



## **MODELLING AND MODAL PROPERTIES OF A FOUR-AXLE LOCOMOTIVE**

**V. Zeman, Z. Hlaváč\***

**Summary:** *The paper deals with mathematical modelling of vibration and modal analysis of a four-axle locomotive with two bogie. Each bogie has two individual wheelset drives. The modelling method is based on the system decomposition into seven subsystems – two individual wheelset drives and bogie frames in each bogie and the car body – and on modelling of couplings among subsystems. The eigenvalues of a linearized autonomous model and stability conditions are investigated in dependence on longitudinal creepage and forward velocity of the locomotive. The model is prepared for dynamic response investigation caused by different vibration sources of locomotive excitation.*

### **1. Úvod**

Komplexní matematický model lokomotivy je sestaven pro vyšetřování dynamické odezvy čtyřnápravové elektrické lokomotivy vyvinuté pro rychlosti okolo 200 km/h ve ŠKODA TRANSPORTATION s.r.o. Její fyzikální model zahrnuje skříň lokomotivy, dva podvozky a čtyři individuální pohony s vazbami. Matematický model byl vyvíjen postupně od modelu individuálního pohonu, jak je ukázáno v článku (Zeman at al., 2007-1), přes model podvozku se dvěma individuálními pohony s tuhými koly (Zeman at al., 2007-2) až k modelu podvozku rozšířeném o vliv poddajnosti a tlumení kol, který byl využit pro optimalizaci vybraných konstrukčních parametrů z hlediska potlačení kmitání vybuzevané ovalitou kol (Hlaváč&Zeman, 2009) a pro vyšetření kmitání pohonu při vzniku zkratového momentu (Zeman at al., 2010).

Cílem příspěvku je uvést komplexní matematický model lokomotivy, který bude využitelný pro vyšetřování kmitání a dynamického zatížení komponent obou podvozků lokomotivy vyvolaného hlavními zdroji buzení jako jsou nerovnost tratě, ovalita kol a zkratový moment v některém z individuálních pohonů. Pokud je autorům známo, jde o první pokus o vytvoření komplexního modelu čtyřnápravové lokomotivy. Oproti jiným literárním pramenům, např. autorů Gark&Dukkipati (1984) a Popp&Schiehlen (2003), je uvažován prostorový pohyb komponent všech individuálních pohonů a pružně-viskózní vazby mezi nimi (poddajnost hnacích hřídelů, ozubení, spojky, kol, uložení statorů trakčních motorů se skříněmi převodovek na rámech podvozků) a spojitě rozložená hmotnost torzně, podélně i ohybově poddajných dutých kompozitových hřídelů a náprav dvojkolí. Model samozřejmě respektuje provázanost rámu podvozků sekundárním vypružením a tlumením se skříní a

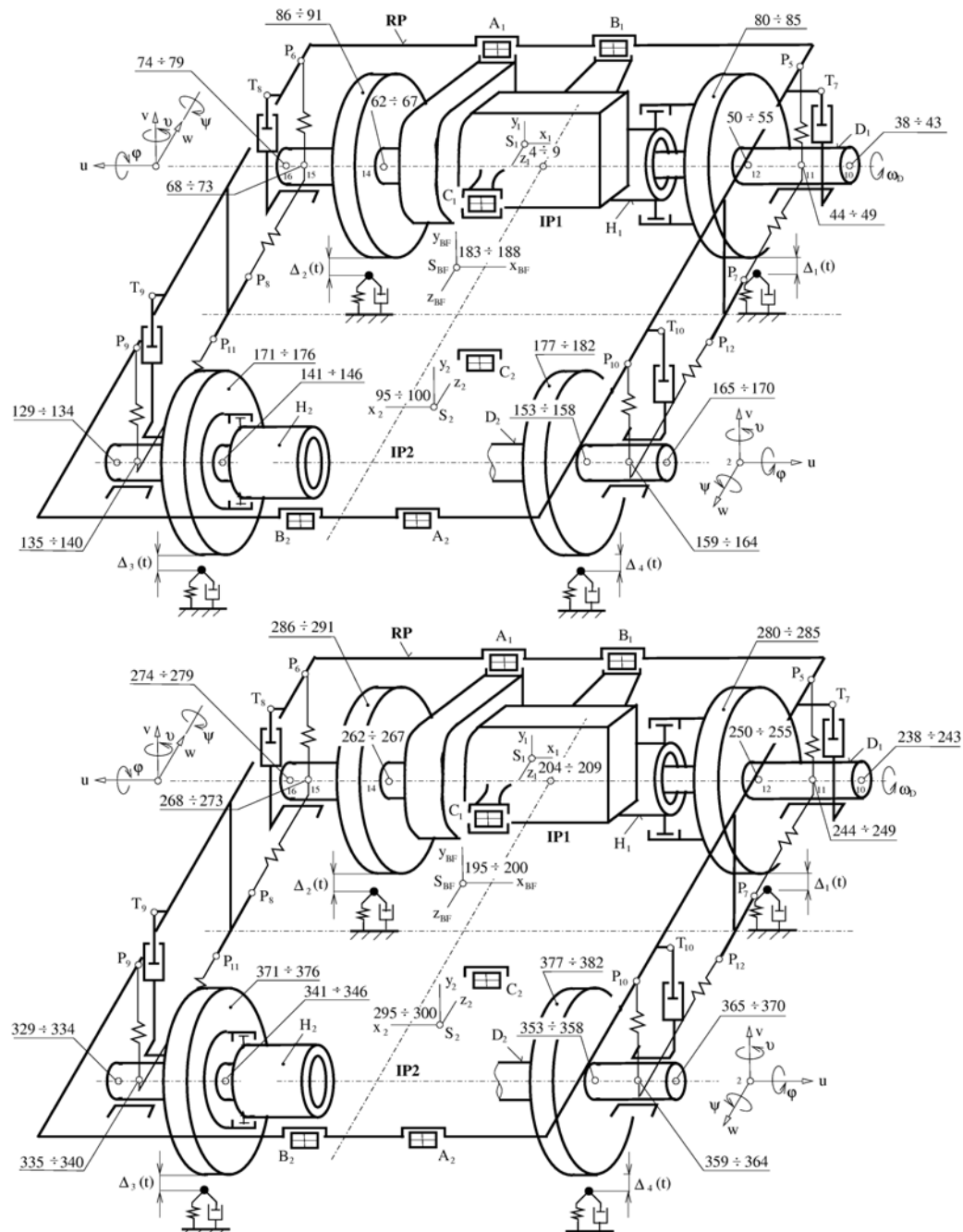
---

\* Prof. Ing. Vladimír Zeman, DrSc., Doc. RNDr. Zdeněk Hlaváč, CSc.: University of West Bohemia, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, tel. +420 377 632 332, e.mail: zemanv@kme.zcu.cz

náprav dvojkolí primárním vypružením a tlumením s rámy podvozků.

