

**ASSESSMENT OF THE RESPONSE OF THE LAYERED  
RECTANGULAR PLATE FROM THE LOADING  
BY THE SOUND BLAST WAVES****P. Marton\***

**Summary:** *In this paper the methodology of the assessment of the response of the layered, at its edges hinge-supported plate from the effects of the sound blast waves pressure. Stiffness matrix for the layered rectangular element was derived. The load is transferred through spherical blast waves, defined in the shape of periodically variable load. Distribution of the continuous load into nodes of the rectangular plate was defined in the initial phase of the calculation considering the load phase shift. The calculation of the response was made using the modified method of matrix function derived by author and using the standard method of solution the response to the harmonic load.*

**1. Úvod**

V prevažnom počte príspevkov venovaných analýze vrstevnatých sústav metódou konečných prvkov autori uplatňujú deformačný variant metódy. Funkcie premiestnení sú uvažované prevažne v tvare zmiešaných polynómov tretieho stupňa pre posuny v smere kolmom na strednicovú rovinu. Pre premiestnenia v rovinách rovnobežných so strednicovou rovinou a skosenia v tvare polynómov prvého stupňa. Nedostatkom analýz je nesplnenie podmienok rovnováhy šmykových napätí na kontakte vrstiev. Pre návrh vrstevnatých konštrukčných prvkov je informácia o veľkosti kontaktných šmykových napätí smerodajná pre návrh spojovacieho prostriedku. V tomto príspevku je aplikovaný silový variant spočívajúci vo voľbe funkcie napätí v tvare zmiešaných polynómov tretieho stupňa. Z produktov analýzy vyplýva splnenie kontaktných podmienok napätí i kontaktných kinematických podmienok na hraniciach vrstiev a je definovaná ekvivalentná dosková tuhosť. Pre analýzu vrstevnatej dosky sú využité zovšeobecnené poznatky z analýzy vrstevnatého prúta s konštantnou šírkou prierezu, s premenným modulom pružnosti po hrúbke prierezu a konštantným po hrúbke vrstvy. Matica tuhosti vrstevnatého obdĺžnikového prvku je odvodená štandardným spôsobom.

**2. Matica tuhosti prúta s premenným prierezom**

Predmetom vyšetrovania je vrstevnatý ortotropný prút s obdĺžnikovým prierezom na jednom konci votknutý a na druhom voľný, pričom hlavné napätia sú rovnobežné s rovinou prierezu a s osou prúta, obr. 1.

---

\* Doc. Ing. Pavol Marton, CSc.: Katedra stavebnej mechaniky, STU Bratislava; Radlinského 17; 140 00 Bratislava 1; tel.: +421.59284583, e-mail: pavol.marton@stuba.sk



Obrázok 1 Geometria vrstevnatého prúta

Predmetom vyšetrovania je vrstevnatý ortotropný prút s obdĺžnikovým prierezom na jednom konci votknutý a na druhom voľný, pričom hlavné napätia sú rovnobežné s rovinou prierezu a s osou prúta, obr. 1. Pri predpoklade malých deformácií platia fyzikálne rovnice zovšeobecného Hookovho vzťahu v tvare (1).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_z \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_z \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad (1)$$

Napätia spĺňajú podmienky rovnováhy -

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

a okrajové podmienky pri  $z = 0, z = h$

$$\sigma_z^{(1)} = \tau_{xz}^{(1)} = 0 \quad \sigma_z^{(n)} = \tau_{xz}^{(n)} = 0 \quad (3)$$

resp. na kontakte vrstiev

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(k-1)} = \sigma_z^{(k)} = 0 & \quad \tau_{xz}^{(k-1)} = \tau_{xz}^{(k)} = 0 \\ u_{k-1} = u_k & \quad w_{k-1} = w_k \end{aligned} \quad (4)$$

Zložky napätí sú vyjadrené pomocou funkcie napätí  $F_k$ ,

$$F_k = A_k x z + B_k z^2 + C_k x z^2 + D_k z^3 + E_k x z^3 \quad (5)$$

Okrem toho platia v každom priečnom reze podmienky rovnováhy medzi vonkajšími a vnútornými silami

$$\sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_x^{(k)} dz = 0 \quad (6a)$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_x z dz = \frac{M - V x}{b} \quad (6b)$$

$$\sum_{k=1}^n \int_0^h \tau_{xz} dz = \frac{V}{b} \quad (6c)$$

### 3. Matica tuhosti prúta s premenným prierezom

Ak predpokladáme všeobecné rozdelenie napätí vo vrstevnatom prúte po výške prierezu ako v prúte homogénnom, potom napätia v  $k$  – tej vrstve budú definované vzťahmi

