



## SUBGRID MODELING IN LARGE EDDY SIMULATION

J. Volavý, M. Forman, M. Jícha <sup>1</sup>

**Summary:** *This work is focused on the subgrid modeling in Large Eddy Simulation. The work contains the description of the most used subgrid models including Smagorinsky model, dynamic Smagorinsky model, subgrid kinetic energy equation model, dynamic subgrid kinetic energy equation model and mixed model. These chosen subgrid models are afterwards used for simulation of turbulent channel flow. The simulations were performed in open-source program OpenFOAM. The obtained results are compared with DNS data.*

### 1. Úvod

Počítačové modelování dynamiky tekutin hraje stále větší roli v průmyslových odvětvích, např. v automobilovém, leteckém či chemickém průmyslu. Zejména v těchto odvětvích je nutné umět správně nejen popsat, ale i dostatečně přesně predikovat chování proudící tekutiny. Většinou se v těchto aplikacích setkáme s turbulentním prouděním, jenž je na řešení daleko více náročnější než proudění laminární. Turbulentní proudění můžeme simulovat několika způsoby. Jedním z nich je počítat turbulenci přímo pomocí metody Direct Numerical Simulation. Při této metodě musíme použít dostatečně jemnou síť, abychom postihli i ty nejmenší turbulentní útvary (víry). Bohužel velikost výpočetní sítě a tedy i nároky na výpočet pomocí metody DNS rostou se třetí mocninou Reynoldsova čísla (viz. např. Pope (2000)), tudíž je pro běžné případy proudění při současném výkonu počítačů nevhodná.

Další přístup k turbulenci je její modelování. V minulosti bylo vyvinuto mnoho postupů. Vznikla řada modelů založená na tzv. Reynoldsově zprůměrování, kdy rozložíme rychlost na složku v čase průměrnou a flukтуаční (podobně jako při konstrukci korelační funkce rychlosti) a tu posléze dosadíme do Navierových-Stokesových rovnic. Ty pak řešíme pro neznámé v čase průměrné rychlosti. Neuzavřené členy posléze modelujeme. Tento přístup se nazývá RANS (zkratka z anglického Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations). Další přístup, na který se pak zaměříme, je technika zvaná Large Eddy Simulation. I ta je založena na zprůměrování rychlosti, ale na zprůměrování objemovém.

Hlavní myšlenka metody LES spočívá v separaci energii obsahujících vírů velkých měřítek od malých disipativních vírů. Velké víry jsou pak řešeny explicitně, zatímco vliv malých vírů se modeluje. Separace měřítek se provede pomocí filtrace. Na rychlostní pole se aplikuje filtr typu dolní propust. Po této filtraci velká měřítká, tj. nízké prostorové frekvence, zůstanou zachována a útvary malých měřítek (vysoké prostorové frekvence) se tímto odstraní. Dále je nutno tyto odseparované útvary korektně reprezentovat. Pokud bychom tak neučinili, chyběl by nám

<sup>1</sup> Ing. Jaroslav Volavý, Ing. Matěj Forman, Ph.D., Prof. Ing. Miroslav Jícha, CSc., Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně, Technická 2896/2, 616 69 Brno, tel. +420 54114 3242, e-mail jaroslav.volavy@gmail.com

v naší simulaci správný mechanismus disipace energie, což je vzhledem k faktu, že chceme co nejreálnější simulaci, nepřijatelné. Jak bylo zmíněno výše, tato nejmenší měřítko se nepočítají explicitně, ale modelují pomocí tzv. *subgridních modelů*. Přívlástek subgridní tyto modely nejsou proto, že reprezentují útvary vysokých prostorových frekvencí, které nejsme schopni postihnout rozlišením (velikostí) výpočetní sítě.