Testování modelu a vyvíjeného software bylo provedeno ve dvou krocích – varianty bez tlumení a bez vlivu adhezních sil v kontaktu kol s kolejnicemi (konzervativní model) a úplné nekonzervativní varianty se všemi tlumicími účinky, linearizovanými momentovými charakteristikami trakčních motorů a linearizovanými adhezními charakteristikami, jak je podrobněji uvedeno ve výzkumné zprávě Zeman et al. (2010).

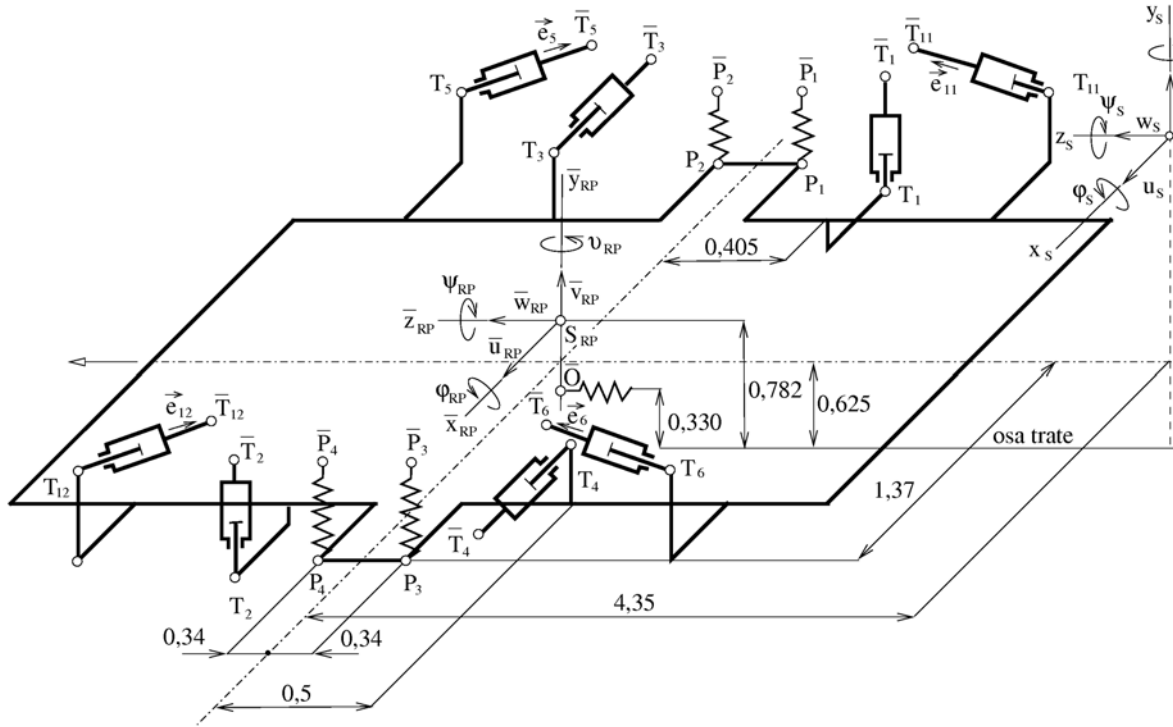
## 2. Linearizovaný nekonzervativní matematický model kolejového vozidla



Obr. 1 Schema podvozků s označením pořadí zobecněných souřadnic u předního podvozku (horní obrázek) a u zadního podvozku (dolní obrázek)

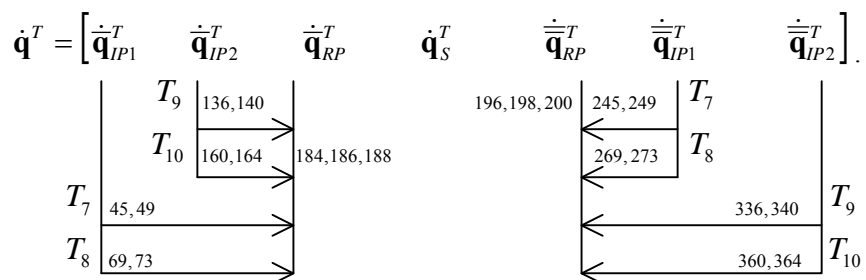


podvozku a  $\bar{P}_i$  (resp.  $\bar{\bar{P}}_i$ ),  $i = 1, 2, 3, 4$  na skříní vozidla a podélnými pružinami v otočných čepech  $\bar{O}$  (resp.  $\bar{\bar{O}}$ ) mezi podvozky a skříní vozidla, jak je ukázáno u předního podvozku na obr. 3.



Obr. 3 Schema rámu předního podvozku s vazbami na skříně

**Tlumičí vazby** mezi nápravovými ložiskovými tělesy a rámy podvozků, s označením provázaných zobecněných rychlostí a vazebních bodů na rámech obou podvozků (obr. 1), jsou schematicky znázorněny na obr. 4.



Obr. 4 Tlumičí vazby mezi nápravovými ložiskovými tělesy a rámy podvozků (primární tlumiče)

Matematický model obou **rámů podvozků vázaných se skříní** vozidla sekundárním vypružením a sekundárními tlumiči byl odvozen separátně v konfiguračním prostoru

$$\mathbf{q}_{RP,S,RP} = \left[ \bar{\mathbf{q}}_{RP}^T \quad \mathbf{q}_S^T \quad \bar{\bar{\mathbf{q}}}_{RP}^T \right]^T \in R^{18} \quad (2)$$

za předpokladu tuhých rámu podvozků a skříně a jejich prostorového pohybu. Tento subsystem je popsán blokově diagonální maticí tuhosti

$$\mathbf{M}_{\overline{RP,S,RP}} = \text{diag}(\mathbf{M}_{RP} \quad \mathbf{M}_S \quad \mathbf{M}_{RP}) \quad (3)$$

