\mu_x^p \mu_y^q$, hodnoty indexů p, q závisejí na poloze uzlu. Matice \mathbf{P} složená z jedniček a nul zprostředkovává přidružení jednotlivých uzlů sítě

charakteristickým uzlům a časový průběh posuvů charakteristických uzlů $\mathbf{U}_c(t)$ je uvažován libovolný. Totéž lze říci také o vektoru zrychlení

$$\ddot{\mathbf{q}}_c^h = \mathbf{DP}\ddot{\mathbf{U}}_c(t) \quad (35)$$

a poté pohybová rovnice charakteristických uzlů je dána

$$\frac{H^2}{c_0^2} \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{U}}_c(t) + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{U}_c(t) = \mathbf{0}. \quad (36)$$

kde $c_0^2 = E/\rho$ je rychlost podélné vlny v tyči a zbylé matice mají význam $\hat{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{M}}_c \mathbf{DP}$ a $\hat{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}_c \mathbf{DP}$. Pro potřeby stabilitní analýzy ve shodě s Kap. 4. je nutné systém pohybových rovnic diagonalizovat pomocí modální transformace ve tvaru

$$\mathbf{U}_c = \hat{\mathbf{\Phi}}\mathbf{X}_c, \quad \hat{\mathbf{\Phi}}^T \hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{I}, \quad \hat{\mathbf{\Phi}}^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{\Phi}} = \hat{\mathbf{\Lambda}}, \quad (37)$$

kde modální matice $\hat{\mathbf{\Phi}}$ a spektrální matice $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ se získá řešením zobecněného problému vlastních čísel

$$(-\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{K}}) \mathbf{U}_{0c} = \mathbf{0} \quad (38)$$

odvozeného pro předpoklad ustáleného kmitání popsaného vztahem

$$\mathbf{U}_c = \mathbf{U}_{0c} e^{i\omega t}, \quad (39)$$

kde \mathbf{U}_{0c} je vektor amplitud uzlových posuvů charakteristických uzlů. Pro diagonální prvky spektrální matice $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ platí

$$\hat{\Lambda}_i = \frac{\omega_i^2 H^2}{c_0^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N_c, \quad (40)$$

kde N_c udává počet disperzních větví.

Pohybová rovnice po modální transformaci přejde do tvaru nezávislých rovnic

$$\ddot{\mathbf{X}}_c(t) + \frac{c_0^2}{H^2} \hat{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{X}_c(t) = \mathbf{0} \quad (41)$$

a podmínka stability pro řešení této rovnice metodou centrálních diferencí nabývá po porovnání s (14) a (18) tvaru

$$\Delta t \leq \frac{2}{\max_{(\gamma_x^h, \gamma_y^h) \in B_1} \sqrt{\frac{c_0^2}{H^2} |\hat{\Lambda}_i|}}, \quad (42)$$

kde oblast B_1 je množina vlnových čísel z první Brillouinovy zóny (Brillouin, 1953). Po převedení do bezrozměrného tvaru využívající Courantovo číslo Co a použitím výrazu pro výpočet úhlové rychlosti (40) je podmínka stability pro nekonečnou periodickou pravidelnou síť vyjádřena

$$Co \leq Co_{krit} = \frac{2}{\max_{(\gamma_x^h, \gamma_y^h) \in B_1} \sqrt{\frac{c_0^2}{c_1^2} |\hat{\Lambda}_i|}} = \frac{2}{\bar{\omega}_{max}}, \quad (43)$$

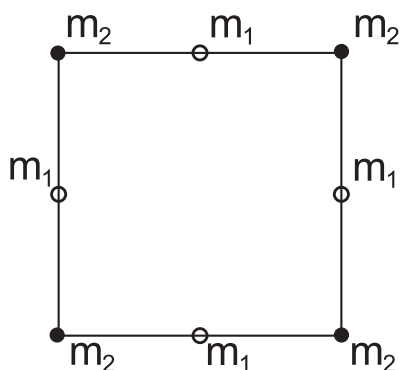
kde $\bar{\omega}_{max}$ má význam maximální úhlové rychlosti pro vlnová čísla z první Brillouinovy zóny. Pro stanovení kritické hodnoty Courantova čísla Co_{krit} stačí tedy určit maximální hodnotu úhlové rychlosti $\bar{\omega}$ z prostorové disperzní analýzy. Maximální hodnota $\bar{\omega}_{max}$ nastává nejčastěji pro velmi dlouhé vlny odpovídající bezrozměrnému vlnovému číslu $\gamma^h = 0$ nebo pro stojané vlnění s bezrozměrným vlnovým číslem ležícím na hranici první Brillouinovy zóny.

