



ON THE SOLUTION OF LAMINAR FLOW INSTABILITY USING ORR-SOMMERFELD EQUATION

S. Knotek, M. Jícha¹

Summary: *The paper gives an introduction in the theory of laminar flow instability solution using the Orr-Sommerfeld equation. There are summarized assumptions for derivation of the equation and clarified the meaning of the solution for the instability growth. There is given solution method with results for the Poiseuille flow and for the Blasius and Pohlhausen solutions of the boundary layer velocity profiles.*

1. Úvod

Problém nestability laminárních smykových vrstev byl řešen od konce devatenáctého století v souvislosti s problematikou přechodu laminárního proudění do turbulentního režimu. Po počátečních neúspěšných snahách o odvození kritérií nestability z energetických úvah našel úspěšný přístup lord Rayleigh (1842-1919). Využil předpokladu, že v případě malých amplitud výchylek se systém chová lineárně a lze tedy dle Fourierova principu superpozice nahradit obecnou poruchu superpozicí sinusoidálních oscilací (poruchových vln) základního proudění. Princip řešení pak spočívá ve sledování tendence růstu amplitud poruchových vln šířících se ve směru základního proudění.

Složitost úlohy vedla k zavedení zjednodušujících předpokladů. Především je smyková vrstva základního proudění aproximována dvourozměrným paralelním prouděním

$$(u, v) = (U + u', v'), \quad (1)$$

kde $U(y)$ je známý profil a $u'(x, y, t)$, $v'(x, y, t)$ jsou rychlostní fluktuace ve směru osy x a y . Mezi zjednodušujícími předpoklady bylo dále zahrnuto i zanedbání neviskózních členů, což se však ukázalo jako příliš velké zjednodušení [Tesař (1996)]. Konečnou rovnici odvodili nezávisle Orr (1907) a Sommerfeld (1908) linearizací pohybových rovnic pro nestlačitelné proudění. Oprávněnost dvourozměrného přístupu podal Squire prací z roku 1933, ve které ukázal, že trojrozměrné proudění vykazuje větší stabilitu než proudění dvourozměrné.

Experimentální ověření teorie rozvoje infinitezimálních poruch laminárního smykového proudění provedli až roku 1943 Schubauer a Skramstad. Vlny reprezentující tyto poruchy dnes nazýváme Tollmienovy-Schlichtingovy.

Původní význam Orrovy-Sommerfeldovy rovnice (dále OS) pro řešení přechodu do turbulence ustoupil dnes již do pozadí v důsledku rozvoje neparalelních a nelineárních přístupů. Přesto si rovnice stále ponechává svůj význam v řešení klasických problémů hydrodynamické

¹ Ing. Stanislav Knotek, prof. Ing. Miroslav Jícha, CSc., Energetický ústav, Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně, Technická 2/2896, 616 69 Brno, tel.: +420 541143242, e-mail: yknote01@fme.vutbr.cz

nestability, jako je například nestabilita kapalinových vrstev. Rovnice umožňuje predikovat amplitudy oscilací a jejich růst, dále frekvence rozruchů, které jsou nejvíce zesilovány, a také posuzovat vliv rychlostních profilů na oblast stability. Zde je však při řešení třeba jistá obezřetnost, neboť některé profily vykazují v protikladu s realitou stabilitu v celém rozsahu frekvencí i Reynoldsových čísel základního proudu. Výsledky řešení rovnice je tedy třeba posuzovat s ohledem na splnění výchozích předpokladů a brát v úvahu, že proces destabilizace je podmíněn i dalšími mechanismy, než jaké postihuje výchozí teorie Orrovy-Sommerfeldovy rovnice.