a maticemi tuhosti a tlumení ve tvaru

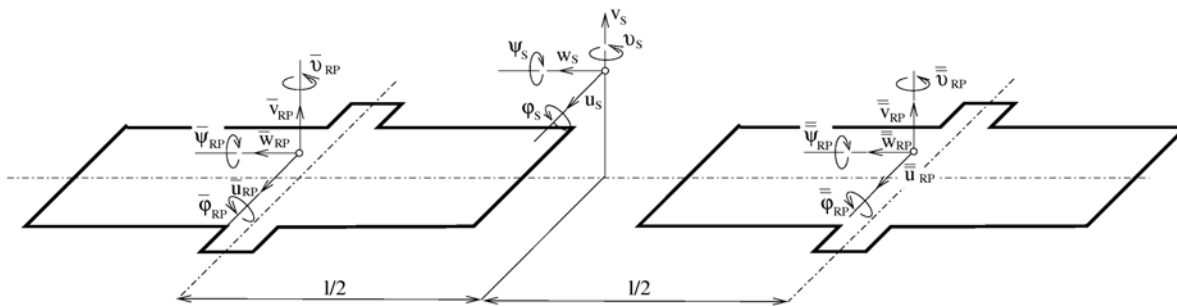
$$\mathbf{K}_{\overline{RP,S,RP}} = \sum_X \begin{bmatrix} \mathbf{T}_X^T \mathbf{K}_X \mathbf{T}_X & -\mathbf{T}_X^T \mathbf{K}_X \mathbf{T}_{\bar{X}} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{T}_{\bar{X}}^T \mathbf{K}_X \mathbf{T}_X & \mathbf{T}_{\bar{X}}^T \mathbf{K}_X \mathbf{T}_{\bar{X}} + \mathbf{T}_X^T \mathbf{K}_X \mathbf{T}_{\bar{X}} & -\mathbf{T}_{\bar{X}}^T \mathbf{K}_X \mathbf{T}_X \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_X^T \mathbf{K}_X \mathbf{T}_{\bar{X}} & \mathbf{T}_X^T \mathbf{K}_X \mathbf{T}_X \end{bmatrix}, \quad X = P_1 \text{ až } P_4, O \quad (4)$$

$$\mathbf{B}_{\overline{RP,S,RP}} = \sum_Y b_Y \begin{bmatrix} \mathbf{T}_Y^T \mathbf{E}_Y \mathbf{T}_Y & -\mathbf{T}_Y^T \mathbf{E}_Y \mathbf{T}_{\bar{Y}} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{T}_{\bar{Y}}^T \mathbf{E}_Y \mathbf{T}_Y & \mathbf{T}_{\bar{Y}}^T \mathbf{E}_Y \mathbf{T}_{\bar{Y}} + \mathbf{T}_Y^T \mathbf{E}_Y \mathbf{T}_{\bar{Y}} & -\mathbf{T}_{\bar{Y}}^T \mathbf{E}_Y \mathbf{T}_Y \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_Y^T \mathbf{E}_Y \mathbf{T}_{\bar{Y}} & \mathbf{T}_Y^T \mathbf{E}_Y \mathbf{T}_Y \end{bmatrix}, \quad Y = T_1 \div T_6, T_{11}, T_{12} \quad (5)$$

kde  $\mathbf{K}_X$  je diagonální matice tuhosti jedné sekundární pružiny a  $b_Y$  je koeficient viskózního tlumení sekundárního tlumiče mezi body  $Y$  na rámu podvozku a body  $\bar{Y}$  (resp.  $\bar{\bar{Y}}$ ) na skříní vozidla. Transformační matice  $\mathbf{T}_X$  u matice tuhosti v (4) a  $\mathbf{T}_Y$  u matice tlumení v (5) ve tvaru

$$\mathbf{T}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & z_X & -y_X \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -z_X & 0 & x_X \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & y_X & -x_X & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & z_Y & -y_Y \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -z_Y & 0 & x_Y \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & y_Y & -x_Y & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

transformují vektory zobecněných souřadnic  $\mathbf{q}_{\overline{RP}}$  resp.  $\mathbf{q}_{\overline{RP}}$  středů hmotnosti rámců podvozků na vektory posuvů vazebních bodů  $X$  a resp.  $Y$  na rámech podvozků ve směrech souřadnicových os. Podobně to platí pro transformační matice vazebních bodů  $\bar{X}$ ,  $\bar{\bar{X}}$  a  $\bar{Y}$ ,  $\bar{\bar{Y}}$  na skříní vozidla, kterými je transformován vektor zobecněných souřadnic  $\mathbf{q}_S$  skříně na vektory posuvů příslušných vazebních bodů. Souřadnice vazebních bodů v transformačních maticích typu (6) jsou vyjádřeny v kartézských souřadnicových systémech s počátky ve středech hmotností podvozků a skříně (obr. 5).



Obr.5 Poloha středů hmotnosti a zobecněné souřadnice rámců podvozků (RP) a skříně (S)

**Linearizovaný nekonzervativní matematický model** kolejového vozidla respektuje tlumení všech vazeb, linearizované momentové charakteristiky motorů a adhezní síly ve styku kol s kolejnicemi. Byl vyvinut aplikací Lagrangeových rovnic v konfiguračním prostoru

$$\mathbf{q} = [\bar{\mathbf{q}}_{ID1}^T \quad \bar{\mathbf{q}}_{ID2}^T \quad \mathbf{q}_{\overline{RP,S,RP}}^T \quad \bar{\bar{\mathbf{q}}}_{ID1}^T \quad \bar{\bar{\mathbf{q}}}_{ID2}^T]^T \quad (7)$$

s využitím již dříve odvozených modelů individuálních pohonů v podvozku Hlaváč&Zeman (2009), začleněním subsystému rámu podvozků provázaných se skříní charakterizovaného maticemi v (3) až (5) a modelováním všech vazeb mezi individuálními pohony a rámy podvozků, vyznačených v obr. 2 a 4. Struktura modelu, zatím bez uvažování buzení, odpovídá vývoji zmíněnému v úvodu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{B} + \mathbf{B}_{P,RP} + \mathbf{B}_{D,RP} + \mathbf{B}_M(b_M) + \mathbf{B}_{ad}(s_0, v, N_0)]\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{P,RP} + \mathbf{K}_{D,RP})\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Matice  $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}$  popisují fiktivní model systému složeného z navzájem neprovázaných individuálních pohonů a subsystému  $\overline{RS}, S, \overline{RS}$  bez uvažování momentových charakteristik motorů a adhezních sil v individuálních pohonech.

