International Conference
ENGINEERING MECHANICS 2010
Svratka, Czech Republic, May 10 – 13, 2010

ON APPLICATION OF GENERALIZED FUNCTIONS TO CALCULATIONS OF THIN-WALLED BEAMS

J. Sobotka*

Summary: *This article presents Ph.D. thesis dealing with applications of generalized functions (distributions) to analytical calculations of thin-walled beams with discontinuities in loading, supports, mid-line contour geometry and due to internal hinges or couplings. Three mathematical models of thin-walled beams have been generalized here using the distributional derivative in order to hold true also at points of discontinuity of unknown quantities. The first model is for thin-walled prismatic beam bending that covers the effect of shear lag based on the first approximation of mid-surface shear strain. The second one is for restrained torsion of open cross-section thin-walled prismatic bars. The third one is for coupled bending and torsion of open cross-section thin-walled prismatic beams that covers the effect of restrained warping using plane approximation of bending warping and sectorial approximation of mid-line contour warping.*

1. Úvod

Při výpočtech přetvoření a napjatosti strojních konstrukcí a jejich částí i inženýrských staveb se často setkáváme s nespojitostmi v zatížení nebo geometrii. Jako základní lze uvést tyto případy nespojitostí:

1. Rozložení vnějších účinků na vyšetřované oblasti:
    a. měrná zatížení po částech spojitá nebo s nespojitou derivací,
    b. osamělá břemena nebo silové dvojice podél střednice,
    c. soustředěné liniové zatížení podél předepsané křivky,
2. Časový průběh vnějších účinků (např. impulsní břemena).
3. Proměnnost geometrických rozměrů resp. tuhosti konstrukce:
    a. stupňovitě proměnný rozměr (tloušťka stěny nosníku, tloušťka desky nebo skořepiny),
    b. nespojitost tuhosti vlivem žeber, vložených kloubů apod.
4. Způsob uložení konstrukce (bodové, resp. po částech spojité podepření).
5. Konfigurace konstrukce (nespojitost křivosti osy nebo střednicové plochy).

Klasický postup výpočtu jednodimenzionálních konstrukčních prvků s uvedenými nespojitostmi spočívá v rozdělení integračního intervalu na úseky bez nespojitostí, v nalezení

* Ing. Jiří Sobotka, ČEZ, a.s., 67550 Dukovany, tel. +420 561 10 5234, e-mail: jiri.sobotka@cez.cz

spojitého řešení s neznámými integračními konstantami v každém úseku a v určení těchto konstant z okrajových podmínek a podmínek spojitosti složek přetvoření mezi úseky. Pracnost tohoto postupu roste úměrně s počtem těchto úseků a řádem řešené diferenciální úlohy.

Některé důsledky použití klasické analýzy při formulaci matematických modelů ve formě diferenciální úlohy jsou kupř. u ohybu nosníku tyto:

1) V bodech nespojitosti posouvající síly a vnitřního ohybového momentu neplatí Schwedlerovy věty,
2) Osamělá břemena, osamělé silové dvojice a soustředěné vazbové reakce umístěné mezi konci nosníku nejsou v modelu matematicky vyjádřeny,
3) Matematické modely obsahují v zápisu zatížení pouze zatížení měrná,
4) Vložené kinematické dvojice mezi konci nosníku nejsou v modelu matematicky zapsány.

První pokus, jak u nosníku matematicky zapsat jediným výrazem vnitřní ohybový moment obvykle zapisovaný po částech, byl předložen v (Clebsch, 1862). Stejnou problematikou se zabýval Macaulay (1919), který publikoval metodu, s níž se nyní můžeme setkat pod názvy „Macaulay's bracket", „the singularity function method" nebo „Macaulay's method". Výhodou této metody je, že redukuje množinu obyčejných diferenciálních rovnic druhého stupně, vázaných podmínkami spojitosti a hladkosti průhybové čáry, na jedinou obyčejnou diferenciální rovnici druhého stupně. Tato metoda znamenala v zásadě první směřování k současným zobecněným funkcím, přičemž význam nespojitého chování byl ukryt do závorkové symboliky, která je typicky ve tvaru $[x-a]^n$; pokud je argument uvnitř závorky záporný, člen je ignorován, zatímco je-li kladný, ponechává si běžný význam (Stephen, 2007). Takovéto členy se přirozeně objevují při vyjádření vnitřního ohybového momentu podél nosníku, přičemž při konstantním měrném příčném zatížení je $n=2$, pro osamělé břemeno je $n=1$ a pro osamělou silovou dvojici je $n=0$. Navíc, osamělé zatížení je umístěno (nebo začíná v případě měrného zatížení) v místě $x=a$. Výpočet průhybu prizmatického nosníku při malém natočení příčného řezu se provede dvojí integrací členů uvedeného typu, a to vzhledem k argumentu celé závorky, nikoliv vzhledem k proměnné x, aby význam závorky zůstal nedotčen.

Metoda, kterou Macaulay publikoval, je široce přičítána jemu, avšak Weissenburger (1964) ukazuje, že tento přístup pochází od Clebsche (1862). Tato metoda byla později zobecněna. Mahing (1964) tuto metodu použil k výpočtu obdélníkových desek s protějšími stranami jednoduše podepřenými a s osamělým zatížením. Wittrick (1965) pomocí ní analyzoval kruhové desky s osově symetrickým zatížením. Brungraber (1965) použil tuto metodu v případě, kdy měl nosník podpory situované mezi konci. Conway (1980) a Selek & Conway (1983) zobecnili tuto metodu na dvojrozměrné úlohy popsané parciálními diferenciálními rovnicemi. Arbabi (1991) rozšířil tuto metodu pro nosníky s vloženým kloubem a se skokovými nespojitostmi v ohybové tuhosti. Falkon (2002) rozšířil tuto metodu pro případ, že zatížení vyvolává nespojitosti v průhybu a natočení příčného řezu nosníku. Ecsedi & Dluhi (2004) použili tuto metodu, označenou jako „Clebsch-Macaulay", k odvození frekvenční rovnice pro ohybové kmity nosníku se soustředěnými parametry, přičemž použité označení a definice nespojitých funkcí byly převzaty z učebnice (Gere & Timoshenko, 1985). Timošenkův nosník byl analyzován pomocí této metody v (Stehen, 2007).