2. Teorie Orrovy-Sommerfeldovy rovnice

Ve shodě s výše uvedeným předpokladem superpozice rychlostních vln popisujících rozvoj oscilací definujeme flukтуаční vlny pomocí proudové funkce poruch

$$\Psi = \phi(y) \exp[i(\alpha x - \beta t)], \quad (2)$$

kde $\phi(y)$ je komplexní amplitudová funkce, α reálné vlnové číslo a β komplexní číslo specifikující růst poruch v čase. Rychlostní fluktuace pak získáme z definice proudové funkce jejími derivacemi

$$u' = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{d\phi(y)}{dy} \exp[i(\alpha x - \beta t)], \quad v' = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -i\alpha \phi(y) \exp[i(\alpha x - \beta t)]. \quad (3)$$

Dosažením rychlostí (1) a tlaku $p = P + p'$ do Navierových-Stokesových rovnic pro nestacionární dvoudimenzionální nestlačitelné proudění a následnou linearizací a eliminací tlakového členu lze obdržet Orrovu-Sommerfeldovu rovnici

$$(U - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - U''\phi = \frac{1}{i\alpha Re}(\phi'''' - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi), \quad (4)$$

kde $Re = U_0 L / \nu$ definuje Reynoldsovo číslo hlavního proudu s charakteristickým rozměrem L a charakteristickou rychlostí U_0 . Rovnice z matematického hlediska představuje problém vlastních hodnot diferenciální rovnice pro amplitudovou funkci ϕ a komplexní rychlost

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = c_R + ic_I,$$

kde s ohledem na vztahy (3) c_R představuje fázovou rychlost vln a rychlost c_I determinuje hydrodynamickou stabilitu podmínkami

$$\begin{aligned} c_I < 0 & \quad \text{proudění je stabilní,} \\ c_I > 0 & \quad \text{proudění je nestabilní,} \\ c_I = 0 & \quad \text{proudění je neutrálně stabilní,} \end{aligned} \quad (5)$$

v závislosti na Reynoldsově čísle, rychlostním profilu základního proudu $U(y)$ a vlnovém čísle α .

Poznamenejme, že analýza stability uvažující komplexní rychlost c a reálná vlnová čísla α a β se nazývá analýza časové stability. Zvolíme-li reálnou rychlost c a komplexní vlnové číslo α , pak se jedná o problematiku prostorové stability. Tesař (1996) ovšem s odkazem na práci Gastera (1962) uvádí, že oba přístupy jsou ekvivalentní v matematickém smyslu.

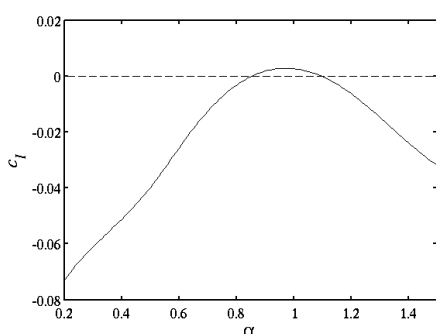
Věnujme se v dalším textu analýze časové stability pro vybrané rychlostní profily.

3. Stabilita Poiseuilleova proudění

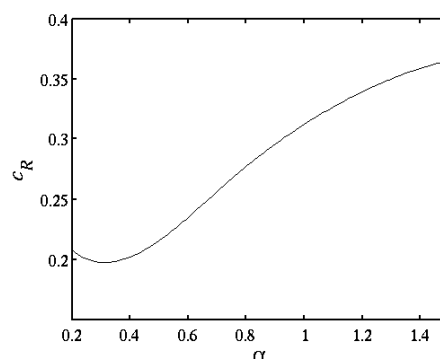
Rychlostní profil Poiseuilleova proudění ve válcové trubici je v bezrozměrných souřadnicích dán ve tvaru $U(y) = 1 - y^2$. Řešení problému stability OS rovnicí vyžaduje doplnění rovnice okrajovými podmínkami. V tomto případě volíme