Mají jednotný diagonální tvar

$$\mathbf{X} = \text{diag}(\mathbf{X}_{IP}, \mathbf{X}_{IP}, \mathbf{X}_{\overline{RP},S,\overline{RP}}, \mathbf{X}_{IP}, \mathbf{X}_{IP}), \quad \mathbf{X} = \mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}. \quad (9)$$

Matice  $\mathbf{B}_{P,RP}$  a  $\mathbf{K}_{P,RP}$  popisují visko-elastické uložení statorů trakčních motorů se skříněmi převodovek na rámech podvozků v silentblocích  $A_1, B_1, C_1$  a  $A_2, B_2, C_2$  (viz obr. 1). Matice  $\mathbf{B}_{D,RP}$  a  $\mathbf{K}_{D,RP}$  popisují tlumení a tuhost všech primárních tlumičů a pružin mezi dvojkolými a rámy podvozků včetně podélného vedení všech dvojkolí. Diagonální matice

$$\mathbf{B}_M(b_M) = b_M \text{diag} \left( \begin{matrix} 1 & 7 & 92 & 98 & 201 & 207 & 292 & 298 \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots \end{matrix} \right) \quad (10)$$

vyjadřuje tlumicí účinek linearizovaných momentových charakteristik všech čtyř trakčních motorů, přičemž koeficienty  $b_M$  (mohou být i různé) jsou strmosti momentových charakteristik ve stavu statické rovnováhy systému, odpovídající relativním podélným skluzům kol  $s_0$ . Blokově diagonální nesymetrická matice  $\mathbf{B}_{ad}(s_0, v, N_0)$  linearizovaných adhezních silových účinků ve styku věnců kol s kolejnicemi má tvar (Zeman at al. (2007-2)

$$\mathbf{B}_{ad}(s_0, v, N_0) = \text{diag} \left( \dots \overline{\mathbf{B}}_{ad}, \overline{\mathbf{B}}_{ad} \dots \overline{\mathbf{B}}_{ad}, \overline{\mathbf{B}}_{ad} \dots \overline{\mathbf{B}}_{ad}, \overline{\mathbf{B}}_{ad} \dots \overline{\mathbf{B}}_{ad}, \overline{\mathbf{B}}_{ad} \dots \overline{\mathbf{B}}_{ad} \right), \quad (11)$$

přičemž nesymetrické blokové matice  $\overline{\mathbf{B}}_{ad}$  řádu 6 ve tvaru

$$\overline{\mathbf{B}}_{ad} = \begin{bmatrix} b_{22} & & & & b_{23} & r b_{22} \\ & & & & & \\ & & b_{11} & -r b_{11} & & \\ & & -r b_{11} & r^2 b_{11} & & \\ -b_{23} & & & & b_{33} & -r b_{23} \\ r b_{22} & & & & r b_{23} & r^2 b_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

jsou lokalizovány na pozicích odpovídajících zobecněným souřadnicím středů věnců kol o poloměru  $r$  v kontaktních bodech s kolejnicemi. Koeficient  $b_{11} = \frac{3,6}{v} N_0 \left[ \frac{\partial \mu}{\partial s} \right]_{s=s_0}$  linearizovaného podélného tlumení je závislý na relativním podélném skluzu kol  $s_0$ , rychlosti kolejového vozidla  $v [km/h]$  a vertikální kolové síle  $N_0 [N]$ , kde  $\mu(s, v)$  je adhezní

součinitel. Ostatní koeficienty  $b_{ij} = 3,6 f_{ij} / v$  odpovídají Kalkerovým koeficientům  $f_{ij}$ , vypočítaným na základě Kalkerovy teorie uvedené např. v knize Gark&Dukkipati (1984) pro nominální kolovou sílu  $N_0$ .

### 3. Modální veličiny kolejového vozidla

Pro výpočet modálních veličin byl vyvinut program v prostředí MATLAB, který je založen na řešení problému vlastních hodnot ve stavovém prostoru  $\mathbf{u} = [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{q}^T]^T$  dimenze  $2n = 764$ . Vlastní čísla  $\lambda_v$  a vlastní vektory  $\mathbf{u}_v = [\lambda_v \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v^T]^T$  vyhovují rovnici

$$[\lambda_v \mathbf{N}(s_0, v, N_0, b_M) + \mathbf{P}] \mathbf{u}_v = \mathbf{0}, \quad (14)$$

kde

$$\mathbf{N}(s_0, v, N_0, b_M) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B} + \mathbf{B}_{P,RP} + \mathbf{B}_{D,RP} + \mathbf{B}_M(b_M) + \mathbf{B}_{ad}(s_0, v, N_0) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} + \mathbf{K}_{P,RP} + \mathbf{K}_{D,RP} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Poř.	Vlastní čísla [Hz]	Dominantně kmitající komponenty
1	-0,229 + i 0,848	příčně skříň s mírným kolébáním
2	-0,089 + i 0,905	podélně skříň s podvozky ve fázi
3	-0,571 + i 1,114	kolébání a příčné kmity skříňe s podvozky ve fázi
4	-0,373 + i 1,220	vertikálně skříň s podvozky ve fázi
5	-0,410 + i 1,256	naklápění skříňe s mírným kolébáním
6	-0,781 + i 1,364	kolébání a vrcení skříňe s podvozky ve fázi
7	-3,119 + i 4,254	vertikálně podvozky ve fázi
8	-3,086 + i 4,280	vertikálně podvozky v protifázi
9	-3,805 + i 4,553	naklápění podvozků ve fázi
10	-3,787 + i 4,584	naklápění podvozků v protifázi
11	-0,981 + i 5,718	příčně podvozky ve fázi
12	-0,956 + i 5,726	příčně podvozky v protifázi
13	-0,168 + i 8,466	příčně statory uvnitř i vně podvozků v protifázi s kolébáním RP v protifázi
14	-0,172 + i 8,498	příčně statory uvnitř podvozků v protifázi a vně ve fázi s kolébáním RP ve fázi
15	-0,211 + i 8,499	torzně dvojkolí s dutými hřídely uvnitř i vně podvozků v protifázi
16	-0,211 + i 8,500	torzně dvojkolí s dutými hřídely uvnitř podvozku v protifázi a vně ve fázi
17	-0,353 + i 8,548	torzně dvojkolí s dutými hřídely uvnitř podvozku ve fázi a vně v protifázi
18	-0,313 + i 9,207	torzně dvojkolí s dutými hřídely uvnitř i vně podvozků ve fázi

Tab.1 Vlastní čísla a charakteristika vlastních tvarů kmitání ve frekvenčním rozsahu do 10 Hz

Vyvinutý komplexní matematický model čtyřnápravového kolejového vozidla byl testován na reálné čtyřnápravové lokomotivě 109E o konstrukčních parametrech uvedených ve výzkumné zprávě Zeman at al. (2010). Z provozních parametrů, na nichž závisí matice  $\mathbf{N}$  v (15), byl měněn relativní podélný skluz  $s_0$  ve stavu statické rovnováhy systému (uvažován stejný u všech kol) a rychlost kolejového vozidla  $v$  [km/h]. Ostatní provozní parametry  $N_0 = 1,055 \cdot 10^5$  [N] a  $b_M = 10^3$  [Nms/rad] byly uvažovány jako pevné a u všech kol a individuálních pohonů stejné. Pro ilustraci v tab. 1 uvádíme výpis frekvenčně nejnižších 18 komplexních vlastních čísel s kladnou imaginární částí společně se stručnou charakteristikou vlastních tvarů kmitání při relativním skluzu  $s_0 = 0,005$  a rychlosti lokomotivy  $v = 120$  [km/h]. Všechna vlastní čísla mají zápornou reálnou část a proto systém při těchto provozních parametrech je stabilní.