Ještě před založením teorie distribucí byla zavedena v kvantové mechanice impulsní funkce (Dirac, 1930), která je nyní známa také pod názvem Diracova delta funkce. Počátky jejího vzniku lze nalézt již v 19. století, v pracích Hermita, Cauchyho, Poissona, Kirchhoffa, Helmhotze, Lorda Kelvina a Heavisidea (Van der Pol & Bremmer, 1955). Vlastnosti tohoto matematického objektu jsou však v rozporu s pojmem funkce, což Dirac sám zdůraznil i tím, že pro něj zavedl speciální termín „improper function". Štěpánek (2001) kupř. uvádí jako označení tohoto objektu „švindlfunkce" $\delta(x-a)$, která je rovná nule všude kromě bodu $x=a$, v němž (populárně řečeno) má „nekonečnou hodnotu". Tato tzv. delta-funkce nemůže být klasickou funkcí, neboť integrál z funkce skoro všude rovné nule, je roven nule, zatímco pro ni má být roven 1. Po matematické stránce tento pojem zásadně zpřesnil až S. L. Sobolev (Štěpánek, 2001), který v roce 1936 jako první interpretoval δ-funkci jako lineární spojitý funkcionál přiřazující každé spojité funkci její hodnotu v bodě $x=a$. Později byl místo termínu „improper function" zaveden termín „generalized function" (Temple, 1953). V teorii distribucí (Schwartz, 1966; Schwartz, 1972; Štěpánek, 2001; Kanwal 2004) je termín zobecněná funkce synonymem pro pojem distribuce. Tak se nazývá spojitý lineární funkcionál definovaný na prostoru testovacích funkcí, které jsou finitní a mají derivace všech řádů (Štěpánek, 2001).

Článek (Hýča, 1972) ukazuje použití distribucí k vyjádření nespojitého měrného zatížení, osamělého břemene a silové dvojice při výpočtu ohybu nosníku se zahrnutím vlivu posouvající síly na přetvoření. V článku (Yavari et al., 2000) byly zkoumány pomocí distribucí dva typy nosníků s nespojitostmi v zatížení a geometrii. První typ byl Eulerův-Bernoulliův nosník rozdělený na dva segmenty odlišné ohybové tuhosti, které byly propojeny vloženým kloubem a posuvnou kinematickou dvojicí. Tento nosník byl uložen na koncích. Druhý typ byl Timošenkův nosník, který měl stejné uspořádání. Při odvození diferenciálních rovnic pro výpočet jejich přetvoření vyšli autoři z obecného vyjádření průhybu pomocí Heavisideovy nespojité funkce, který postupně derivovali a vyjadřovali velikosti nespojitostí násobené Diracovou distribucí nebo jejími derivacemi. Zatížení, jako osamělé břemeno a silovou dvojici, zahrnuli do tzv. ekvivalentního měrného příčného zatížení. Kombinované zatížení v podélném a příčném směru u Eulerova-Bernoulliho nosníku s nespojitostmi v geometrii bylo uvažováno při jeho výpočtu pomocí distribucí v (Yavari & Sarkani, 2001). Použití distribucí k vyjádření nespojitého měrného zatížení, osamělého břemene a silové dvojice můžeme nalézt v článku (Hýča, 2005), který se zabývá analýzou nosníku s kombinovaným zatížením v podélném a příčném směru se zahrnutím vlivu počáteční imperfekce tvaru střednice. V článcích (Yavari et al., 2001) a (Toma, 2008) nalezneme aplikace distribucí k výpočtu nosníku na pružném podkladu. Biondi & Caddemi (2007) použili distribuce ke studiu nosníků se singularitami v ohybové tuhosti.

Wang & Qiao (2007) analyzovali pomocí distribucí kmitání Eulerova-Bernoulliho nosníku s vloženými kinematickými dvojicemi a s osamělým harmonickým zatížením. Caddemi & Calio (2009) publikovali řešení v uzavřeném tvaru pro modální tvary kmitání Eulerova-Bernoulliho nosníku, který obsahoval lokální otevřené trhliny. Ty byly modelovány jako posloupnost Diracových distribucí v ohybové tuhosti. V této studii trhliny nebyly podrobeny efektu uzavírání. Nelineární dynamické chování nosníků s lokálními uzavírajícími se trhlinami bylo analyzováno v (Caddemi et al., 2009), přičemž trhliny byly modelovány pomocí Diracovy distribuce, což umožnilo vyjádřit modální tvary nosníku v uzavřeném tvaru.

2. Cíle disertační práce

Pomocí zobecněných funkcí:

1) Odvodit obecné řešení neklasického matematického modelu ohybu a smyku prizmatického tenkostěnného nosníku s ohybově deplanabilním průřezem při první aproximaci smykových deformací střednicové plochy (nehomogenní diferenciální okrajová úloha 6. řádu s obecným příčným zatížením s libovolnými nespojitostmi (Hýča, 1975; Hýča, 1986)).
2) Odvodit obecné řešení klasického matematického modelu stísněného krutu prizmatického tenkostěnného nosníku s torzně deplanabilním otevřeným průřezem při výsečové aproximaci střednicové deplanace (nehomogenní diferenciální okrajová úloha 4. řádu s obecným krouticím a bimomentovým zatížením s libovolnými nespojitostmi (Vlasov, 1962)).
3) Odvodit obecné řešení neklasického matematického modelu vázaného ohybu, smyku a kroucení prizmatického tenkostěnného nosníku s ohybově i torzně deplanabilním otevřeným průřezem při rovinné aproximaci ohybové deplanace a výsečové aproximaci střednicové deplanace (nehomogenní diferenciální okrajová úloha 12. řádu s obecným příčným, ohybově-momentovým, krouticím a bimomentovým zatížením s libovolnými nespojitostmi (Hýča, 1994; Hýča, 2005)).
4) Vypočíst pro tenkostěnný nosník skříňového profilu dle modelu stísněného ohybu s první aproximací smykových deformací střednicové plochy průběh bezrozměrného axiálního membránového napětí podél střednice v místě břemene a podél nosníku na rozhraní pásnice a stojiny, kde se vyskytuje špička napětí (nosník kloubově podepřen a zatížen osamělým břemenem).