$$\phi = \phi' = 0 \quad \text{v } y = \pm 1. \quad (6)$$

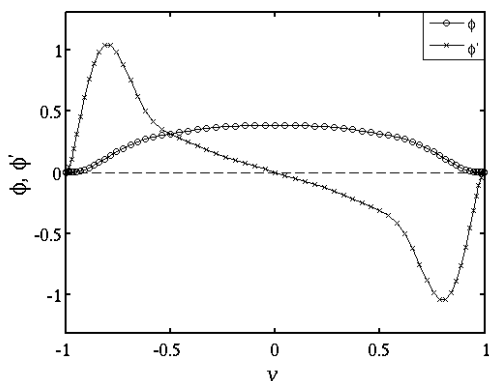
Rozřešení rovnice podává informaci o fázové rychlosti c_R a tendenci růstu nestabilit pomocí rychlosti c_I v závislosti na vlnovém čísle poruchových vln α (obrázek 1 a 2) a dále informaci o velikosti amplitud rychlostních fluktuací pomocí amplitudové funkce ϕ v závislosti na vzdálenosti od stěn potrubí y (obrázek 3). Vzhledem k tomu, že amplitudy fluktuací jsou infinitezimálně malé, spočívá význam řešení rovnice ponejvíce ve znaménku parametru c_I v závislosti na Reynoldsově čísle základního proudění a vlnové délce poruch. *Křivka neutrální stability*, na níž rychlost c_I nabývá nulové hodnoty, rozděluje prostor charakteristik (Re, α) na oblast stability a nestability (obrázek 4) a hovoříme tedy také o *mezi stability*. Minimální Reynoldsovo číslo, pro něž existuje nestabilní frekvence, označujeme jako kritické a v případě Poiseuilleova proudění nabývá hodnoty $Re_k = 5772$ pro $\alpha_k = 1.02$. Uvedené obrázky byly získány pomocí Čebyševovy kolokační metody uvedené v Motsa & Sibanda (2001) a implementované v jazyce Matlab.



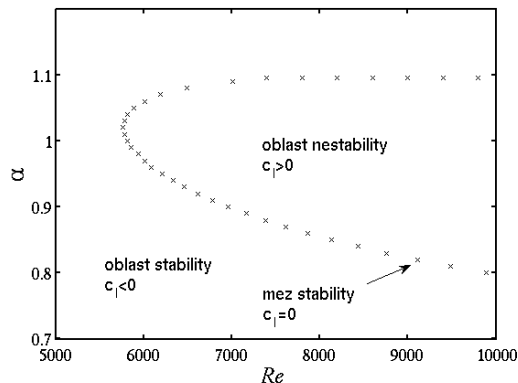
Obrázek 1: Rychlost c_I . $Re=8000$.



Obrázek 2: Rychlost c_R . $Re=2000$.



Obrázek 3: Amplitudová funkce. $Re=1000$.



Obrázek 4: Oblast nestability.

4. Stabilita mezních vrstev

Problematika řešení hydrodynamické nestability mezních vrstev pomocí OS rovnice se v porovnání s Poisseuilleovým prouděním vyznačuje okrajovými podmínkami

$$\phi = \phi' = 0 \quad \text{v } y = 0, \quad (7)$$

$$\phi = \phi' = 0 \quad \text{pro } y \rightarrow \infty, \quad (8)$$

které vyžadují specifické matematické přístupy. Vzhledem k fundamentálnímu řešení OS rovnice $\phi = e^{\pm\alpha y}$ pro $y \rightarrow \infty$ viz Schlichting (2000) nabízí se ošetření okrajové podmínky (8) předpisem

$$\phi'(\eta^*) = -\alpha\phi(\eta^*), \quad (9)$$

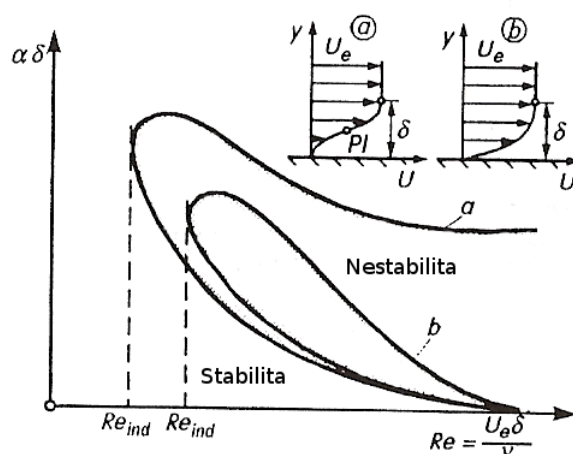
$$\phi''(\eta^*) = -\alpha\phi'(\eta^*), \quad (10)$$

kde η^* je vhodné číslo. V našem numerickém řešení za η^* dosazujeme krajní bod výpočetní oblasti odpovídající hodnotě bezrozměrné veličiny $y = 1$.