Z rozboru vlastních tvarů kmitání přiřazených dvojicím komplexně sdružených vlastních čísel vyplývá, že 6 frekvenčně nejnižších vlastních tvarů kmitání je charakterizováno dominantním kmitáním skříně lokomotivy, dalších 6 dominantním kmitáním podvozků a až od 13. vlastního tvaru kmitání se začnou uplatňovat i lokální kmity komponent individuálních pohonů.

Z tohoto důvodu nemá smysl zkoumat závislost prvních 12 párů komplexně sdružených vlastních čísel na provozních parametrech  $s_0$  a  $v$ , neboť na nich tato vlastní čísla prakticky nezávisí. Provozními parametry  $s_0$  a  $v$  jsou ovlivněny zejména tvary kmitání charakterizované torzním rozkmitáním některého z individuálních pohonů. Je to zřejmé z obr. 6 a 7, kde jsou zobrazeny závislosti imaginárních a reálných částí vlastních čísel na relativním podélném skluzu  $s_0$  při rychlostech 120 a 200 km/h. Vyznačené pořadí vlastních čísel odpovídá jejich seřazení podle velikosti imaginární složky (vlastní frekvence) při skluzu  $s_0 = 0,005$ .

Kritické skluzy, při kterých se systém stane nestabilní, jsou závislé na rychlosti lokomotivy. Při rychlostech vozidla  $v = 120$  a  $v = 200$  km/h jsou kritické skluzy  $s_{krit}(120) = 0,0082$  a  $s_{krit}(200) = 0,0069$  a jsou srovnatelné s kritickými skluzy vyšetřeny na modelu jednoho podvozku s tuhými koly, jak je uvedeno v článku (Zeman at al., 2007-2).

U čtyřnápravového vozidla může dojít k odlišnému relativnímu podélnému skluzu u jednotlivých dvojkolí. Jaký má tento stav vliv na modální vlastnosti celého systému je možné zkoumat úpravou matice  $\mathbf{B}_{ad}$  uvedené v (11) na tvar

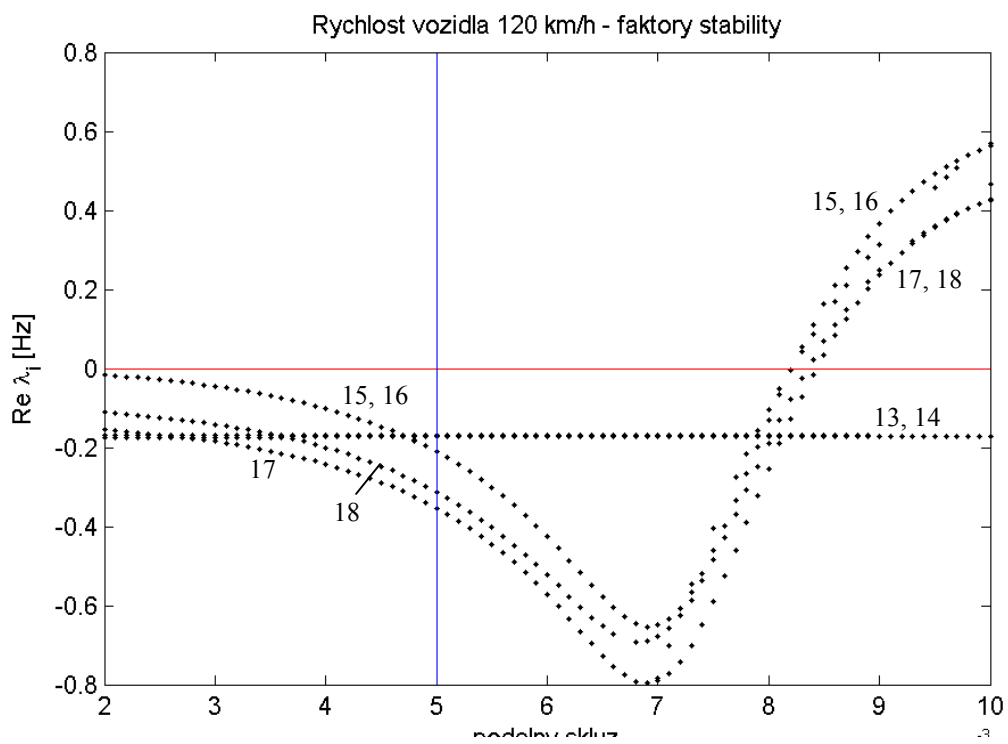
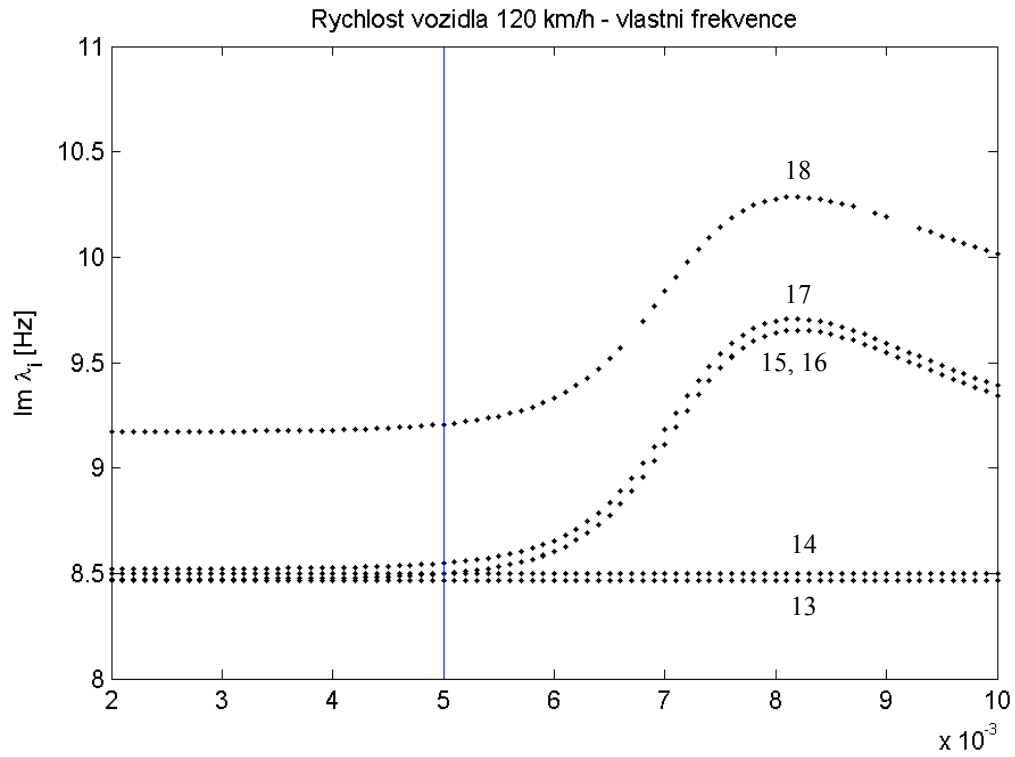
$$\mathbf{B}_{ad} = \text{diag} \left( \dots \bar{\mathbf{B}}_{1ad}, \bar{\mathbf{B}}_{2ad} \dots \bar{\mathbf{B}}_{3ad}, \bar{\mathbf{B}}_{4ad} \dots \bar{\bar{\mathbf{B}}}_{1ad}, \bar{\bar{\mathbf{B}}}_{2ad} \dots \bar{\bar{\mathbf{B}}}_{3ad}, \bar{\bar{\mathbf{B}}}_{4ad} \dots \right), \quad (17)$$