3. Použitá označení

Označení	Název veličiny	Fyzikální rozměr
$T_y(x)$, $T_z(x)$	Složky posouvající síly	N
$M_y(x)$, $M_z(x)$	Složky ohybového momentu	Nm
$M_k(x)$	Krouticí moment	Nm
$B(x)$	Bimoment (Vlasov, 1962)	Nm^2
$M_d(x)$	Deplanační moment (Hýča, 1986)	Nm
$v(x)$, $w(x)$	Složky posunutí v příčném směru	m
$\varphi_y(x)$, $\varphi_z(x)$	Složky natočení příčného průřezu nosníku	rad
$\varphi(x)$	Úhel kroucení	rad
$\theta(x)$	Relativní úhel zkroucení (zkrut)	rad/m
$\varphi_\omega(x)$	Deplanační funkce	m^{-1}
$\omega(x)$	Hlavní výsečová (sektoriální) plocha (Vlasov, 1962)	m^2
$\rho_y(x)$	Deplanační funkce (Hýča 1975; Hýča, 1986)	1
$q_y(x)$, $q_z(x)$	Složky měrného příčného zatížení	N/m
$m_y(x)$, $m_z(x)$	Složky měrného ohybového zatížení	Nm/m
$m_k(x)$	Měrné krouticí zatížení	Nm/m
$m_\omega(x)$	Měrné bimomentové zatížení	Nm^2/m
F_{yi}, F_{zi}	Složky osamělého i-tého břemene	N
C_{yi}, C_{zi}	Složky osamělé i-té silové dvojice	Nm

C_{ki}	Krouticí složka osamělé i-té silové dvojice	Nm
B_i	Osamělé i-té bimomentové zatížení	Nm^2
R_{yi}, R_{zi}	Složky i-té vazbové reakce	N
K_i	i-tý vazbový moment	Nm
Φ_i	Velikost skokové nespojitosti v natočení průřezu v místě i-tého vloženého kloubu (spojky)	rad
P_i	Velikost skokové nespojitosti v deplanační funkci v místě i-tého vloženého kloubu	1
Θ_i	Velikost skokové nespojitosti ve zkrutu v místě i-té vložené spojky	rad/m
l	Délka nosníku	m
a_{yi}, a_{zi}	Vzdálenost i-té složky osamělého břemene od levého konce nosníku z otevřeného intervalu $(0,l)$	m
b_{yi}, b_{zi}	Vzdálenost i-té složky vazbové reakce od levého konce nosníku z otevřeného intervalu $(0,l)$	m
d_{yi}, d_{zi}, d_{ki}	Vzdálenost i-té složky osamělé silové dvojice od levého konce nosníku z otevřeného intervalu $(0,l)$	m
e_i	Vzdálenost i-tého vazbového momentu od levého konce nosníku z otevřeného intervalu $(0,l)$	m
g_i	Vzdálenost i-tého osamělého bimomentového zatížení od levého konce nosníku z otevřeného intervalu $(0,l)$	m
k_i	Vzdálenost i-tého vloženého kloubu od levého konce nosníku z otevřeného intervalu $(0,l)$	m
s_i	Vzdálenost i-té vložené spojky od levého konce nosníku z otevřeného intervalu $(0,l)$	m
n_1 , *resp.* n_9	Celkový počet složek osamělých břemen mezi konci nosníku ve směru hlavní centrální osy z, resp. y	1
n_2 , *resp.* n_{10}	Celkový počet složek vazbových reakcí mezi konci nosníku ve směru hlavní centrální osy z, resp. y	1
n_3 , *resp.* n_{11}	Celkový počet složek osamělých silových dvojic mezi konci nosníku orientovaných ve směru hlavní centrální osy y, resp. z	1
n_4	Celkový počet vložených kloubů (mezi konci nosníku)	1
n_5	Celkový počet složek osamělých silových dvojic mezi konci nosníku orientovaných ve směru podélné osy x	1
n_6	Celkový počet vazbových momentů mezi konci nosníku	1
n_7	Celkový počet osamělých bimomentových zatížení mezi konci nosníku	1
n_8	Celkový počet vložených spojek (mezi konci nosníku)	1
E	Youngův modul pružnosti (v tahu - tlaku)	Pa
G	Modul pružnosti ve smyku	Pa
μ	Poissonovo číslo	1
A	Plocha průřezu	m^2
J_y, J_z	Kvadratické momenty plochy průřezu k hlavním centrálním osám	m^4
J_k	Moment tuhosti průřezu ve volném kroucení	m^4
J_ω	Výsečový moment setrvačnosti (moment tuhosti průřezu	m^6

	vůči deplanaci)	
β_y	Smykový koeficient průřezu (Hýča, 1986)	1
χ_y	Deplanační koeficient průřezu (Hýča, 1986)	1
Dirac(x-a_{y1})	Diracova distribuce posunutá do bodu $x = a_{y1}$	-
Heaviside(x-a_{z1})	Heavisideova nespojitá funkce jednotkového skoku posunutá do bodu $x = a_{z1}$	-
ξ	měrná souřadnice v podélném směru = x/l	1
ζ	měrná křivočará souřadnice podél střednice příčného průřezu = s/l_p	1
$\sigma_{x,MSO,bez}$	**bez**rozměrné normálné napětí v bodech střednicové plochy vypočtené dle **m**odelu **s**tísněného **o**hybu (1. aproximace)	1
s	křivočará souřadnice podél střednice příčného průřezu s počátkem na ose symetrie ležící v rovině ohybu nosníku	m
l_p	délka střednice příčného průřezu	m

4. Výsledky – vybrané soustavy diferenciálních rovnic a jejich řešení

Zobecněný model stísněného ohybu tenkostěnného nosníku s nespojitostmi

$$\frac{d}{dx}T_z(x) = -q_z(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_1} F_{zi}\,\mathrm{Dirac}(x-a_{zi})\right) + \left(\sum_{i=1}^{n_2} R_{zi}\,\mathrm{Dirac}(x-b_{zi})\right) \quad , \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}M_y(x) = T_z(x) + \left(\sum_{i=1}^{n_3} C_{yi}\,\mathrm{Dirac}(x-d_{yi})\right) \quad , \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}M_d(x) = G\,A\,\beta_y\,\rho_y(x) \quad , \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx}\rho_y(x) = \frac{M_d(x) + \beta_y M_y(x)}{E\,J_y\,(\chi_y - \beta_y^{\,2})} + \left(\sum_{i=1}^{n_4} \mathrm{P}_i\,\mathrm{Dirac}(x-k_i)\right) \quad , \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx}\phi_y(x) = \frac{\beta_y M_d(x) + \chi_y M_y(x)}{E\,J_y\,(\beta_y^{\,2} - \chi_y)} + \left(\sum_{i=1}^{n_4} \Phi_i\,\mathrm{Dirac}(x-k_i)\right) \quad , \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}w(x) = \phi_y(x) \quad . \tag{6}$$