Literatura uvádí, že stabilita mezních vrstev je zásadně ovlivňována průběhem druhé derivace rychlostního profilu resp. přítomností inflexního bodu. S ohledem na vztah mezi tlakovým gradientem a křivostí profilu U

$$\mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (11)$$

je zřejmá přímá souvislost mezi existencí inflexního bodu v rychlostním profilu v závislosti na tlakovém gradientu. Vliv inflexního bodu na oblast stability reprezentuje obrázek 5. Z obrázku je zřejmé, že inflexní bod jednak snižuje kritické Reynoldsovo číslo a jednak pro velká Reynoldsova čísla rošiřuje oblast nestability, která naopak pro proudění s příznivým tlakovým gradientem (bez inflexního bodu) mizí.



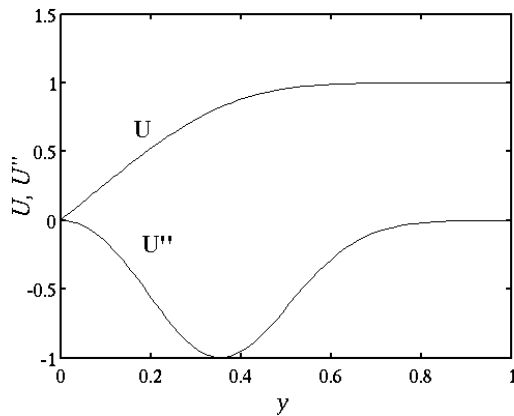
Obrázek 5: Křivky neutrální stability mezních vrstev. Převzato z Schlichting (2000)

S ohledem na uvedené skutečnosti uvedeme v dalším výsledky řešení OS rovnice pro Blasiovův a Pohlhausenův rychlostní profil s uvažováním tlakových gradientů.

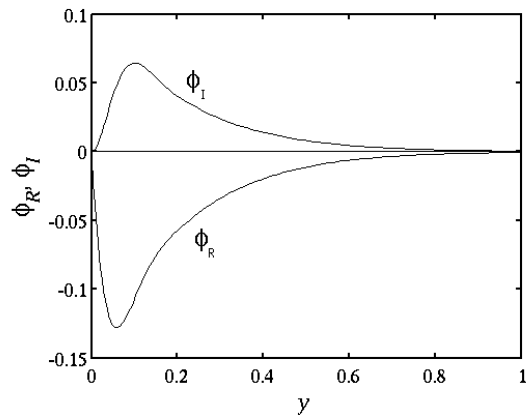
4.1. Blasiův profil

Zopakujme, že Blasiovým rychlostním profilem rozumíme řešení Prandtlovy rovnice mezní vrstvy bez tlakového gradientu. Pro naše účely bylo použito kódu numerického řešení *blasius.m* viz Hoepffner (b). Rychlostní profil včetně průběhu jeho normalizované druhé derivace je uveden na obrázku 6. Z obrázku lze nahlédnout, že inflexní bod se nachází na stěně, což koresponduje s rovnicí (11) a deklaruje, že Blasiův rychlostní profil představuje hraniční profil z hlediska existence inflexního bodu.

Aplikací Čebyševovy kolokační metody s ošetřením okrajových podmínek dle Hoepffner (a) obdržíme pro $\alpha = 1.5$ a $Re = 200$ amplitudovou funkci, jejíž reálná a imaginární složka je zachycena na obrázku 7.



Obrázek 6: Blasiův rychlostní profil.



Obrázek 7: Amplitudová funkce.

4.2. Pohlhausenův profil

Pohlhausenovými rychlostními profilem chápeme rodinu profilů definovanou polynomem čtvrtého stupně