## 2. Základní rovnice

Při použití metody Large Eddy Simulation je nejprve třeba přefiltrovat Navierovy-Stokesovy rovnice popisující proudění tekutiny. Filtrovaná rychlost se definuje jako konvoluce původní rychlosti a funkcí filtru s jádrem  $\mathbf{G}$ :

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G} * \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{G}(\mathbf{r}, \Delta) \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (1)$$

Pak můžeme původní rychlost rozložit na součet filtrované a flukтуаční složky:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t). \quad (2)$$

Nyní aplikujme operaci filtrace na Navierovy Stokesovy rovnice. Po menší úpravě získáme:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3)$$

kde

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (4)$$

je *tenzor subgridních napětí*. Tento tenzor v sobě zahrnuje vliv malých měřítek. Nejsme schopni ho vyjádřit explicitně, tudíž musíme přistoupit k jeho modelování (aproximaci). V minulosti vznikla celá řada subgridních modelů.

## 3. Smagorinského model

První subgridní model pro metodu Large Eddy simulation navrhl v roce 1963 Smagorinsky Smagorinsky (1963). Vycházel z předpokladu, že nejmenší víry v proudě je možno považovat za izotropické a tudíž by bylo možno aplikovat Boussinesqovu hypotézu pro popis efektu nerozřešených vírů. Smagorinsky tedy ve svém modelu uvažuje, že subgridní tenzor napětí je úměrný tenzoru napětí počítaného pomocí rozřešených rychlostí  $\bar{S}_{ij}$ :

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2\nu_t \bar{S}_{ij}, \quad (5)$$

Konstanta úměrnosti mezi těmito dvěma tenzory je kinematická subgridní viskozita  $\nu_t$ :

$$\nu_t = (C_S \Delta)^2 |\bar{S}| \quad (6)$$

a  $\bar{S}_{ij}$  je tenzor napětí počítaný z rozřešené oblasti proudě:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (7)$$

přičemž  $|\bar{S}| = |2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}|^{1/2}$ .

Subgridní viskozita  $\nu_t$  je závislá na Smagorinského konstantě  $C_S$ . Hodnota této konstanty byla stanovena z teoretické analýzy rychlosti rozpadu izotropických turbulentních vírů ve vnitřní oblasti energetického spektra. Konstanta  $C_S$  nabývá hodnot  $C_S = 0.17 - 0.24$ . Rozsah hodnot této konstanty naznačuje, že neexistuje žádná univerzální hodnota použitelná pro všechny možné případy proudění. Smagorinského konstanta je závislá na případě proudění. Toto je zásadní nevýhoda tohoto jinak velmi jednoduchého modelu.

Často tento model bývá ještě doplněn o tlumení subgridního napětí v blízkosti stěn. Jelikož subgridní turbulentní fluktuace musí být u stěny nulové, tedy musí být nulová i subgridní viskozita. Z toho důvodu se subgridní viskozita  $\nu_t$  vynásobí výrazem

$$f_\mu = 1 - \exp(1 - y^+/26), \quad (8)$$

který nulovost u stěny zaručí.

#### 4. Dynamický Smagorinského model

Podstatnou nevýhodu Smagorinského modelu v podobě závislosti na neuniverzální konstantě se snaží odstranit dynamické modifikace Smagorinského modelu. Při použití těchto modelů nemusíme dopředu zadávat hodnotu Smagorinského konstanty, ta je průběžně počítána v průběhu výpočtu. Odtud pochází název dynamické modely. Děje se tomu však za podstatného zesložnění původně velmi jednoduchého modelu a s tím souvisejícím vzrůstem výpočetního času.

Nejprve aplikujme na rovnici (3) další operátor testovacího filtru  $\tilde{G}$  s větší šířkou filtru než má původní filtr. Šířku  $\tilde{G}$  označme  $\tilde{\Delta}$ . Obvykle se volí  $\tilde{\Delta} = 2\Delta$ . Po druhé filtraci Navierových-Stokesových rovnic získáme:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (9)$$

kde tenzor subgridních napětí má nyní tvar:

$$T_{ij} = \widetilde{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j. \quad (10)$$

Nyní uvažujme rozřešený tenzor turbulentních napětí  $\mathcal{L}_{ij}$  definovaný jako:

$$\mathcal{L}_{ij} = \widetilde{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j. \quad (11)$$

Tento tenzor se v literatuře nazývá Leonardův tenzor napětí. Rozřešená turbulentní napětí  $\mathcal{L}_{ij}$  reprezentují příspěvky do Reynoldsova tenzoru napětí z oblasti délkových měřítek nacházející se mezi šířkou testovacího filtru a šířkou filtru původního. Vztahy (4), (10) a (11) splňují následující vztah

$$\mathcal{L}_{ij} = T_{ij} - \widetilde{\tau_{ij}}, \quad (12)$$

který dává do souvislosti subgridní napětí získaná pomocí testovacího a původního filtru.