Vybraná část z obecného řešení systému diferenciálních rovnic (1) až (6) zobecněného modelu stísněného ohybu tenkostěnného nosníku s nespojitostmi

$$
\begin{aligned}
M_d(x) = {} & M_d(0)\cosh(\Omega_1 x) + \left(-x + \frac{\sinh(\Omega_1 x)}{\Omega_1}\right)\beta_y T_z(0) \\
& + (-1 + \cosh(\Omega_1 x))\,\beta_y M_y(0) + \frac{\Delta\,\rho_y(0)\sinh(\Omega_1 x)}{\Omega_1} \\
& - \frac{\Delta\left(\sum_{i=1}^{n_4} \mathrm{P}_i\,\mathrm{Heaviside}(x-k_i)\sinh(\Omega_1(-x+k_i))\right)}{\Omega_1} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{n_1}\left(x - a_{zi} + \frac{\sinh(\Omega_1(-x+a_{zi}))}{\Omega_1}\right) F_{zi}\,\beta_y\,\mathrm{Heaviside}(x-a_{zi})\right) \\
& + \left(\sum_{i=1}^{n_3} 2\left(-1 + \left[\cosh\left(\frac{\Omega_1(-x+d_{yi})}{2}\right)\right]^2\right) C_{yi}\,\beta_y\,\mathrm{Heaviside}(x-d_{yi})\right) \\
& + \left(\sum_{i=1}^{n_2}\left(-x + b_{zi} - \frac{\sinh(\Omega_1(-x+b_{zi}))}{\Omega_1}\right) R_{zi}\,\beta_y\,\mathrm{Heaviside}(x-b_{zi})\right) \\
& + \frac{\beta_y \int_0^x q_z(\xi)\,(\Omega_1 x - \xi\,\Omega_1 + \sinh(\Omega_1(-x+\xi)))\,d\xi}{\Omega_1}
\end{aligned}
\quad , \tag{7}
$$

kde pomocné konstanty jsou

$$
\Delta = G\,A\,\beta_y \quad , \qquad \Omega_1{}^2 = \frac{\Delta}{E\,J_y\,(\chi_y - \beta_y{}^2)} \quad . \tag{8}
$$

Zobecněný model stísněného kroucení tenkostěnného prutu otevřeného profilu s nespojitostmi

$$
\frac{d}{dx}M_k(x) = -m_k(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_5} C_{ki}\,\mathrm{Dirac}(x-d_{ki})\right) + \left(\sum_{i=1}^{n_6} K_i\,\mathrm{Dirac}(x-e_i)\right) \quad , \tag{9}
$$

$$
\frac{d}{dx}\mathrm{B}(x) = M_k(x) - G\,J_k\,\theta(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_7} B_i\,\mathrm{Dirac}(x-g_i)\right) \quad , \tag{10}
$$

$$
\frac{d}{dx}\theta(x) = -\frac{\mathrm{B}(x)}{E\,J_\omega} + \left(\sum_{i=1}^{n_8} \Theta_i\,\mathrm{Dirac}(x-s_i)\right) \quad , \tag{11}
$$

$$
\frac{d}{dx}\phi(x) = \theta(x) + \left(\sum_{i=1}^{n_8} \Phi_i\,\mathrm{Dirac}(x-s_i)\right) \quad . \tag{12}
$$

Vybraná část z obecného řešení systému diferenciálních rovnic (9) až (12) zobecněného modelu stísněného kroucení tenkostěnného prutu

$$\mathrm{B}(x) = \mathrm{B}(0)\cosh(\Omega_2 x) + \frac{\sinh(\Omega_2 x)\, M_k(0)}{\Omega_2} - E\,\Omega_2\, J_\omega \sinh(\Omega_2 x)\,\theta(0)$$
$$+ E\,\Omega_2\, J_\omega \left(\sum_{i=1}^{n_8} \sinh(\Omega_2 (-x + s_i))\,\Theta_i\,\mathrm{Heaviside}(x - s_i) \right)$$
$$- \left(\sum_{i=1}^{n_6} \frac{K_i \sinh((-x + e_i)\,\Omega_2)\,\mathrm{Heaviside}(x - e_i)}{\Omega_2} \right)$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{n_5} \frac{C_{ki} \sinh((-x + d_{ki})\,\Omega_2)\,\mathrm{Heaviside}(x - d_{ki})}{\Omega_2} \right)$$
$$- \left(\sum_{i=1}^{n_7} B_i\,\mathrm{Heaviside}(x - g_i)\cosh(\Omega_2 (-x + g_i)) \right)$$
$$- \left(\frac{1}{\Omega_2} \int_0^x m_k(\xi)\sinh(\Omega_2 (x - \xi))\, d\xi \right) \quad , \tag{13}$$

kde pomocná konstanta je

$$\Omega_2{}^2 = \frac{G\,J_k}{E\,J_\omega} \quad . \tag{14}$$

Zobecněný model vázaného ohybu a kroucení tenkostěnného nosníku otevřeného profilu s nespojitostmi

$$\frac{d}{dx} T_z(x) = -q_z(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_1} F_{zi}\,\mathrm{Dirac}(x - a_{zi}) \right) + \left(\sum_{i=1}^{n_2} R_{zi}\,\mathrm{Dirac}(x - b_{zi}) \right) \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx} M_y(x) = T_z(x) - m_y(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_3} C_{yi}\,\mathrm{Dirac}(x - d_{yi}) \right) \tag{16}$$

$$\frac{d}{dx} \phi_y(x) = -\frac{M_y(x)}{E\,J_y} \tag{17}$$

$$\frac{d}{dx} \mathrm{w}(x) = \kappa_1\, T_y(x) + \kappa_2\, T_z(x) + \kappa_3\, M_k(x) + \kappa_4\, \phi_\omega(x) + \phi_y(x) \tag{18}$$

$$\frac{d}{dx} T_y(x) = -q_y(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_9} F_{yi} \, \text{Dirac}(x - a_{yi}) \right) + \left(\sum_{i=1}^{n_{10}} R_{yi} \, \text{Dirac}(x - b_{yi}) \right) \tag{19}$$

$$\frac{d}{dx} M_z(x) = -T_y(x) - m_z(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_{11}} C_{zi} \, \text{Dirac}(x - d_{zi}) \right) \tag{20}$$

$$\frac{d}{dx} \phi_z(x) = \frac{M_z(x)}{E J_z} \tag{21}$$

$$\frac{d}{dx} \text{v}(x) = \eta_1 \, T_y(x) + \kappa_1 \, T_z(x) + \eta_3 \, M_k(x) + \eta_4 \, \phi_\omega(x) + \phi_z(x) \tag{22}$$

$$\frac{d}{dx} M_k(x) = -m_k(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_5} C_{ki} \, \text{Dirac}(x - d_{ki}) \right) + \left(\sum_{i=1}^{n_6} K_i \, \text{Dirac}(x - e_i) \right) \tag{23}$$

$$\frac{d}{dx} \text{B}(x) = M_k(x) - G J_k \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right) - m_\omega(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_7} B_i \, \text{Dirac}(x - g_i) \right) \tag{24}$$

$$\frac{d}{dx} \phi_\omega(x) = -\frac{\text{B}(x)}{E J_\omega} \tag{25}$$

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = \eta_3 \, T_y(x) + \kappa_3 \, T_z(x) + \lambda_3 \, M_k(x) + (1 - G J_k \lambda_3) \, \phi_\omega(x) \tag{26}$$