$$\frac{U(y)}{U_e} = 2y - 2y^2 + y^4 + \frac{\Lambda}{6}y(1-y)^3, \quad (12)$$

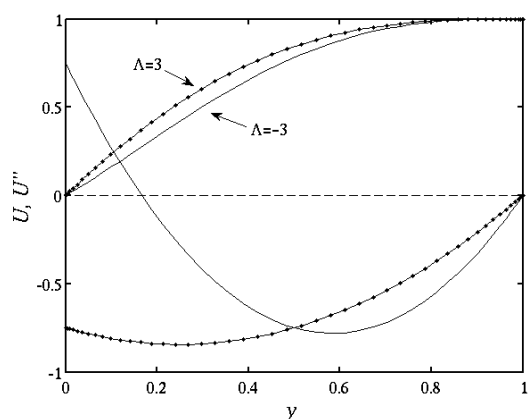
kde U_e je rychlost vnějšího proudu a

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \quad (13)$$

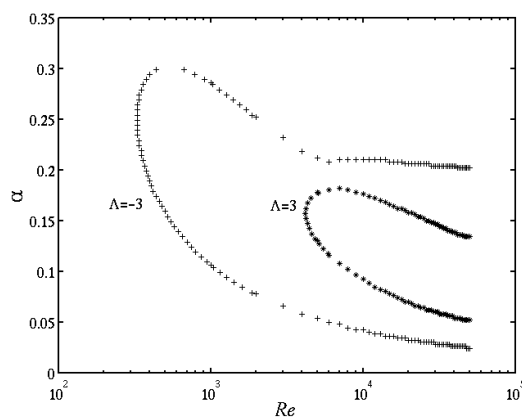
je tvarový parametr nabývající hodnot $\Lambda \in [-12; 12]$, přičemž pro $\Lambda < 0$ má rychlostní profil inflexní bod (Schlichting, 2000).

Rychlostní profilem včetně jejich druhých derivací pro $\Lambda = \{3; -3\}$ uvádí obrázek 8. Vliv inflexního bodu profilu na oblast nestability je zachycen na obrázku 9.

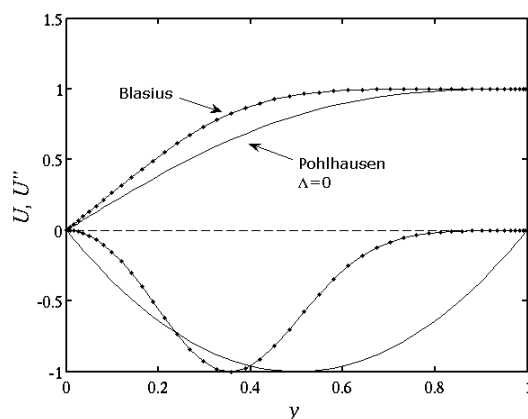
Pohlhausenův profil pro $\Lambda = 0$ odpovídá profilu bez tlakového gradientu a tudíž kvalitativně koresponduje s profilem Blasiovým. Porovnání obou rychlostních profilů a oblastí nestabilit v logaritmických souřadnicích reprezentují obrázky 10 a 11.



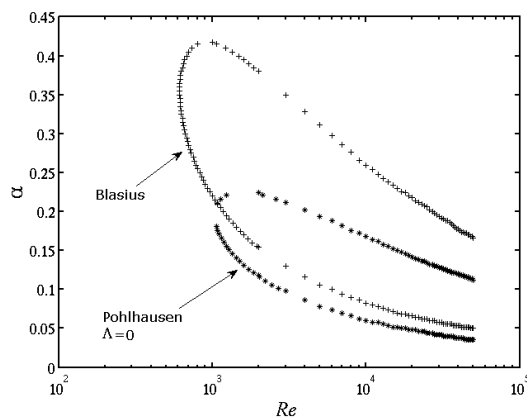
Obrázek 8: Rychlostní profily.



Obrázek 9: Oblasti stability.



Obrázek 10: Rychlostní profily.



Obrázek 11: Oblasti stability.

5. Zhodnocení výsledků

Výpočetní postup použitý k řešení nestability mezních vrstev lze v první řadě validovat řešením nestability Poiseuilleova proudění a porovnáním výsledných hodnot například s řešením dle článku Mota & Sibanda (2001). Referenčními hodnotami v tomto případě mohou být jednak vlastní hodnoty OS rovnice, tj. rychlosti c_R a c_I , a jednak kritické Reynoldsovo číslo. V prvním případě obdržíme posloupnost hodnot v závislosti na počtu Čebyševových polynomů použitých v řešení viz tabulka 1. Kritické parametry nestabilního režimu jsou dle literatury (např. Orszag (1971)) dány hodnotami $Re_k = 5772.2$ a $\alpha_k = 1.021$. Těchto hodnot dosahuje zvolený přístup pro $N = 50$.