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(k)} &= \frac{6(M - Vx)}{bS} E_1^{(k)}(z) (2S_1 z - S_2) \\ \sigma_z^{(k)} &= 0 \\ \tau_{xz}^{(k)} &= \frac{6V}{bS} \left\{ \begin{array}{l} 2S_1 \left[ \sum_{l=1}^{k-1} \int_{h_{l-1}}^{h_l} E_1^{(l)}(z) z dz + \int_{h_{k-1}}^z E_1^{(k)}(z) z dz \right] \\ - S_2 \left[ \sum_{l=1}^{k-1} \int_{h_{l-1}}^{h_l} E_1^{(l)}(z) dz + \int_{h_{k-1}}^z E_1^{(k)}(z) dz \right] \end{array} \right\}\end{aligned}\quad (7)$$

V (7) zavedené označenia sú definované vzťahmi

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} E_1^{(k)}(z) dz & S_2 &= 2 \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} E_1^{(k)}(z) z dz \\ S &= 12 \left[ \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} E_1^{(k)}(z) dz * \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} E_1^{(k)}(z) z^2 dz - \left( \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} E_1^{(k)}(z) z dz \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (8)$$

Zo skladby rovníc premiestnení vyplýva rovnaký charakter premiestnenia ako pri prúte homogénnom s tuhosťou

$$D = \frac{bS}{12S_1} \quad (9)$$

Odvođená matica tuhosti vrstevnatého prúta má tvar

$$[k] = \frac{S}{12S_1 l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Vo vzťahoch (7), (8) a (9) pre napätia a tuhosť vystupuje iba modul pružnosti  $E_1(z)$  v smere osi X, ostatné moduly pružnosti napätia a tuhosť neovplyvňujú.

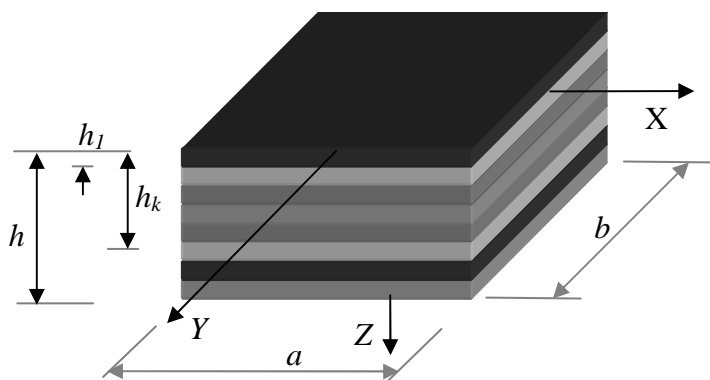
#### 4. Matica tuhosti obdĺžnikového prvku

Základná idea v odvodení matice tuhosti obdĺžnikového prvku využitím vzťahov analýzy prúťového prvku spočíva v uplatnení vzťahov pre tuhosť prúťového  $n$ -vrstevnatého prvku pri definícii doskovej tuhosti. Z porovnania vzťahov pre tuhosť prúťu a homogénnej dosky tuhosť vrstevnatej dosky možno definovať vzťahom

$$D = \frac{S}{12 S_1} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (11)$$

kde

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \frac{E^k}{1 - \nu_k^2} & S_2 &= \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \frac{E^k}{1 - \nu_k^2} \\ S_3 &= \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \frac{E^k}{1 - \nu_k^2} & S &= 4 S_1 S_3 - 3 S_2^2 \end{aligned} \quad (12)$$



Obrázok 2 Geometria vrstevnatého doskového prvku

Premiestnenia sú definované vzťahmi

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 \\ &+ \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 x^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \end{aligned} \quad (13)$$

alebo

$$w = w^t \alpha \quad (14)$$

kde

$$w^t = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ yx^2 \ xy^2 \ y^3 \ yx^3 \ xy^3] \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

Konštanty  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$  sa určia známym spôsobom po urobení derivácií  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$  a po dosadení súradníc jednotlivých uzlov.