Vybraná část z obecného řešení systému diferenciálních rovnic (15) až (26) zobecněného modelu vázaného ohybu a kroucení tenkostěnného nosníku

$$\phi(x) = \phi(0) + \frac{\Omega_3 \, E J_\omega \, \phi_\omega(0) \sinh(\Omega_3 \, x)}{G J_k} + \frac{(1 - \cosh(\Omega_3 \, x)) \, \text{B}(0)}{G J_k} + \frac{\eta_3 \, T_y(0) \sinh(\Omega_3 \, x)}{\Omega_3}$$
$$+ \frac{\kappa_3 \, T_z(0) \sinh(\Omega_3 \, x)}{\Omega_3} + \left(\frac{x}{J_k \, G} - \frac{E J_\omega \, \Omega_3 \sinh(\Omega_3 \, x)}{G^2 \, J_k^{\,2}} \right) M_k(0)$$
$$- \frac{\kappa_3 \left(\sum_{i=1}^{n_2} \text{Heaviside}(x - b_{zi}) \sinh(\Omega_3 \, (-x + b_{zi})) \, R_{zi} \right)}{\Omega_3}$$
$$+ \frac{\sum_{i=1}^{n_7} 2 \left[\sinh\left(\frac{\Omega_3 \, (x - g_i)}{2} \right) \right]^2 B_i \, \text{Heaviside}(x - g_i)}{G J_k}$$

$$
+\frac{\eta_3\left(\sum_{i=1}^{n_9}\text{Heaviside}(x-a_{yi})\,F_{yi}\sinh(\Omega_3\,(-x+a_{yi}))\right)}{\Omega_3}
$$

$$
-\frac{\eta_3\left(\sum_{i=1}^{n_{10}}\sinh(\Omega_3\,(-x+b_{yi}))\,\text{Heaviside}(x-b_{yi})\,R_{yi}\right)}{\Omega_3}
$$

$$
+\frac{\sum_{i=1}^{n_6}\left(x-e_i+\frac{E\,J_\omega\,\Omega_3\sinh(\Omega_3\,(-x+e_i))}{G\,J_k}\right)K_i\,\text{Heaviside}(x-e_i)}{G\,J_k}
$$

$$
+\frac{\sum_{i=1}^{n_5}\left(-x+d_{ki}-\frac{E\,J_\omega\,\Omega_3\sinh(\Omega_3\,(-x+d_{ki}))}{G\,J_k}\right)C_{ki}\,\text{Heaviside}(x-d_{ki})}{G\,J_k}
$$

$$
+\frac{\kappa_3\left(\sum_{i=1}^{n_1}\text{Heaviside}(x-a_{zi})\sinh(\Omega_3\,(-x+a_{zi}))\,F_{zi}\right)}{\Omega_3}
$$

$$
+\frac{\eta_3\int_0^x q_y(\xi)\sinh(\Omega_3\,(-x+\xi))\,d\xi+\kappa_3\int_0^x q_z(\xi)\sinh(\Omega_3\,(-x+\xi))\,d\xi}{\Omega_3}
$$

$$
+\frac{1}{G\,J_k}\int_0^x m_\omega(\xi)\,(-1+\cosh(\Omega_3\,(-x+\xi)))\,d\xi
$$

$$
-\left(\frac{1}{G^2\,J_k{}^2}\int_0^x m_k(\xi)\,(G\,J_k\,x-G\,J_k\,\xi+E\,J_\omega\,\Omega_3\sinh(\Omega_3\,(-x+\xi)))\,d\xi\right)
\quad , \tag{27}
$$

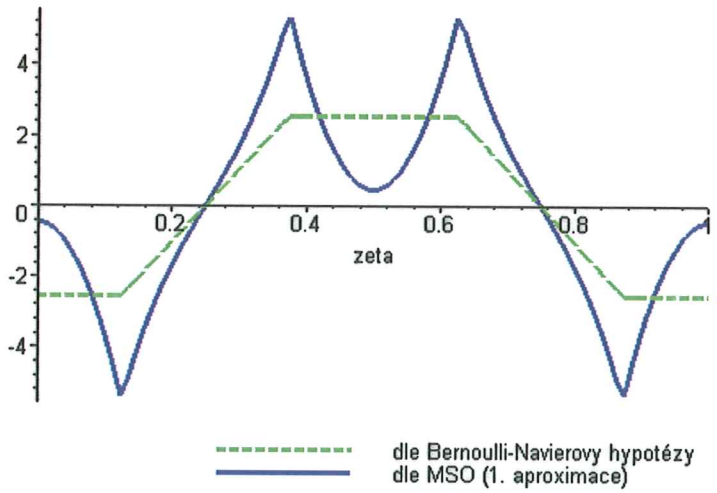
kde pomocná konstanta je

$$
\Omega_3{}^2=\frac{G\,J_k\,(1-\lambda_3\,G\,J_k)}{E\,J_\omega}\quad . \tag{28}
$$

Číselný výpočet tenkostěnného nosníku dle zobecněného modelu stísněného ohybu

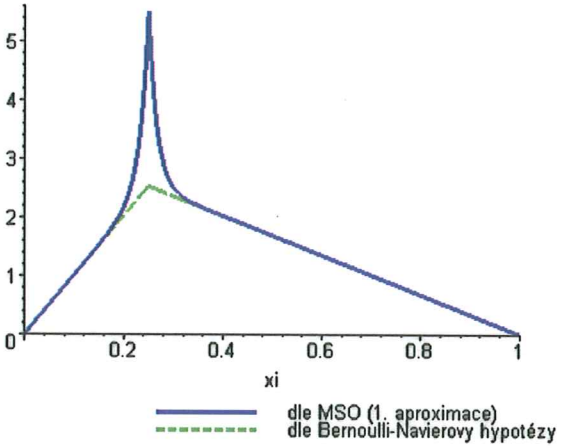
Jako ukázka praktické aplikace zobecněných funkcí byly vypočteny průběhy bezrozměrného normálného napětí (29), obr. 1, (30), obr. 2 u tenkostěnného nosníku skříňového profilu, který byl na koncích kloubově podepřen a zatížen osamělým břemenem ve vzdálenosti *l/4* od konce. Bezrozměrnosti normálného napětí bylo dosaženo jeho násobením velikostí plochy příčného průřezu (*A*) a dělením velikostí osamělého příčného zatížení (F_{z1}). Zadání pro výpočet bylo převzato z (Hýča, 1975). Výška stojin skříňového profilu byla *l/5*, šířka pásnic rovna výšce stojin. Tloušťka stojin byla *l/200* a tloušťka pásnic *l/100*. Materiálové konstanty: $E = 2{,}1.10^5$ MPa, $\mu = 0{,}3$.