6. Diagonalizace matice hmotnosti

Vzhledem k tomu, že jsou zkoumány pravidelné rovinné sítě konečných prvků, lze jednoduchým způsobem za využití symetrie prvků a podmínek kladených na matici hmotnosti určit diagonální prvky diagonální matice hmotnosti přímou diagonalizační metodou (Malkus et al., 1986). Matice hmotnosti musí vyhovovat podmínce symetrie, pozitivní definitnosti a podmínce zachování hmotnostních charakteristik. Převážně se požaduje zachování celkové hmotnosti prvku. Z výše uvedeného vyplývá, že diagonální prvky diagonální matice hmotnosti musí nabývat kladných hodnot a jsou voleny tak, aby zachovaly celkovou hmotnost prvku a respektovaly jeho symetrii.

Pro případ lineárních prvků je situace velmi jednoduchá. Jak bylo už řečeno, síť je pravidelná čtvercová, a proto jednotlivé směry nebudou navzájem preferovány a také jednotlivé uzly prvku jsou navzájem ekvivalentní. Z toho vyplývá důležitý poznatek, že pro tento typ prvku a jeho geometrii musí být hmotnostní koeficienty odpovídající jednotlivým směrům a uzlům shodné. Pro podmínku zachování celkové hmotnosti prvku m_e musí diagonální matice hmotnosti rovinného čtvercového lineárního prvku obsahovat diagonální prvky rovny $0,25 m_e$. Tohoto výsledku lze také docílit použitím řádkové metody nebo HRZ algoritmu (Hinton et al., 1976).

Pro rovinné kvadratické konečné prvky je situace o něco složitější. Řádková metoda generuje záporné hodnoty diagonálních prvků odpovídající rohovým uzlům. HRZ algoritmus je pro tento typ prvku použitelný, čímž je jednoznačně generována diagonální matice o daném rozložení hmotnosti uvnitř prvku. K určení diagonální matice hmotnosti 8-uzlového čtvercového konečného prvku je možné přistoupit obecněji a využít jeho symetrii a polohy uzlů (Obr. 3). Ze symetrie prvku opět vyplývá, že ani vodorovný ani svislý směr nebude navzájem preferován. Dále všechny rohové uzly jsou navzájem ekvivalentní, totéž platí i o všech hranových uzlech. Označme diagonální hmotnostní koeficient odpovídající hranovým uzlům m_1 a rohovým uzlům bude odpovídat hodnota diagonálního hmotnostního koeficientu označeného m_2 . Schéma reprezentující hmotnostní koeficienty je uvedeno na Obr. 3 (Kolman et al., 2008).



Obrázek 3: Schéma rozložení hmotnosti pro 8-uzlový rovinný čtvercový konečný prvek.

Dále na diagonální matici hmotnosti prvku sestavenou přímou metodou diagonalizace bude kladena podmínka zachování jeho celkové hmotnosti m_e . Tato podmínka zachování celkové hmotnosti prvku nabývá jednoduchého tvaru

$$m_e = 4 m_1 + 4 m_2. \quad (44)$$

Jestliže bude například hmotnostní koeficient odpovídající hranovým uzlům volen jako určitá část celkové hmotnosti prvku podle

$$m_1 = x m_e, \quad (45)$$

pak příslušný hmotnostní koeficient rohových uzlů z podmínky zachování celkové hmotnosti (44) prvku bude nabývat hodnot

$$m_2 = (0, 25 - x) m_e, \quad (46)$$

kde x označuje volený hmotnostní parametr. Z podmínky pozitivní definitnosti matice hmotnosti plyne interval dovolených hodnot pro hmotnostní parametr $x = (0; 0, 25)$. Tímto přístupem je možné sestavit libovolnou diagonální matici hmotnosti 8-uzlového rovinného čtvercového konečného prvku. Volbou hmotnostního parametru x se nechají ovlivňovat dynamické vlastnosti konečného prvku (vlastní frekvence, disperzi atd.).