Identita definovaná vztahem (12) může být výhodně použita pro odvození přesného subgridního modelu. V případě dynamického Smagorinského modelu slouží výše uvedená identita k přesnějšímu stanovení Smagorinského konstanty, která bude lépe charakterizovat a vystihovat okamžitý stav proudu.

Pro další odvozování uvažujme, že funkční forma modelů určených k výpočtu subgridních napětí pro původní filtr  $\tau_{ij}$  a testovací filtr  $T_{ij}$  má společné parametrické vyjádření pro oba subgridní tenzory napětí. Použijme standardní Smagorinského model s tím zobecněním, že Smagorinského konstanta je teď funkcí prostoru a času. Dále ještě předpokládejme, že prostorové změny této konstanty nejsou veliké, tudíž zůstane aplikováním testovacího filtru téměř nedotčena. Získáme

$$\tau_{ij} - (\delta_{ij}/3)\tau_{kk} = -2C_S\Delta^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij} \quad (13)$$

pro původní filtr a

$$T_{ij} - (\delta_{ij}/3)T_{kk} = -2C_S\tilde{\Delta}^2|\tilde{S}|\tilde{S}_{ij} \quad (14)$$

pro filtr testovací, přičemž

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad |\tilde{S}| = \sqrt{2\tilde{S}_{mn}\tilde{S}_{mn}},$$

$\Delta$  je charakteristická šířka původního filtru  $G$  a  $\tilde{\Delta}$  je šířka testovacího filtru  $\tilde{G}$ . Odečtením (13) od (14) získáme:

$$\mathcal{L}_{ij} - (\delta_{ij}/3)\mathcal{L}_{ij} = 2C_S M_{ij}, \quad (15)$$

kde

$$M_{ij} = \tilde{\Delta}^2|\tilde{S}|\tilde{S}_{ij} - \Delta^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}. \quad (16)$$

Rovnice (15) je vlastně soustava pěti algebraických nezávislých rovnic pro jednu neznámou  $C_S$ . Není možné stanovit konstantu  $C_S$  tak, aby bylo všech pět rovnic splněno. Je ale možno ji určit tak, aby byla chyba vzniklá přeúčeností soustavy minimální. Definujme  $Q$  jako kvadrát chyby (15):

$$Q = (\mathcal{L}_{ij} - (\delta_{ij}/3)\mathcal{L}_{ij} - 2C_S M_{ij})^2. \quad (17)$$

Nyní hledáme takové  $C_S$ , které minimalizuje (17), tedy musí být splněna podmínka  $\partial Q/\partial C_S = 0$ . Provedením této derivace snadno získáme vzorec pro Smagorinského konstantu:

$$C_S = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{ij} M_{ij}}{M_{ij}^2}. \quad (18)$$

Ukázalo se, že v mnoha případech se objevuje komplikace v podobě nulového jmenovatele (18), což způsobuje značné nestability výpočtu. Je proto vhodné zprůměrovat čitatel i jmenovatel přes určitý objem výpočetní domény, nejlépe ve směru izotropie turbulence:

$$C_S = \frac{1}{2} \frac{\langle \mathcal{L}_{ij} M_{ij} \rangle}{\langle M_{ij}^2 \rangle}. \quad (19)$$

Tím však částečně ztrácíme výhodu v lokálním určení Smagorinského konstanty.