$$\sigma_{x,\,MSO,\,bez}(\xi,\zeta)\big|_{\xi=1/4} =$$
$$(191.30\,\zeta - 20.768 - 323.32\,\zeta^2 + 851.14\,\zeta^3)\,\text{Heaviside}(\zeta - 0.12662)$$
$$+ (100.45 + 953.39\,\zeta^2 - 851.14\,\zeta^3 - 506.34\,\zeta)\,\text{Heaviside}(\zeta - 0.37338)$$
$$+ (1600.0\,\zeta^2 - 1153.0\,\zeta + 303.64 - 851.14\,\zeta^3)\,\text{Heaviside}(\zeta - 0.62662)$$
$$+ (-2230.1\,\zeta^2 + 851.14\,\zeta^3 + 2098.1\,\zeta - 698.35)\,\text{Heaviside}(\zeta - 0.87338)$$
$$- 0.46035 - 315.03\,\zeta^2 \qquad (29)$$



Obr. 1 Bezrozměrné normálné napětí (29) podél střednice v průřezu, kde působí osamělé příčné zatížení

$$\sigma_{x,\,MSO,\,bez}(\xi,\zeta)\Big|_{\zeta=\frac{115}{308}} = (-13.4675\,\xi + 3.36687 - 0.153455\,10^{-5}\sinh(60.6978\,\xi)$$
$$- 0.101304\,10^{-18}\sinh(60.6978\,\xi - 60.6978))\,\text{Heaviside}(\xi - 0.250000) + 10.1006\,\xi$$
$$+ 0.153455\,10^{-5}\sinh(60.6978\,\xi) \qquad (30)$$



Obr. 2 Bezrozměrné normálné napětí (30) podél nosníku v bodě střednice, kde je rozhraní mezi stojinou a pásnicí skříňového profilu

5. Závěry a souhrn

Práce se zabývá aplikacemi zobecněných funkcí k analytickému výpočtu tenkostěnných nosníků s nespojitostmi v zatížení, uložení, geometrii příčného průřezu a vlivem vložených kinematických dvojic (klouby, spojky).

Práce vychází ze tří matematických modelů tenkostěnného nosníku. První z nich je neklasický model ohybu a smyku nosníku s ohybově deplanabilním průřezem při první aproximaci smykových deformací střednicové plochy (Hýča, 1975). Druhý z nich je klasický model stísněného kroucení nosníku s torzně deplanabilním průřezem při výsečové aproximaci střednicové deplanace (Vlasov, 1962). Třetí z nich je neklasický model vázaného ohybu a kroucení tenkostěnného nosníku s ohybově i torzně deplanabilním průřezem při rovinné aproximaci ohybové deplanace a výsečové aproximaci střednicové deplanace (Hýča, 2005).

Nespojitosti v zatížení nosníků, které byly v práci uvažovány, zahrnovaly nespojitá měrná zatížení, osamělé příčné zatížení, osamělé silové dvojice a osamělé bimomentové zatížení. Nespojitosti v uložení nosníků vyvolávaly osamělé podpory mezi jeho konci. Uvažované nespojitosti v geometrii příčného průřezu nosníku zahrnovaly skokovou změnu tloušťky stěny a skokové změny v hladkosti střednice příčného průřezu. V modelu stísněného ohybu nosníku se předpokládalo, že jednotlivé segmenty prizmatického nosníku mohou být spojeny vloženými klouby, přičemž čela těchto segmentů mohou volně deplanovat. V modelu stísněného kroucení nosníku se předpokládalo, že sousední segmenty prizmatického tenkostěnného prutu mohou být propojeny spojkou a jejich čela mohou volně deplanovat.

Zobecněný matematický model stísněného ohybu tenkostěnného nosníku byl odvozen ve tvaru systému šesti obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (1) až (6).
V distribuční derivaci složky posouvající síly (1) vystupují jednotlivá osamělá břemena a osamělé vazbové reakce v součinu s Diracovou distribucí, která je posunuta do místa působení osamělého zatížení nebo vazbové reakce situované mezi konci nosníku. Výsledná rovnice (1) tak představuje zobecněný tvar Schwedlerovy věty pro složku posouvající síly. Měrné příčné zatížení bylo ponecháno v obecném tvaru kvůli přehlednosti dalšího výpočtu. Osamělé silové dvojice jsou zahrnuty v distribuční derivaci vnitřního ohybového momentu (2) tak, že velikosti těchto silových dvojic jsou násobeny Diracovou distribucí posunutou do místa příslušné silové dvojice. Rovnice (2) tak představuje zobecněný tvar Schwedlerovy věty vyjadřující vztah mezi ohybovým momentem a posouvající silou. Nespojitosti, které vyvolávají vložené klouby mezi konci nosníku, jsou zahrnuty do distribučních derivací pro natočení příčného průřezu (5) a deplanační funkci (4). Čela segmentů nosníku v místech vložených kloubů jsou konstrukčně provedena tak, že mohou volně deplanovat. Deplanační moment bude v místě takového vloženého kloubu nulový vzhledem k nulové hodnotě axiálního napětí na čelech napojených segmentů vzhledem k jeho definici (Hýča, 1986). V takovémto vloženém kloubu se pak může vyskytnout nespojitost nejenom v natočení příčného průřezu, ale také v deplanaci, tedy v deplanační funkci (Hýča, 1975; Hýča, 1986). Pro určení velikosti možné nespojitosti v deplanaci poslouží jako deformační podmínka výše uvedená skutečnost, totiž nulová hodnota deplanačního momentu v místě uvažovaného konstrukčního provedení vloženého kloubu. Obecné řešení systému (1) až (6) pro deplanační moment je uvedeno v (7). Integrační konstanty jsou ve tvaru počátečních parametrů a určí se na základě okrajových podmínek. Neznámé hodnoty vazbových reakcí vystupující v (7), resp. (1), se určí pomocí deformačních podmínek příslušných podpor, které jsou umístěny mezi konci nosníku. Pokud se vazbová reakce vyskytuje na samotném konci nosníku, vypočte se na základě příslušné okrajové podmínky.