Výpočet oblastí nestabilit mezních vrstev je v porovnání s problémem nestability Poiseuilleova proudění náročnější na ošetření okrajových podmínek v nevlastním bodě. Výsledné grafy na obrázcích 9 a 11 deklarují kvalitativní shodu s teorií vlivu inflexního bodu rychlostního profilu na oblast nestability. Použijeme-li jako kvantitativní charakteristiku validace řešení hodnotu Re_k pak obdržíme hodnoty, které jsou v porovnání s výsledky uváděnými v literatuře v různé míře nadhodnoceny. V případě Blasiova resp. Pohlhausenova profilu pro $\Lambda = 0$ se jedná o hodnoty $Re_k = 520$ resp. $Re_k = 645$ (Schlichting, 2000) vs. $Re_k = 610$ resp. $Re_k = 1027$.

N	$c_R + ic_I$ (Motsa)	$c_R + ic_I$
30	0.23739952 + 0.00375098 i	0.23739952 + 0.00375098 i
40	0.23751460 + 0.00374111 i	0.23751460 + 0.00374111 i
50	0.23752612 + 0.00373920 i	0.23752612 + 0.00373920 i
60	0.23752650 + 0.00373967 i	0.23752650 + 0.00373966 i
64	0.23752649 + 0.00373967 i	0.23752649 + 0.00373967 i

Tabulka 1: Vlastní hodnoty OS rovnice pro Poisseuilleovo proudění. $\alpha = 1$, $Re = 10000$.

6. Závěr

Článek představuje úvodní příspěvek k problematice nestability laminárního proudění řešené pomocí teorie Orrovy-Sommerfeldovy rovnice. Na základě Čebyševovy kolokační metody pro řešení diferenciálních rovnic byla sestavena programová procedura v jazyce Matlab a její pomocí byl řešen okrajový problém Orrovy-Sommerfeldovy rovnice pro různé typy rychlostních profilů. Výsledná řešení kvalitativně odpovídají výsledkům uváděným v literatuře. V případě Poisseuilleova proudění procedura dosahuje obdobné přesnosti jako v případě referenčního postupu z článku Motsa & Sibanda (2001). Hodnoty kritických Reynoldsových čísel pro profily mezních vrstev jsou v porovnání s hodnotami uváděnými v literatuře nadhodnoceny. Tato diference je zřejmě způsobena aplikací univerzálního ošetření okrajových podmínek viz Hoepffner (a). Přesto lze dosáhnuté výsledky zejména z kvalitativního hlediska považovat za dostatečně reprezentativní dokumentaci vlivu rychlostních profilů na oblast nestability laminárního proudění. Zvolený postup navíc deklaruje poměrně jednoduchou metodu řešení problému vlastních hodnot diferenciální rovnice s nehomogenními okrajovými podmínkami, jehož exaktní rozřešení je v případě Orrovy-Sommerfeldovy rovnice tématem vědeckých publikací mezinárodní úrovně.

7. Poděkování

Článek vznikl za grantové podpory GA ČR z projektu GA101/08/0096.

8. Reference

- Hoepffner, J.(a): Implementation of boundary conditions, <http://www.lmm.jussieu.fr/~hoepffner/boundarycondition.pdf>, 12.3.2010.
- Hoepffner, J.(b): PhD codes, *blasius.m* <http://www.lmm.jussieu.fr/~hoepffner/codes.php>, 18.3.2010.
- Motsa, S.S., Sibanda, P. 2001: On the Chebyshev spectral collocation method in channel and jet flows, *J. Pure Math.*, 1, s. 36-47.
- Orszag, S.A. 1971: Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, *J. Fluid Mech.*, 50, s. 689-703.
- Schlichting, H.; Gersten, K.: *Boundary-layer theory*, 8th Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 2000, s. 424-479.
- Tesař, V. 1996: *Mezní vrstvy a turbulence*, Vydavatelství ČVUT, ISBN 80-01-00675-1.