## 5. Jednorovnicový model

Další ze skupiny subgridních modelů používající koncepci turbulentní vizkozity pro zahrnutí vlivu turbulence je tzv. *jednorovnicový model* (z anglického subgrid kinetic energy model) Me-non (1996). V tomto modelu se řeší dodatečná rovnice pro subgridní kinetickou energii. Sub-gridní kinetická energie je definována jako:

$$k_{sgs} = \frac{1}{2} (\overline{u_i u_i} - \bar{u}_i \bar{u}_i). \quad (20)$$

Všimněme si, že tato energie nelze spočítat explicitně, proto se pro ni musí napsat rovnice, jejímž vyřešením subgridní kinetickou energii získáme. Rovnice má tvar:

$$\frac{\partial k_{sgs}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_i} = -\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_c \frac{k_{sgs}^{3/2}}{\Delta} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_k}{\sigma_k} \frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_i} \right). \quad (21)$$

V této rovnici na pravé straně stojí postupně členy produkce, disipace a difuze subgridní kinetické energie. Tenzor subgridních turbulentních napětí je pak modelován pomocí:

$$\tau_{ij} = -2\nu_k \bar{S}_{ij} + \frac{2}{3} k_{sgs} \delta_{ij}, \quad (22)$$

kde subgridní viskozita je rovna  $\nu_k = C_k \sqrt{k_{sgs}} \Delta$ . Konstanty  $C_k$ ,  $C_c$  a  $\sigma_k$  se volí, v Menon (1996) jsou použity hodnoty  $C_k = 0.05$ ,  $C_c = 1.0$  a  $\sigma_k = 1.0$ .

## 6. Dynamický jednorovnicový model

Při použití dynamického jednorovnicového modelu se konstanty  $C_k$  a  $C_c$  nevolí, ale počítají v průběhu výpočtu. Stejně jako u konstrukce dynamického Smagorinského modelu se zde použije koncept testovací filtrace. Konstanty  $C_k$  a  $C_c$  se pak počítají z následujících vztahů:

$$\mathcal{L}_{ij} - (\delta_{ij}/3)\mathcal{L}_{kk} = -C_k \left( \tilde{\Delta} K^{1/2} \tilde{S}_{ij} - \Delta \widetilde{k^{1/2} S_{ij}} \right), \quad (23)$$

$$\nu \left( \frac{\partial \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_i}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_i \partial \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) = C_c \left( \frac{K^{3/2}}{\tilde{\Delta}} - \frac{\widetilde{k^{3/2}}}{\Delta} \right), \quad (24)$$

kde  $K = \mathcal{L}_{ii}/2 + \tilde{k}$  je subgridní kinetická energie pro testovací filtraci.

## 7. Smíšený model

Předchozí skupina modelů modelovala účinky turbulence za pomoci tzv. turbulentní viskozity, pro jejíž vyjádření byl použit některý ze zmíněných modelů. Následující modely nevychází z Boussinesqovy aproximace.

V roce 1980 představil svůj subgridní model Bardina. Model pojmenoval model podobnosti měřítek. Při odvození svého modelu vycházel z předpokladu invariance turbulentních měřítek a faktu, že turbulentní struktury různých měřítek jsou si podobné. Této podobnosti doslova použil pro svůj model.

Hlavní myšlenka modelu podobnosti měřítek pro metodu Large-Eddy Simulation je ta, že turbulentní struktury měřítek menších než je šířka filtru  $\Delta$  jsou podobné strukturám měřítek o trochu větších než  $\Delta$ . Za tohoto předpokladu můžeme vyjádřit tenzor subgridních napětí následovně:

$$\tau_{ij} = C_{sim} (\widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j). \quad (25)$$

kde operátor vlnka reprezentuje operátor druhé filtrace, nyní s šířkou filtru  $\gamma\Delta$ , kde  $\gamma \geq 1$ . Konstanta  $C_{sim}$  je konstanta podobnosti. Výraz v závorce ve vztahu (25) představuje turbulentní napětí pro měřítko od  $\Delta$  do  $\gamma\Delta$ .