Ak sa použijú pomerné súradnice  $\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}$ , potom matica funkcií tvaru je definovaná

$$\underline{N}^t = [\underline{N}_1^t \ \underline{N}_2^t \ \underline{N}_3^t \ \underline{N}_4^t] \quad (16)$$

kde

$$\underline{N}_i = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(2 + \xi\xi_i + \eta\eta_i - \xi^2 - \eta^2) \\ a\xi_i(1 + \xi\xi_i)^2(1 - \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \\ b\eta_i(1 + \eta\eta_i)^2(1 - \eta\eta_i)(1 + \xi\xi_i) \end{bmatrix} \quad (i = 1 \dots 4) \quad (17)$$

Výpočet pretvorení je definovaný rovnicou

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{d} \quad (18)$$

kde

$$\underline{B} = [\underline{B}_1, \underline{B}_2, \underline{B}_3, \underline{B}_4]$$

s

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{N}^t \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \underline{N}^t \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \underline{N}^t \end{bmatrix} \quad (19)$$

resp.

$$\underline{\underline{B}}_i = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} B_{i11} & B_{i12} & B_{i13} \\ B_{i21} & B_{i22} & B_{i23} \\ B_{i31} & B_{i32} & B_{i33} \end{bmatrix} \quad (20)$$

kde

$$B_{i11} = \frac{2}{a^2} (1 + \eta\eta_i)(1 - \xi_i^2 + 3\xi\xi_i) \quad B_{i12} = \frac{2}{a} \xi_i^3 (1 + \eta\eta_i)(1 + 3\xi\xi_i) \quad B_{i13} = 0$$

$$B_{i21} = \frac{2}{b^2} (1 + \xi\xi_i)(1 - \eta_i^2 + 3\eta\eta_i) \quad B_{i22} = 0 \quad B_{i23} = \frac{2}{b} \eta_i^3 (1 + \xi\xi_i)(1 + 3\eta\eta_i)$$

$$B_{i31} = -\frac{2}{ab} [\xi_i(1 + \eta\eta_i)(\eta_i - 2\eta) + \eta_i(1 + \xi\xi_i)(\xi_i - 2\xi) + \xi_i\eta_i(2 + \xi\xi_i + \eta\eta_i - \xi^2 - \eta^2)]$$

$$B_{i32} = \frac{2}{b} [\xi_i^2 \eta_i (1 + \xi\xi_i)^2 - 2(1 + \xi\xi_i)(1 - \xi\xi_i)]$$

$$B_{i33} = \frac{2}{b} [\xi_i \eta_i^2 (1 + \eta\eta_i)^2 - 2(1 + \eta\eta_i)(1 - \eta\eta_i)]$$

Momenty sa určia pomocou premiestnení uzlov zo vzt'ahu

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} D \{ \underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{S}}_3, \underline{\underline{S}}_4 \} \begin{Bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{d}_3 \\ \underline{d}_4 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

kde

$$\begin{aligned}
 S_{i11} &= \frac{2}{a^2} (1 + \eta \eta_i) (1 - \xi_i^2 + 3 \xi \xi_i) + \frac{2\nu}{b^2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta_i^2 + 3 \eta \eta_i) \\
 S_{i12} &= \frac{2}{a} \xi_i^3 (1 + \eta \eta_i) (1 + 3 \xi \xi_i) & S_{i13} &= \frac{2\nu}{b} \eta_i^3 (1 + \xi \xi_i) (1 + 3 \eta \eta_i) \\
 S_{i21} &= \frac{2\nu}{a^2} (1 + \eta \eta_i) (1 - \xi_i^2 + 3 \xi \xi_i) + \frac{2}{b^2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta_i^2 + 3 \eta \eta_i) \\
 S_{i22} &= \frac{2\nu}{a} \xi_i^3 (1 + \eta \eta_i) (1 + 3 \xi \xi_i) & S_{i23} &= \frac{2}{b} \eta_i^3 (1 + \xi \xi_i) (1 + 3 \eta \eta_i) \\
 S_{i31} &= \frac{1-\nu}{ab} [\xi_i (1 + \eta \eta_i) (\eta_i - 2\eta) + \eta_i (1 + \xi \xi_i) (\xi_i - 2\xi) + \xi_i \eta_i (2 + \xi \xi_i + \eta \eta_i - \xi^2 - \eta^2)] \\
 S_{i32} &= \frac{1-\nu}{b} [\xi_i^2 \eta_i (1 + \xi \xi_i)^2 - 2(1 + \xi \xi_i) (1 - \xi \xi_i)] \\
 S_{i33} &= \frac{2}{b} [\xi_i \eta_i^2 (1 + \eta \eta_i)^2 - 2(1 + \eta \eta_i) (1 - \eta \eta_i)]
 \end{aligned}$$