Pro ilustraci uvádíme hmotnostní koeficienty získané pro často používané diagonalizační procedury. Hodnota $x = 8/36$ odpovídá HRZ algoritmu s řádem Gaussovy numerické integrace 2×2 a hodnota $x = 16/76$ přísluší řádu numerické integrace 3×3 . Řádková metoda dává hodnotu hmotnostního parametru rovnu $x = 1/3$, tj. mimo interval $x = (0; 0, 25)$, a m_2 nabývá hodnoty $-1/13 m_e$. Dále pro limitní hodnotu intervalu $x = 0$ je všechna hmotnost prvku soustředěna v rohových uzlech a pro $x = 0, 25$ je všechna hmotnost prvku soustředěna do hranových uzlů.

7. Výsledky

V této kapitole budou uvedeny výsledky stabilitní analýzy provedené pro rovinnou síť čtvercových kvadratických konečných prvků s tím, že je uvažována celá třída přípustných diagonálních matic hmotnosti popsaných hmotnostním parametrem x . Výše představený dolní a horní odhad výpočtu kritického Courantova čísla bude verifikován na případě lineárního prvku, pro který je kritické Courantovo číslo známo (Mullen et al., 1983).

7.1. Dolní odhad

Pro potřeby Friedovy poučky bylo vypočteno celé frekvenční spektrum osamocенého čtvercového lineárního prvku za stavu rovinné deformace. Numerické hodnoty bezrozměrných vlastních frekvencí jsou uvedeny v Tab.1, kde maximální hodnota byla stanovena $\bar{\omega}_{max} = 2, 39046$. Této hodnotě pak přísluší podle vztahu (22) kritická hodnota Courantova čísla $Co_{krit} = 0, 837$.

Tabulka 1. Frekvenční spektrum rovinného čtvercového lineárního konečného prvku za stavu rovinné deformace pro diagonální matici hmotnosti.

pořadí	$\bar{\omega}$	pořadí	$\bar{\omega}$
1	0	5	1,30931
2	0	6	1,51186
3	0	7	1,51186
4	1,30931	8	2,39046

Taktéž pro osamocенý rovinný kvadratický konečný prvek za stavu rovinné deformace byly vypočteny vlastní frekvence. V Tab.2 jsou uvedeny hodnoty maximálních bezrozměrných vlastních úhlových rychlostí a jim příslušející kritické hodnoty Courantova čísla vypočtených podle (22) pro vhodně vybrané hodnoty hmotnostního parametru z povoleného intervalu hodnot $x = (0; 0, 25)$. Graf reprezentující závislost Co_{krit} na hmotnostním parametru x je zobrazen na Obr.5. Za pozornost stojí uvést fakt, že Co_{krit} pro mezní hodnoty nabývá v limitě nulové

hodnoty. Toto vyplývá ze skutečnosti, že maximální vlastní frekvence jsou nekonečné, protože diagonální koeficienty matice hmotnosti pro $x = 0$ a $x = 0.25$ jsou nulové.

Tabulka 2. Hodnoty maximální bezrozměrné vlastní frekvence osamocené prvku a kritického Courantova čísla pro metodu centrálních diferencí v závislosti na hmotnostním parametru x diagonální matice hmotnosti pro kvadratický konečný prvek.