A priori testy, které provedl Bardina a kol. za použití Gaussovského a box filtru, vykazují vysokou míru korelace mezi napočítanými a reálnými turbulentními napětími, typicky kolem

80%. Avšak když model podobnosti měřítek v této podobě použili pro různé simulace, tak se ukázalo, že model je málo disipativní, tj. velice podhodnocuje disipaci energie v oblasti nejmenších měřítek, což následně vede k nerealistickým výsledkům. Pro překonání tohoto nedostatku přidali do vyjádření turbulentního napětí (25) disipační Smagorinského člen. Výsledný model je:

$$\tau_{ij} = C_{sim}(\widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) - 2(C_S \Delta)^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}. \quad (26)$$

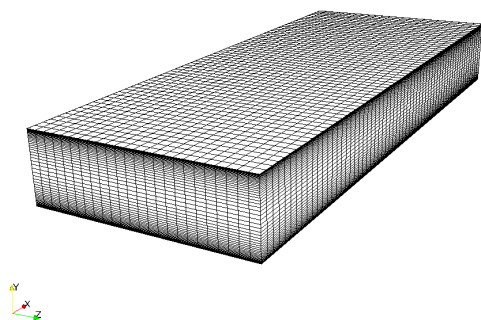
Často bývá tento modifikovaný model podobnosti měřítek v literatuře označován jako smíšený model.

## 8. Test subgridních modelů

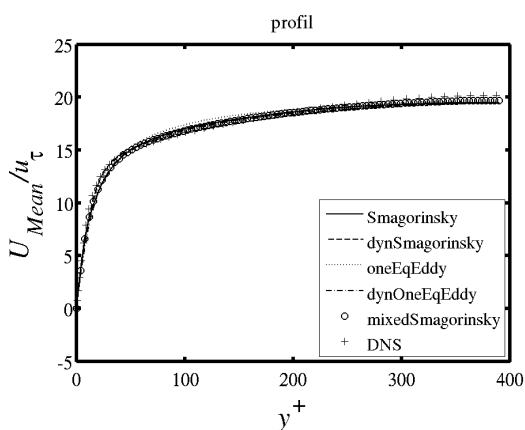
Výše zmíněné modely byly použity pro simulaci proudění kapaliny kanálem. Testování bylo prováděno na případě proudění kapaliny kanálem. Vzdálenost od stěny do středu kanálu je  $\delta = 0.1m$ . Ve směru po proudu (směr osy x) měří kanál  $5H\delta$  a  $2H\delta$  ve směru osy z. Ve směru osy x a z je nastavena periodická okrajová podmínka, pro  $y=0$  a  $y=2\delta$  je definována pevná stěna. Výpočetní síť sestává z  $60 \times 25 \times 24$  buněk. Směrem ke stěně se buňky zjemňují, aby byla zachycena generace turbulence v přístěnné oblasti. Výpočty byly provedeny pro střední Reynoldsovo číslo  $Re = 13500$ , kinematická viskozita  $\nu = 0,00002 m^2/s$ , třecí rychlost (friction velocity)  $u_\tau = 0,0078 m/s$  ( $Re_\tau = 390$ ). Byly testovány následující subgridní modely: Smagorinský, dynamický Smagorinský, jednorovnicový model (v grafech označen jako oneEqEddy), dynamický jednorovnicový model (v grafech označen jako dynOneEqEddy) a smíšený model (v grafech označen jako mixedSmagorinsky). Výpočty probíhaly v programu OpenFOAM, jenž je volně k dispozici. Výsledky byly porovnány s DNS daty. Na grafech je srovnání vybraných turbulentních statistik jednotlivých modelů s DNS daty.

Zdroj DNS dat [http : //www.thtlab.t.u - tokyo.ac.jp/DNS/dns\\_database.html](http://www.thtlab.t.u-tokyo.ac.jp/DNS/dns_database.html).

Na obrázku 2 je srovnání rychlostních profilů získaných pomocí různých subgridních modelů.