Matica tuhosti je definovaná rovnicou

$$\underline{k} = \int \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} dA \quad (22)$$

resp.

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} & \underline{k}_{13} & \underline{k}_{14} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} & \underline{k}_{23} & \underline{k}_{24} \\ \underline{k}_{31} & \underline{k}_{32} & \underline{k}_{33} & \underline{k}_{34} \end{bmatrix} \quad (23)$$

pričom submatice sú definované vzťahom

$$\underline{k}_{ij} = \int \underline{B}_{ij}^t \underline{D} \underline{B}_{ij} dA \quad (24)$$

## 5. Výpočet odozvy obdĺžnikovej dosky od účinku tlaku zvukových vln

Zaťaženie obdĺžnikovej dosky od účinku tlakových zvukových vln šíriacich sa v tvare guľových vln a zdroj budenia sa nachádza vo výške  $H$  nad doskou, obr. 3, sa určí zo vzťahu

$$q(t) = \frac{q_0 H}{R} \sin \omega \left( t - \frac{R}{c} \right) = \frac{q_0 H}{R} \left( \cos \frac{\omega R}{c} \sin \omega t - \sin \frac{\omega R}{c} \cos \omega t \right) \quad (25)$$

System pohybových rovníc pri riešení odozvy

$$\underline{M} \ddot{w}(t) + \underline{B} \dot{w}(t) + \underline{K} w(t) = \underline{f}(t) \quad (26)$$

kde

$$\underline{f}(t) = \underline{A}_i q(t) \quad (27)$$

Riešenie systému rovníc (26) hľadáme v tvare

$$w_i(t) = A_i \sin \omega t + B_i \cos \omega t \quad (28)$$

Ak tlmenie predpokladáme v tvare

$$\underline{B} = 2\omega_b \underline{M} \quad (29)$$

riešením systému pohybových rovníc (26) je dané súčtom riešení algebraických rovníc

$$\begin{aligned} (\underline{K} - \omega^2 \underline{M})\underline{a} - 2\omega_b \omega \underline{M} \underline{b} &= \underline{f}_c \\ 2\omega_b \omega \underline{M} \underline{a} + (\underline{K} - \omega^2 \underline{M})\underline{b} &= \underline{f}_s \end{aligned} \quad (30)$$