kde index u blokových matic odpovídá kolu (v modelu na obr. 1 ovalitě kola  $A_i(t)$ ) a pruhy označující příslušnost k přednímu (s jedním pruhem) nebo zadnímu (se dvěma pruhy) podvozku. V blokových maticích

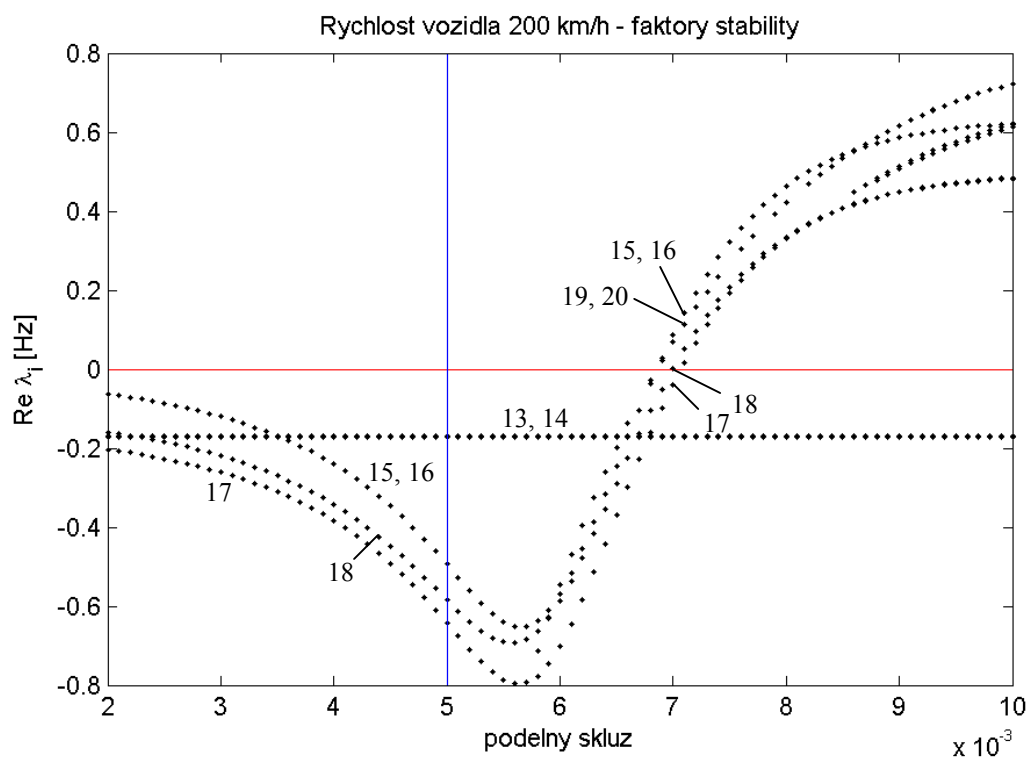
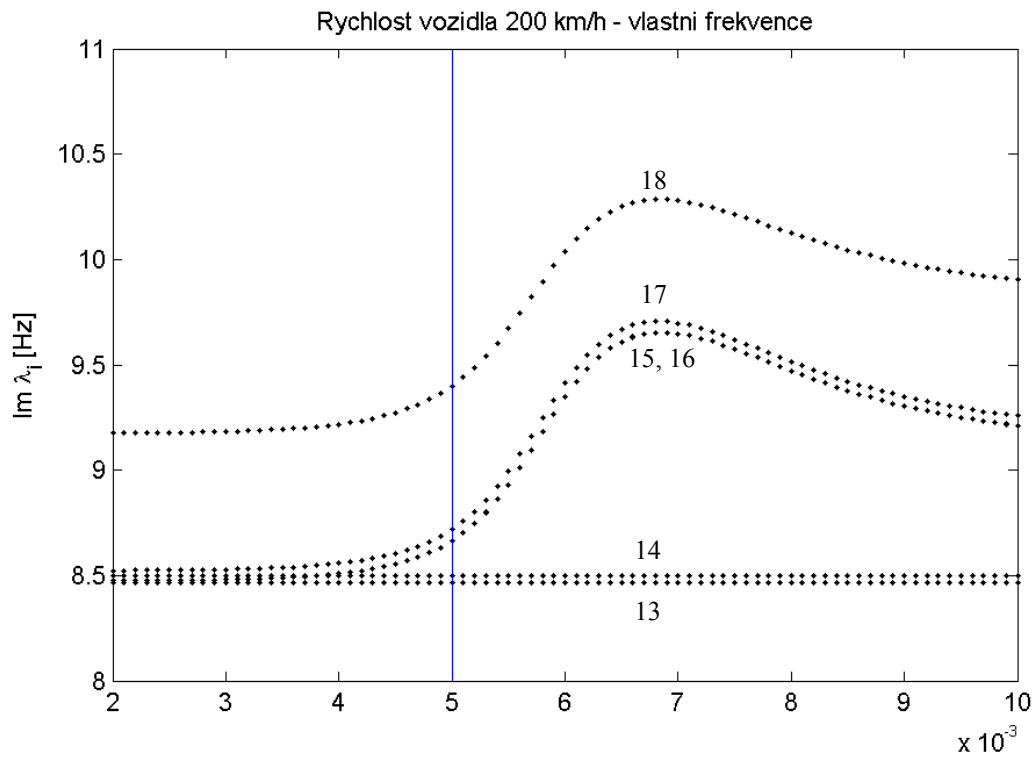
$$\bar{\mathbf{B}}_{iad}(\bar{s}_{i,0}, v, N_0), \text{ resp. } \bar{\bar{\mathbf{B}}}_{iad}(\bar{\bar{s}}_{i,0}, v, N_0), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (18)$$

ve tvaru (12) jsou pak koeficienty  $b_{11}$  linearizovaného podélného tlumení jednotlivých kol nahrazeny koeficienty