x	$\omega_{max} H/c_1$	Co_{krit}	x	$\omega_{max} H/c_1$	Co_{krit}
0	∞	0	0,130	0,648	0,343
0,001	5,744	0,039	0,135	0,647	0,343
0,005	2,580	0,086	0,140	0,647	0,343
0,010	1,834	0,121	0,145	0,649	0,343
0,015	1,506	0,148	0,150	0,651	0,341
0,020	1,312	0,169	0,155	0,655	0,339
0,025	1,181	0,188	0,160	0,660	0,336
0,030	1,085	0,205	0,165	0,667	0,333
0,035	1,012	0,220	0,170	0,675	0,329
0,040	0,953	0,233	0,175	0,686	0,324
0,045	0,905	0,245	0,180	0,698	0,319
0,050	0,866	0,257	0,185	0,712	0,312
0,055	0,832	0,267	0,190	0,730	0,305
0,060	0,803	0,277	0,195	0,750	0,296
0,065	0,779	0,285	0,200	0,775	0,287
0,070	0,757	0,293	0,205	0,805	0,276
0,075	0,739	0,301	0,210	0,842	0,264
0,080	0,722	0,308	0,215	0,887	0,250
0,085	0,708	0,314	0,220	0,946	0,235
0,090	0,696	0,319	0,225	1,022	0,217
0,095	0,685	0,324	0,230	1,128	0,197
0,100	0,676	0,329	0,235	1,286	0,173
0,105	0,669	0,332	0,240	1,556	0,143
0,110	0,662	0,336	0,245	2,175	0,102
0,115	0,657	0,338	0,248	3,415	0,065
0,120	0,653	0,340	0,249	4,818	0,046
0,125	0,650	0,342	0,250	∞	0

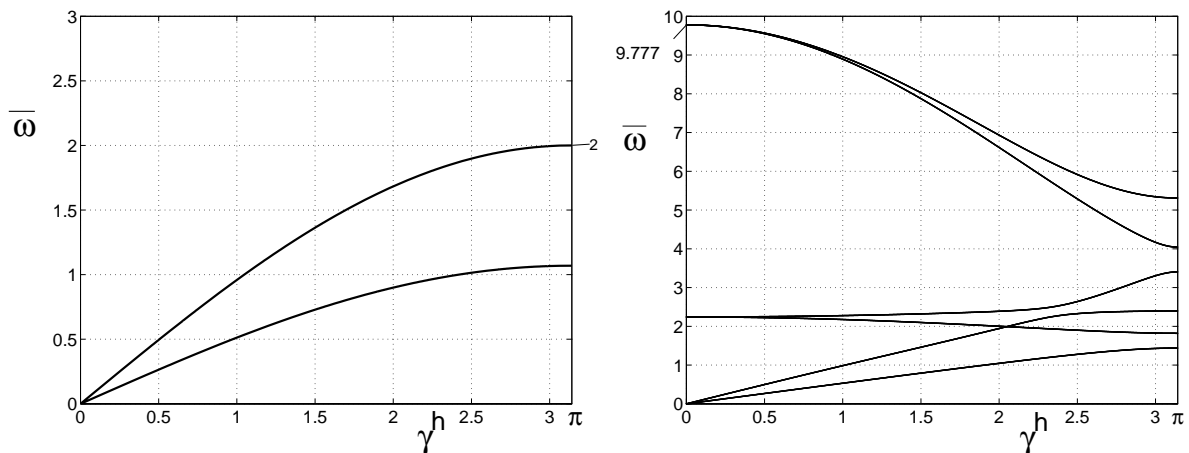
7.2. Horní odhad

Pro výpočet horního odhadu kritického Courantova čísla je nutné určit maximální úhlovou frekvenci pro periodické-vlnové řešení. Maximální hodnotou se rozumí maximální $\bar{\omega}$ pro všechna přípustná vlnová čísla a směry šíření rovinné vlny. Tato maximální hodnota se odečte z disperzních křivek $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\gamma^h)$ pro všechny směry šíření vlny. Problematice disperze rovinných lineárních a kvadratických konečných prvků se věnovala práce (Kolman, 2009). Disperzní prostředí je takové prostředí, pro které frekvence šířící se vlny je nelineární funkcí její vlnové délky. Následkem tohoto jevu je odlišná fázová a grupová rychlost pro různé vlnové délky-dochází k rozfázování pulzu.