Partikulárne riešenie (28) možno vyjadriť pomocou jedinej harmonickej funkcie

$$\underline{r}(t) = \underline{r} \sin(\omega t + \phi) \quad (31)$$

kde

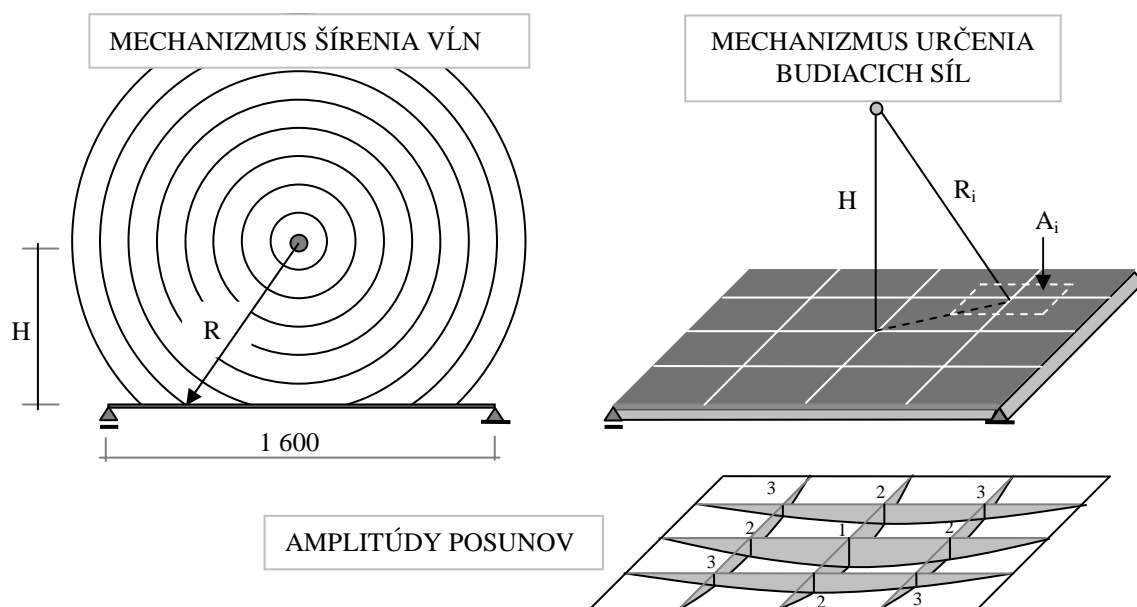
$$r_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad \varphi_i = \arctg \frac{b_i}{a_i} \quad (32)$$

Príklad :-

Na príklade sklenej kĺbovo podpretej platne stanoviť odozvu od účinku tlaku zvuku. Parametre platne: hrúbka  $h = 0,01$  m,  $l_x = l_y = 1,60$  m, hustota  $\rho = 7,5 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, modul pružnosti  $E = 70 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup>, tlak vo vzdialenosti 300 m od zdroja je  $q = 2$  N/m<sup>2</sup>. Frekvencia budenia  $\omega = 120$  s<sup>-1</sup>,

Riešenie :

Vlastné frekvencie dosky sú  $\omega_1 = 70$  s<sup>-1</sup>,  $\omega_2 = 280$  s<sup>-1</sup>,  $\omega_3 = 630$  s<sup>-1</sup>,



Obr. 3 Odozva dosky od zaťaženia tlakovými vlnami

Základné charakteristiky numerickej analýzy sú uvedené v tabuľke 1.

Tabuľka 1

Uzol	$f_{ci}$ [N]	$f_{si}$ [N]	$f_i$ [N]	$w_i$ [m]	$\varphi_i$ [m]
1	1.850	- 4.773	1.973	$4.798 \cdot 10^{-6}$	-1.163
2	1.850	- 4.773	1.973	$4.798 \cdot 10^{-6}$	-1.172
3	1.850	- 4.773	1.973	$4.798 \cdot 10^{-6}$	-1.163

## 6. Záver

Uvedená metodika stanovenia odozvy od účinkov tlakových vln má všeobecnú platnosť a možno ju použiť na riešenie príbuzných problémov, ako je napr. výpočet odozvy nosných systémov stavieb od účinkov technickej seizmicity spôsobenej výbuchom nálože umiestnenej pod alebo nad zemským povrchom. Odvodená matica tuhosti vrstevnatého prúťového alebo obdĺžnikového prvku má rovnakú stavbu ako matica tuhosti prvku homogénneho a možno ju jednoducho zabudovať priamo alebo nepriamo určením ekvivalentných parametrov do štandardných výpočtových programov ako je napr. Anzys, Nexis a pod. Jej použitie je mnohostranné pri riešení široko-spektrálnych úloh praxe alebo výskumu.

## 7. PodĎakovanie

Príspevok bol vypracovaný za finančnej podpory zo štátnych prostriedkov prostredníctvom Agentúry VEGA SR, registračné číslo projektu 1/0849/08.

## 8. Literatúra

Lechnickij, C.G. (1951) Anizotropnyje plastinki. *GITTL*, Moskva.

Marton, P. (1991) Výpočet odozvy kotvených stožiarov od účinku pretrhnutia kotviaceho lana. *Inžényrské stavby*, pp.404-406.

Marton, P. (2008) Analýza napätosti vrstevnatých prúťových a plošných sústav pri statickom a dynamickom zaťažení, in: *Výpočty konstrukcí metodou konečných prvků*. Západočeská univerzita, Plzeň.

Waller, H. & Krings, W. (1974) *Bautechnik*, 51, pp. 86-92.