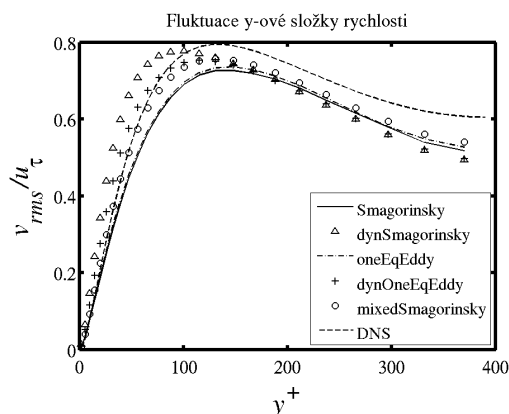
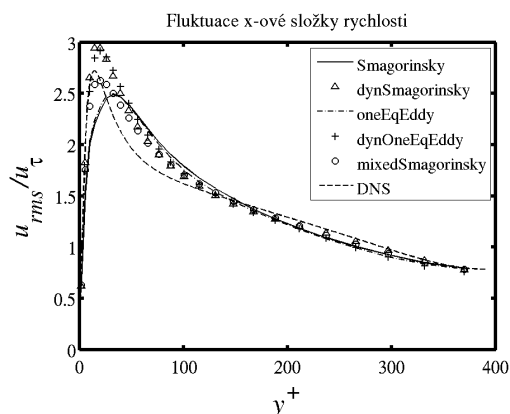
Obrázek 1: Geometrie a síť



Obrázek 2: Rychlostní profil kanálem

Je zde dobrá shoda všech testovaných modelů s DNS daty.

Na obrázku 3 je porovnání fluktuace podélné složky rychlosti. Lze zde vypořádat odlišné chování standardních modelů a jejich dynamických variant. V těsné blízkosti stěny ( $y^+ < 25$ ) mají modely s pevnými konstantami tendenci podhodnocovat velikost fluktuace rychlosti. Naopak dynamické varianty tuto veličinu nadhodnocují. Nejlépe si vede smíšený model. Dále od stěny ( $y^+ > 50$ ) vykazují všechny testované modely prakticky stejné chování.



Obrázek 3: Fluktuace x-ové složky rychlosti Obrázek 4: Fluktuace y-ové složky rychlosti

Obrázek 4 ukazuje fluktuace normálové složky rychlosti. I zde je možno rozlišit odlišné chování modelů s konstantními koeficienty od dynamických modelů. Standardní Smagorinského model a jednorovnicový model dávají téměř totožné výsledky a podhodnocují fluktuaci normálové složky rychlosti přes celou šířku kanálu. Nejlépe si zde vede smíšený model. V přístěnné oblasti se velmi dobře shoduje s DNS daty, ale blížeji středu kanálu má i tento model tendence podhodnocovat fluktuace.

## 9. Závěr

Byla provedena srovnávací studie vybraných subgridních modelů na případu proudu kanálem. Testování bylo prováděno v otevřeném programu OpenFOAM. Byly porovnány Smagorinského model, jednorovnicový model a jejich dynamické varianty a smíšený model, který jako jediný z testovaných modelů nepoužívá koncept subgridní viskozity. Z těchto modelů se jeví jako nejlepší smíšený model. Je to však vykoupeno větší náročností. Tento model patří k náročnějším na výpočetní výkon. Výpočetní čas potřebný pro simulaci pomocí smíšeného modelu je asi o 20% vyšší než pro Smagorinského model. Jako vůbec nejnáročnější se ukazuje dynamický jednorovnicový model, jehož výpočetní náročnost na čas je asi o 40% vyšší než pro Smagorinského model.

## 10. Poděkování

Autoři touto cestou děkují za grantovou podporu Grantové agentury České republiky, číslo grantu GA101/08/0096.

## 11. Reference

- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., Cabot, W. H.: A dynamic subgrid scales eddy viscosity model, Phys. Fluids A, Vol. 3, No. 7, pp. 1760-1765, 1991
- Geurts, B. J.: Elements of direct and large eddy simulation, Edwards, Philadelphia, 2004, ISBN 1-930217-07-2

- Lilly, D. K.: A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method, *Phys. Fluids A*, Vol. **4**, 1992
- Meneveau, C., Katz, J.: Scale-invariance and turbulence models for Large eddy simulation, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32, pp. 1-32, 2000
- Menom, S., Yeung, P. K., Kim, W. W.: Effect of subgrid models on the computed interscale energy transfer in isotropic turbulence, *Computers & Fluids*, Vol. 25, No. 2, pp 165-180, 1996
- Pope, S. B.: *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, ISBN 0 521 59886 9
- Smagorinsky, J.: General circulation experiments with the primitive equations, *Mon. Weather Rev.*, Vol. 91, No. 3, pp. 99-164, 1963