Disperzní křivka $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\gamma^h)$ rovinného čtvercového lineárního konečného prvku a pro diagonální matici hmotnosti je zobrazena na Obr.4(vlevo) pro úhel šíření vlny $\theta = 0$. Pro tento

úhel vykazuje disperzní závislost maximální hodnotu $\bar{\omega}_{max}$ a to $\bar{\omega}_{max} = 2$. Z čehož je kritické Courantovo číslo rovna $Co_{krit} = 1$, což je hodnota uváděná v literatuře např. (Bathe, 1996), (Zienkiewicz et al., 2000). Maximální frekvence nastane pro ustálené podélné vlnění, tj. pro $\gamma^h = \pi$. Toto bezrozměrné vlnové číslo reprezentuje situaci, kdy vlnová délka je rovna dvojnásobku délky hrany prvku H . Disperzní diagram rovinných lineárních prvků obsahuje dvě větve odpovídajících různým typům šíření vlny sítí. Spodní větev odpovídá příčné akustické vlně a horní křivka přísluší podélným akustickým vlnám. Maximální hodnota $\bar{\omega}_{max}$ pro lineární prvky odpovídá podélným vlnám, a proto stabilitu metody centrálních diferencí určuje podélná vlna.

Pro kvadratické prvky je situace o něco složitější. Tento typ čtvercových prvků obsahuje ve svém spektru šest disperzních křivek, jejichž počet je dán počtem stupňů volnosti periodické sítě. První dvě spodní disperzní větve odpovídají akustickým vlnám-nejnižší větev přísluší příčné vlně a druhá podélné vlně. Zbylé čtyři disperzní větve jsou optické vysokofrekvenční vlny (Brillouin, 1953), z nichž dvě jsou opět podélné a dvě příčné vlny. Optické vlny sítě konečných prvků s vyšším řádem tvarových funkcí jsou artefaktem prostorové diskretizace MKP a nelze je žádným způsobem odstranit, ale pouze potlačit jejich intenzitu.



Obrázek 4: Disperzní závislost $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\gamma^h)$ rovinného čtvercového lineárního (vlevo) a kvadratického (vpravo) konečného prvku pro úhel šíření vlny $\theta = 0$. Diagonální matice hmotnosti kvadratického prvku je vypočtena pro hodnotu $x = 0.23$.

Na Obr.4(vpravo) je uveden příklad disperzních křivek pro kvadratický prvek s diagonální maticí hmotnosti pro hmotnostní parametr $x = 0.23$ a úhel $\theta = 0$. Maximální frekvence pro $x = 0.23$ je rovna hodnotě $\bar{\omega}_{max} = 9.777$ při bezrozměrné vlnové délce $\gamma^h = 0$, což je případ vln s nekonečně dlouhou vlnovou délkou. Odpovídající hodnota kritického Courantova čísla poté je $Co_{krit} = 0.205$. V Tab.3 jsou vypsány hodnoty $\bar{\omega}_{max}$ a Co_{krit} pro vhodně zvolené hodnoty hmotnostního parametru. Pro kvadratický prvek maximální hodnota $\bar{\omega}_{max}$ nastane vždy pro $\gamma^h = 0$ nezávisle na úhlu θ a leží v optické disperzní větvy. O stabilitě výpočtu pro síť kvadratických prvků tedy na rozdíl od lineárních prvků rozhodují vždy optické vlny, které se v elastickém kontinuu nevyskytují.

Graf popisující závislost horního odhadu Co_{krit} na x je zobrazen na Obr.5. Nulové kritické hodnoty opět jsou stanoveny pro limitní hodnoty $x = 0$ a $x = 0.25$. Nejvyšší kritické hodnoty nastávají pro rovnoměrné rozložení hmotnosti podél prvku, tj. $x = 0.125$. V práci (Kolman,