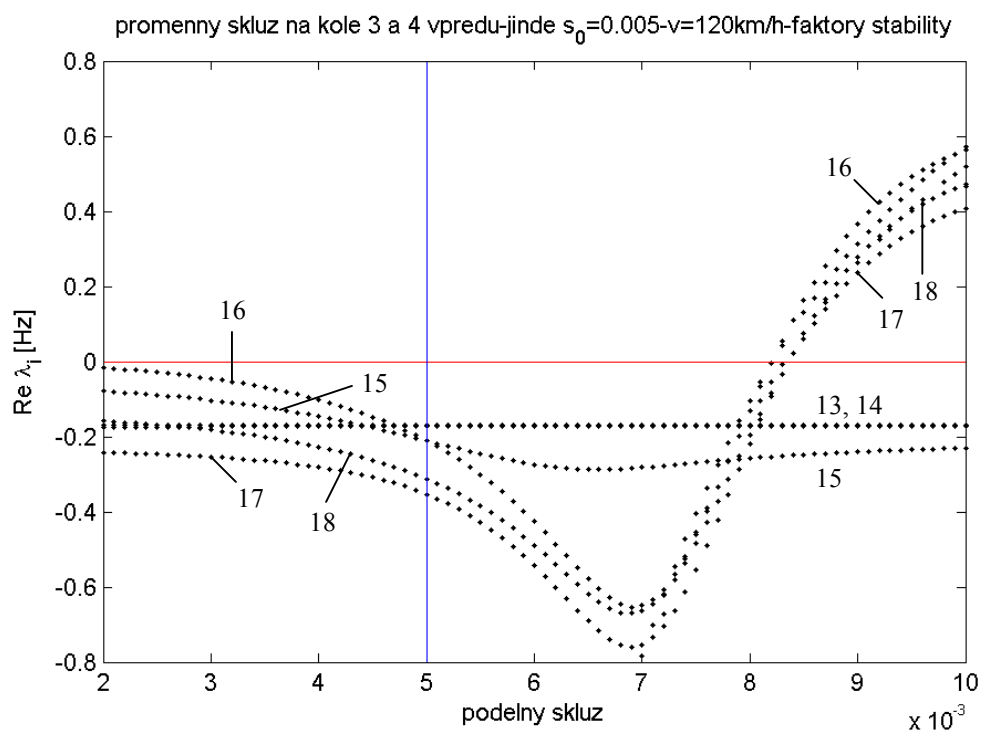
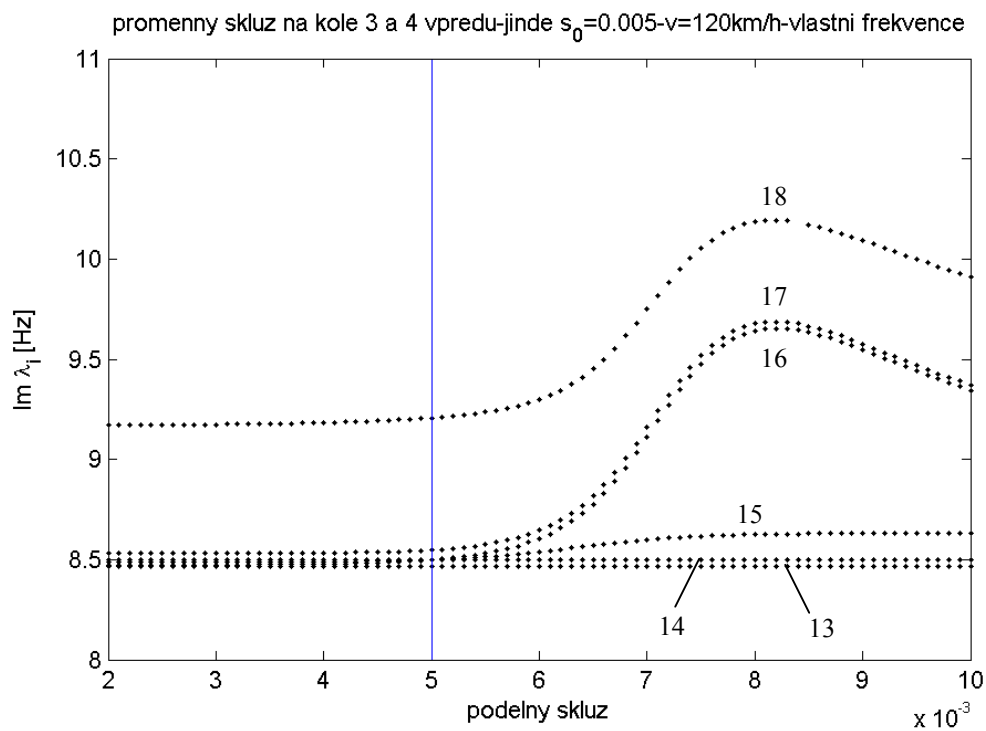




Obr. 6 Závislost imaginárních a reálných částí vlastních čísel  $\lambda_v$  pro  $v = 13 \div 18$  na relativním podélném skluzu  $s_0$  při rychlosti  $v = 120 \text{ km/h}$



Obr. 7 Závislost imaginárních a reálných částí vlastních čísel  $\lambda_\nu$  pro  $\nu = 13 \div 18$  na relativním podélném skluzu  $s_0$  při rychlosti  $v = 200 \text{ km/h}$