Zobecněný matematický model stísněného kroucení tenkostěnného nosníku otevřeného průřezu byl odvozen ve tvaru systému čtyř obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (9) až (12). Distribuční derivace vnitřního krouticího momentu (9) obsahuje kromě měrného zatížení také zatížení osamělými silovými dvojicemi, jejichž velikosti jsou násobeny Diracovou distribucí posunutou do místa působení těchto osamělých zatížení, a dále vazbové momenty v podporách mezi konci nosníku. Velikosti těchto neznámých vazbových momentů určíme pomocí deformačních podmínek jednotlivých vazeb omezujících kroucení. Distribuční derivace bimomentu (10) obsahuje osamělá bimomentová zatížení situovaná mezi konci nosníku. Vložené pružné spojky spojující jednotlivé segmenty prizmatického prutu vyvolávají nespojitosti, které jsou zahrnuty do distribučních derivací úhlu kroucení (12) a zkrutu (11). Předpokládáme totiž, že čela spojovaných segmentů mohou v místě vložených spojek volně deplanovat. Vnitřní bimoment je proto v místě těchto spojek nulový, což je zároveň deformační podmínka, kterou použijeme k výpočtu velikosti skokové nespojitosti deplanace a tedy zkrutu. Velikost nespojitostí v úhlu kroucení vypočteme pomocí deformačních podmínek pružných spojek. Pokud by vlivem odlišného konstrukčního provedení čela některého segmentu v místě spojky docházelo k omezení deplanace, museli bychom do zobecněného modelu zahrnout rovněž možnost vzniku skokové nespojitosti ve vnitřním bimomentu v místě takové spojky. Obecné řešení pro vnitřní bimomentu je uvedeno ve (13).

Zobecněný matematický model vázaného ohybu a kroucení tenkostěnného nosníku otevřeného průřezu byl odvozen ve tvaru systému dvanácti obyčejných diferenciálních rovnic (15) až (26). Složky osamělého příčného zatížení s působišti mezi konci nosníku byly zahrnuty do distribučních derivací složek posouvající síly (15), (19). Složky osamělých silových dvojic situované mezi konci nosníku a vyvolávající ohyb, resp. kroucení, nosníku byly zahrnuty do distribučních derivací složek ohybového momentu (16), (20), resp. krouticího momentu (23). Osamělé bimomentové zatížení působící mezi konci nosníku bylo začleněno do distribuční derivace vnitřního bimomentu (24). Obecné řešení pro úhel kroucení je uvedeno v (27).

Pro všechny tři odvozené systémy diferenciálních rovnic s distribučními derivacemi byla vypočtena obecná řešení. Jejich integrační konstanty mají tvar počátečních parametrů. Nespojitosti obsažené ve vypočteném obecném řešení jsou vyjádřeny pomocí Heavisideovy funkce jednotkového skoku. Měrná zatížení, dosud ponechaná v obecném tvaru, vystupují v konvolutorních součinech. Při vyjádření příslušného měrného zatížení jakožto funkce po částech spojité pomocí Heavisideovy funkce lze odvozené vyjádření konvolucí dopočítat aplikací věty o Laplacově obrazu konvoluce distribucí.

U kloubově podepřeného nosníku skříňového profilu zatíženého osamělým břemenem byl dle výše uvedeného zobecněného modelu stísněného ohybu vypočten průběh bezrozměrného axiálního membránového napětí *obr. 1* podél střednice v místě břemene a podél nosníku na rozhraní pásnice a stojiny *obr. 2*, kde se vyskytuje špička napětí. Vypočtené průběhy ukazují působení efektu ochabnutí smykem.

Efektivita analytického výpočtu tenkostěnných nosníků na základě zobecněných modelů, které byly odvozeny v této práci, spočívá v tom, že zobecněné vnitřní síly (výsledné vnitřní účinky) a složky přetvoření se vypočítají naráz podél celého nosníku bez nutnosti sestavovat podmínky spojitosti a hladkosti průhybové čáry v bodech nespojitosti zatížení a uložení nosníku a bez nutnosti uvolňování v místech vložených kinematických dvojic. To platí jak pro nosníky uložené staticky určitě, tak i při jejich statické neurčitosti. Efektivitě

výpočtu přispělo značnou měrou symbolické programování, jehož bylo v práci užito pomocí programového prostředí Maple 9.5.

Lze očekávat, že aplikace zobecněných funkcí mohou rovněž přispět ke zjednodušení analytického výpočtu některých desek a skořepin a usnadnit řešení některých stabilitních úloh.

6. Publikace autora tématicky související s disertační prací

Sobotka, J. (2006) ON APPLICATIONS OF GENERALIZED FUNCTIONS TO CALCULATIONS OF BEAM DESIGN ELEMENTS. *National Conference with International Participation, ENGINEERING MECHANICS*, Svratka, Czech Republic, paper no.232.

Sobotka, J. (2007) ON APPLICATIONS OF GENERALIZED FUNCTIONS TO CALCULATION OF BEAM-COLUMN DESIGN ELEMENTS. *National Conference with International Participation, ENGINEERING MECHANICS*, Svratka, Czech Republic.

Sobotka, J. (2008) ON APPLICATIONS OF GENERALIZED FUNCTIONS TO CALCULATION OF THIN-WALLED BEAM DESIGN ELEMENTS SUBJECT TO NON-UNIFORM TORSION. *National Conference with International Participation, ENGINEERING MECHANICS*, Svratka, Czech Republic, pp. 852-860.

Sobotka, J. (2009) ON APPLICATION OF GENERALIZED FUNCTIONS TO CALCULATIONS OF THIN-WALLED BEAMS UNDER PLANE BENDING CONSIDERING CONSTRAINED WARPING. *National Conference with International Participation, ENGINEERING MECHANICS*, Svratka, Czech Republic, pp. 1217–1232.

Sobotka, J. (2009) ON APPLICATION OF DISTRIBUTIONS TO COMPUTATIONS OF OPEN CROSS-SECTION THIN-WALLED BEAMS. *National Conference with International Participation, ENGINEERING MECHANICS*, Svratka, Czech Republic, pp. 1233–1247.