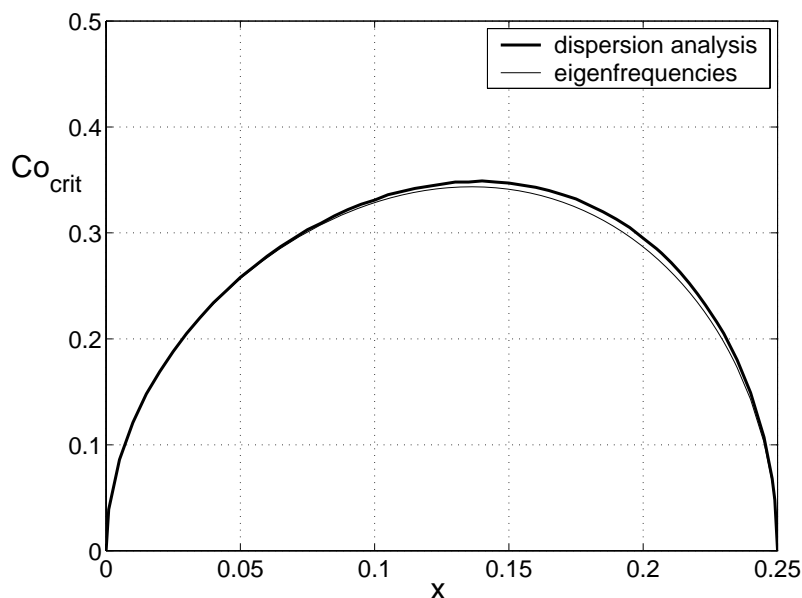
2009) byl zkoumán vliv hmotnostního parametru na disperzní chování sítě kvadratických prvků. Interval disperzně přípustných hodnot hmotnostních parametrů byl stanoven $x = (0, 23; 0, 25)$. Pro tento interval závislost $C_{okrit} = C_{okrit}(x)$ vykazuje klesající průběh a nejvyšší hodnota odpovídá $x = 0.23$. Pro $x < 0.23$ jsou disperzní chyby značné, i když C_{okrit} je vyšší. Požadavky na co nejvyšší časový krok a nízké disperzní chyby prostorové a časové diskretizace jsou navzájem protichůdné.

Tabulka 3. Hodnoty maximální bezrozměrné vlastní frekvence vypočtené z disperzní analýzy a kritického Courantova čísla pro metodu centrálních diferencí v závislosti na hmotnostním parametru x diagonální matice hmotnosti pro kvadratický konečný prvek.

x	$\omega_{max} H/c_1$	C_{okrit}	x	$\omega_{max} H/c_1$	C_{okrit}
0	∞	0	0,130	5,752	0,348
0,001	51,692	0,039	0,135	5,740	0,348
0,005	23,212	0,086	0,140	5,737	0,349
0,010	16,500	0,121	0,145	5,745	0,348
0,015	13,545	0,148	0,150	5,762	0,347
0,020	11,799	0,169	0,155	5,790	0,345
0,025	10,617	0,188	0,160	5,830	0,343
0,030	9,752	0,205	0,165	5,883	0,340
0,035	9,087	0,220	0,170	5,949	0,336
0,040	8,558	0,234	0,175	6,031	0,332
0,045	8,125	0,246	0,180	6,130	0,326
0,050	7,765	0,258	0,185	6,250	0,320
0,055	7,460	0,268	0,190	6,394	0,313
0,060	7,200	0,278	0,195	6,566	0,305
0,065	6,976	0,287	0,200	6,775	0,295
0,070	6,781	0,295	0,205	7,027	0,285
0,075	6,611	0,303	0,210	7,337	0,273
0,080	6,462	0,309	0,215	7,724	0,259
0,085	6,332	0,316	0,220	8,219	0,243
0,090	6,219	0,322	0,225	8,872	0,225
0,095	6,120	0,327	0,230	9,777	0,205
0,100	6,035	0,331	0,235	11,132	0,180
0,105	5,961	0,336	0,240	13,448	0,149
0,110	5,899	0,339	0,245	18,763	0,107
0,115	5,847	0,342	0,248	29,431	0,068
0,120	5,806	0,344	0,249	41,512	0,048
0,125	5,774	0,346	0,250	∞	0
16/76	7.374	0.271	1/3	3.763	0.5315
8/36	8.485	0.236	konz.	7.964	0.251

8. Závěr

Kritické hodnoty bezrozměrného časového kroku vyjádřeného Courantovým číslem byly stanoveny pro rovinný čtvercový kvadratický (8-uzlový) konečný prvek za stavu rovinné deformace.



Obrázek 5: Závislost kritického Courantova čísla Co_{krit} pro kvadratický konečný prvek za stavu rovinné deformace a diagonální maticí hmotnosti na hmotnostním parametru x určená z disperzní analýzy (plná čára) a z maximální vlastní frekvence osamoceneného prvku (tenká čára).