Obr. 8 Závislost imaginárních a reálných částí vlastních čísel  $\lambda_v$  pro  $v = 13 \div 18$  na relativním podélném skluzu prvního dvojkolí při skluzech ostatních kol  $s_0 = 0.005$  a rychlosti  $v = 120 \text{ km/h}$

$$\bar{b}_{11}^{(i)} = \frac{3,6}{v} N_0 \left[ \frac{\partial \mu}{\partial s} \right]_{s=\bar{s}_{i,0}} \quad \text{resp.} \quad \bar{\bar{b}}_{11}^{(i)} = \frac{3,6}{v} N_0 \left[ \frac{\partial \mu}{\partial s} \right]_{s=\bar{\bar{s}}_{i,0}}, \quad (19)$$

kde  $\bar{s}_{i,0}$  resp.  $\bar{\bar{s}}_{i,0}$  jsou podélné relativní skluzy příslušných věnců kol. Z mnoha možných kombinací jsme vybrali stav, kdy kola předního dvojkolí na předním podvozku (1. dvojkolí ve směru jízdy) mění skluz v rozsahu  $\bar{s}_{3,0} = \bar{s}_{4,0} \in \langle 0,002; 0,01 \rangle$  a ostatní kola mají stejný skluz  $s_0 = 0,005$ . Závislosti imaginárních a reálných částí po dvojicích komplexně sdružených vlastních čísel na skluzu  $\bar{s}_{3,0} = \bar{s}_{4,0}$  při rychlosti  $v = 120 \text{ km/h}$  jsou znázorněny na obr. 8. Jediná výraznější změna v modálních vlastnostech systému se projeví rozštěpením vlastních čísel  $\lambda_{15}$  a  $\lambda_{16}$  přiřazených vlastním tvarům kmitání, kdy torzní kmity individuálního pohonu s jinak prokluzujícím dvojkolím se odlišují od torzních kmitů ostatních individuálních pohonů se stejným prokluzem. Kritický skluz prvního dvojkolí se prakticky nemění.

Při poněkud větších skluzech než je skluz kritický některá reálná vlastní čísla se stanou kladnými a systém vedle nestability typu flutter vykazuje i nestabilitu typu divergence. Takové stavy vedou k silnému rozkmitání individuálních pohonů a zásah protiskluzové ochrany je nutný.

#### 4. Závěr

V příspěvku je uvedena metodika vytváření kompletního matematického modelu čtyřnápravového kolejového vozidla se dvěma podvozky při jízdě po přímé trati. Model respektuje prostorový pohyb skříně vozidla, rámů podvozků a všech komponent individuálních pohonů včetně dvojkolí. Některé komponenty jsou uvažovány jako tuhá tělesa se šesti stupni volnosti (skříně, rámy podvozků, statory a rotory trakčních motorů, ozubená kola, kotouče lamelové a zubové spojky, náboje a věnce kol) provázané pružně-viskózními diskrétními vazbami (ozubení na záběrové přímce, prostorová poddajnost lamelové spojky, torzní poddajnost hnacích hřídelů a zubových spojek, vazby nábojů a věnců kol, uložení statorů trakčních motorů, primární a sekundární vypružení a tlumení, vedení dvojkolí, podélná poddajnost lemniskátových přímovodů a vertikální poddajnost podloží kolejnic). Hnací hřídele obepínající nápravy a nápravy dvojkolí jsou uvažovány jako prostorově kmitající 1D kontinua.

Metodika je aplikována na sestavení kompletního matematického modelu lokomotivy 109E, který podle názoru autorů vyhovuje pro vyšetřování dynamické odezvy na zdroje buzení cca do 100 Hz. Vytváření komplexního modelu lokomotivy 109E ve fázi bez tlumících a adhezních silových účinků bylo testováno detailním výpočtem a analýzou vlastních frekvencí a vlastních vektorů, včetně těch, které jsou přiřazeny nulovým vlastním frekvencím a při nichž nesmí dojít k deformacím.

Model lokomotivy, po doplnění tlumení vazeb, linearizaci momentových charakteristik trakčních motorů a adhezních sil ve styku kol s kolejnicemi, byl podroben analýze vlastních čísel a komplexních vlastních vektorů. Z nich vyplývá, že frekvenčně nejnižší nenulové vlastní tvary kmitání jsou charakterizovány dominantním kmitáním skříně lokomotivy ( $0,8 \div 1,4 \text{ Hz}$ ), potom podvozků ( $4 \div 6 \text{ Hz}$ ) a od frekvence 8 Hz se začnou uplatňovat i lokální kmity komponent individuálních pohonů. Vlastní čísla a vlastní tvary kmitání, charakterizované silným torzním rozkmitáním individuálních pohonů ve frekvenční oblasti cca od 8 Hz, mohou být výrazně závislé na relativním podélném skluzu kol. Kritický skluz,

při němž systém ztrácí stabilitu, závisí na rychlosti lokomotivy a se vzrůstající rychlostí klesá. Jeho hodnota je pro všechna dvojkolí téměř stejná a prakticky nezávisí na běžném provozním skluzu ostatních dvojkolí lokomotivy.

Komplexní matematický model lokomotivy 109E je připraven k následnému doplňování hlavních zdrojů buzení a ke zkoumání dynamické odezvy ve formě výchylek, deformací a dynamických sil přenášených vazbami.

## 5. Poděkování

Příspěvek vznikl v rámci výzkumného projektu MŠMT 1M0519 – Výzkumné centrum kolejových vozidel za podpory MŠMT České republiky.

## 6. Literatura

- Gark, V.K. & Dukkipati, R.V. (1984): *Dynamic of railway vehicle systems*. Academic Press, London.
- Hlaváč, Z. & Zeman, V. (2009): Optimization of the railway vehicle bogie in term of dynamics. *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 3 (2009), No. 1, pp. 39-50.
- Popp, K. & Schiehlen, W. (2003): *System Dynamics and Long term Behaviour of Railway Vehicles, Track and Subgrade*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- Zeman, V. & Hlaváč, Z.. & Byrtus, M. (2007-1): Modelling and modal properties of a railway vehicle wheelset drive with a hollow shaft. *Book of extended abstracts, Engineering mechanics 2007*, pp. 325-326 (full text on CD-ROM).
- Zeman, V. & Hlaváč, Z.. & Byrtus, M. (2007-2): Modelling and modal properties of a railway vehicle bogie with two individual wheelset drives. *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 1 (2007), No. 1, pp. 371-380.
- Zeman, V. & Hlaváč, Z.. & Byrtus, M. (2010): *Matematický model a modální vlastnosti lokomotivy 109E*. Výzkumná zpráva č. H9/2009-2, VCKV, Západočeská univerzita, Plzeň.
- Zeman, V. & Hlaváč, Z.. & Byrtus, M. (2010): *Dynamické zatížení komponent podvozku lokomotivy 109E vyvolané zkratovým momentem motoru*. Výzkumná zpráva č. H9/2009-1, VCKV, Západočeská univerzita, Plzeň.