7. Poděkování

Autor tohoto článku děkuje svému Ph.D. školiteli, prof. Ing. M. Hýčovi, DrSc. z TU Liberec, za připomínky a diskuze.

8. Literatura

Arbabi, F. (1991) *Structural Analysis and Behavior*. McGraw-Hill, New York.

Biondi, B. & Caddemi, S. (2007) Euler–Bernoulli beams with multiple singularities in the flexural stiffness, *European journal of mechanics. A. Solids*, 26, 5, pp. 789-809.

Brungraber, R. J. (1965) Singularity functions in the solution of beam-deflection problems, *Journal of Engineering Education,* 1.55 (9), pp. 278-280.

Caddemi, S. & Caliò (2009) Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler–Bernoulli beam with multiple open cracks, *Journal of Sound and Vibration,* 327, 3-5, pp. 473-489.

Caddemi, S., Caliò, I. & Marletta, M. (2009) The dynamic non-linear behaviour of beams with closing cracks, *XIX Congresso Aimeta – Ancona.*

Clebsch, A. (1862) *Theorie der Elasticitat Fester Korper*. Teubner, Stuttgart.

Conway, H. D.(1980) A singularity function method for plate deflections. *International Journal of Mechanical Sciences*, 22, 4, *209-214*.

Dirac, P.A.M. (1930) *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, Oxford.

Ecsedi, I. & Dluhi, K. (2004) USE OF DISCONTINUITY FUNCTIONS TO OBTAIN THE FREQUENCY EQUATION. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 5, 1, pp. 193-199.

Falsone, G. (2002) The Use of Generalised Functions in the Discontinuous Beam Bending Differential Equations, *The International Journal of Engineering Education*, 18, 3, pp. 337-343.

Gere, J. M. & Timoshenko, S. P. (1985) *Mechanics of Materials*. PWS Eng., Boston.

Hýča, M. (1972) Anwendung der Dirac-Deltafunktion zur Berechnung der Biegung gerader Balken mit Schubverformung. *Wiss. Z. Techn.* Univers. Dresden 21 H.1

Hýča, M. (1975) Zum Problem der Biegung bei dünnwandigen Balken mit Rücksicht auf Wölbschubverformungen. *ZAMM 55*, Heft 4. Bochum

Hýča, M. (1986) Matematický model ohybu tenkostěnných nosníků se zřetelem k deplanaci průřezů a ohybu pásů. *Strojírenství* 36.

Hýča, M. (1987) TORSION-BENDING ANALYSIS OF SHEAR-DEFORMABLE OPEN CROSS-SECTION BEAMS SUBJECT TO TORSIONAL LOADING, *1st Conference on Mechanics,* Czechoslovak Academy of Science, Prague.

Hýča, M. (1990) Local Effects in Thinwalled Beams subject to Bending and Shear. *IUTAM*, Praha.

Hýča, M. (1994) COUPLED BENDING AND TORSION OF OPEN CROSS-SECTION THIN-WALLED BEAMS, *17th Czech and Slovak International Conference on Steel Structures and Bridges*, Bratislava.

Hýča, M. (2005) GENERALIZED MATHEMATICAL MODEL OF THINWALLED BEAMS WITH WARPABLE CROSS-SECTION, *Sborník semináře k životnímu jubileu prof. Ing. Cyrila Höschla, DrSc.*, Liberec.

Hýča, M. (2005) Analysis of Geometrically Imperfect Beam-Columns Subjected to Discontinuous Lateral and Bending Moment Loads by Using Distributions, in: Proc. *1st Int. Conf. on Innovation and Integration in Aerospace Sciences*, Queen's University, Belfast

Kanwal , R. P. (2004) *Generalized Functions*. Birkhäuser, Boston.

Macaulay, W.H. (1919) A note on the deflection of beams. *Messenger Math,* 48, 129.

Mahing, J. (1964) Discontinuity solutions to plate and beam problems. *International Journal of Mechanical Sciences*, 6, 6, pp. 455-460.

Stephen, N. G. (2007) Macaulay's method for a Timoshenko beam. *International Journal of Mechanical Engineering Education.* 35, 4.

Selek, M.A.& Conway, H. D. (1983) Further applications of the singularity function method to plate problems. *International Journal of Mechanical Sciences,* 25, 6, pp. 397-407.

Schwartz, L., (1966) *Théorie des distributions*. Hermann, Paris.

Schwartz, L. (1972) *Matematické metody ve fyzice*. SNTL, Praha.

Štěpánek, J. (2001) *Matematika pro přírodovědce. Distribuce a diferenciální rovnice*. Karolinum, Praha.

Temple, G. (1953) Theories and Applications of Generalized Functions. *Journal of the London Mathematical Society,* s1-28(2):134-148.

Toma, A. (2008) THE GENERALIZED SOLUTION OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS REGARDING THE BENDING OF ELASTIC RODS ON ELASTIC FOUNDATION. I. THE SYSTEM OF GENERALIZED EQUATIONS. *PROCEEDINGS OF THE ROMANIAN ACADEMY, Series A, 8, 3.*

Van der Pol, B. & Bremmer, H. (1955) *Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Transform*, 2nd ed. Cambridge University Press, New York.

Vlasov,V.Z. (1962) *Tenkostěnné pružné pruty*. SNTL, Praha.

Wang, J. & Qiao, P. (2007) Vibration of beams with arbitrary discontinuities and boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 308, 1-2, pp. 12-27.

Weissenburger, J. T. (1964) Integration of discontinuous expressions arising in beam theory. *American Institute of Aeronautics and Astronautics - Journal*, 2, 1, pp. 106–108.

Wittrick, W.H. (1965) A generalization of Macaulay's method with applications in structural mechanics. *American Institute of Aeronautics and Astronautics - Journal*, 3, 2, pp. 326–330.

Yavari, A., Sarkani, S. & Moyer Jr, E. T (2000) On applications of generalized functions to beam bending problems. *International Journal of Solids and Structures*, 37, 40, pp. 5675-5705.

Yavari, A. & Sarkani, S. (2001) On applications of generalized functions to the analysis of Euler-Bernoulli beam-columns with jump discontinuities. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43, 6, pp.1543-1562.

Yavari, A., Sarkani, S. & Reddy, J. N. (2001) Generalised solutions of beams with jump discontinuities on elastic foundations. *Archive of Applied Mechanics*, 71, 9, pp. 625–639.

Yavari, A., Sarkani, S. & Reddy, J. N. (2001) On nonuniform Euler–Bernoulli and Timoshenko beams with jump discontinuities: application of distribution theory. *International Journal of Solids and Structures*, 38, 46–47, pp. 8389–8406.