Pro tento typ prvku není jednoznačně definována diagonální matice hmotnosti, která je vyžadována pro efektivní výpočet metodou centrálních diferencí. Proto byly vypočteny kritické hodnoty Courantova čísla pro celou řadu diagonálních matic, které se navzájem odlišují rozložením celkové hmotnosti prvku. Použitý postup výpočtu dolního a horního odhadu stability byl verifikován na případě lineárního prvku, kde podmínka stability je známa.

Pro lineární prvek je velmi značný rozdíl výsledků pro dolní a horní odhad, kde se kritické hodnoty liší až o 16%. U kvadratických prvků je tento rozdíl minimální. Vzhledem k tomu, že dolní odhad je určen pro jeden prvek a horní odhad je stanoven pro nekonečnou periodickou síť, náročnější úlohy elastodynamiky budou odpovídat převážně situaci pro horní odhad.

Diagonální matice hmotnosti pro lineární prvek je jednoznačně určena na rozdíl od prvků kvadratických. Disperzně optimální diagonální matice hmotnosti pro kvadratické prvky je taková matice hmotnosti, která zaručí, že 92% celkové hmotnosti prvku je soustředěna do uzlů ležících na jeho hraně. Tato situace odpovídá hmotnostnímu parametru $x = 0.23$ a příslušná kritická hodnota Courantova čísla je $Co_{krit} = 0.205$.

Velmi důležitou skutečností je, že pro kvadratické prvky nelze kritickou hodnotu Courantova čísla odhadnout ze znalosti kritické hodnoty pro lineární prvek ($Co_{krit} = 1$). Bylo prokázáno, že pro kvadratický prvek není Co_{krit} rovno poloviční hodnotě pro lineární prvek, jak by se mohlo intuitivně předpokládat. Kritické Courantovo číslo vykazuje silnou závislost na volbě diagonální matice hmotnosti.

9. Poděkování

Tato práce vznikla za laskavé podpory grantů GA ČR 101/07/1471 a 101/09/1630 v rámci výzkumného projektu AV0Z20760514.

10. Literatura

- De Basabe, J.D. & Sen, M.K. (2007) Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equation. *Geophysics* Vol. 72(6), 81–95.
- Bathe, K.J. (1996) *Finite element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall.
- Belytschko, T. & Mullen, R. (1978) On dispersive properties of finite element solutions. In *Modern Problems in Elastic Wave Propagation*. Eds. Miklowitz, J. et al., New York: Wiley, 67–82.
- Brillouin, L. (1953) *Wave propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices*. New York: Dover Publications.
- Cohen, G.C. (2002) *Higher-order numerical methods for transient wave equation*. Springer-Verlag, Scientific Computation.
- Dokainish, M.A. & Subbaraj, K. (1989) A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics - I. Explicit methods. *Computers and Structures*, Vol. 32(6), 1371–1386.
- Fried, I. (1972) Bounds on the extremal eigenvalues of the finite element stiffness and mass matrices and their spectral condition number. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 22, 407–418.
- Hinton, E., Rock, T.A. & Zienkiewicz, O.C. (1976) A note on mass lumping and related processes in the finite element method, *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 4, 245–249.
- Hughes, T.J.R. & Tezduyar, T.E. (1984) Stability and accuracy analysis of some fully-discrete algorithms for the one-dimensional second-order wave equation. *Computers and Structures*, Vol. 19, 665–668.
- Kolman, R., Plešek, J. & Gabriel, D. (2008) Optimization of lumping schemes for plane square quadratic finite element in elastodynamics. In *WCCM 8 - ECCOMAS 2008, Venice*. Eds. SCHREFLER, B.A. & PEREGO, U., [CD-ROM].
- Kolman, R. (2009) Disperzní analýza rovinných kvadratických konečných prvků v úlohách elastodynamiky. Disertační práce, FSI ČVUT v Praze.
- Mullen, R. & Belytschko, T. (1983) An analysis of an unconditionally stable explicit method. *Computers and Structures*, Vol. 16, 691–696.
- Malkus, D.S. & Plesha, M.E. (1986) Zero and negative masses in finite element vibration analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. 59, 281–306.
- Park, K.C. (1977) Practical aspect of numerical time integration. *Computers and Structures*, Vol. 7, 343–353.
- Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L. (2000) *The Finite Element Method, Volume 1: The Basic*. Fifth edition. Stoneham: Butterworth-Heinemann.