

SYMBOLIC ANALYSIS OF A MECHATRONIC DRIVE USING THE PROGRAM SAMD

J. Kalous¹, D. Biolek², Z. Kolka¹

Abstract: *The paper presents practical application of the new developed program SAMD on a mechatronic drive unit, consisting of a PWM dc-to-dc converter and a permanent-magnet dc motor, to get results of both its symbolic and semisymbolic analyses. Above all it is shown how to create individual purpose-oriented models of that drive to obtain transfer functions, poles and zeroes, frequency characteristics and step responses for both the input supply voltage and the controlling duty ratio.*

Keywords: *mechatronic drive, PWM dc-to-dc converter, permanent-magnet dc motor, symbolic analysis, program SAMD.*

1. Úvod

Mechatrické pohony procházejí v současné době rychlým vývojem především díky tomu, že se v nich bezprostředně uplatňují nejrychleji se rozvíjející obory elektrotechniky, zejména výkonové elektroniky a číslicové řídicí a regulační techniky, a to bez ohledu na to, zda jde o pohony s motory střídavými nebo s motory stejnosměrnými.

Až do nedávné doby byly stejnosměrné motory řízených či regulovaných pohonů zpravidla napájeny ze střídavé elektrické sítě přes řízené tyristorové usměrňovače. V případech, kdy v dané konkrétní aplikaci byl k dispozici pouze stejnosměrný elektrický zdroj s konstantním napětím (např. akumulátorová baterie, diodový usměrňovač apod.), bylo možné řídit či regulovat stejnosměrný motor pouze prostřednictvím ztrátové odporové regulace (reostat, odporový napěťový dělič, výkonový zesilovač), což samozřejmě snižovalo energetickou účinnost celého pohonu. V současné době je dána možnost překonat tento vážný nedostatek použitím spínaných stejnosměrných měničů s impulsní šířkovou modulací, jejichž energetická účinnost překračuje i 95 %.

V počátečním stadiu projektování jakéhokoliv řízeného či regulovaného mechatronického pohonu je obvyklé získat co největších množství informací o statických a dynamických vlastnostech hnacího motoru a jeho napájecí jednotky, které ve vzájemné součinnosti představují akční člen pohonu. Jde zejména o následující kvantitativní ukazatele: stabilita soustavy, velikosti pólů a nul a jejich rozložení v Gaussově rovině komplexní proměnné, činitel zesílení a amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky pro řídicí (akční) veličinu atp.

V tomto příspěvku, který bezprostředně navazuje na příspěvek Kalous et al. (2010) je ukázáno, jak využít nově vyvinutý program SAMD (z angl. **S**ymbolic **A**nalysis of **M**echatronic **D**rives) k získání podkladů pro analýzu zejména dynamických vlastností akčního členu stejnosměrného mechatronického pohonu, tvořeného zvyšovacím spínaným stejnosměrným měničem a stejnosměrným motorem s permanentními magnety.

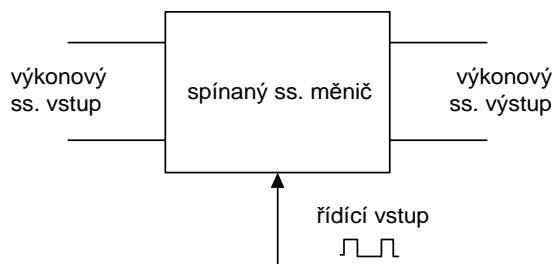
2. Model spínače s impulsní šířkovou modulací

Spínané stejnosměrné měniče (SpSSM) jsou výkonové elektronické obvody, které umožňují s vysokou účinností měnit velikost stejnosměrného napětí čili plní ve stejnosměrných elektrických obvodech obdobnou funkci jako transformátory v obvodech střídavých. Obecně obsahují výkonový

¹ Doc. Ing. Jaroslav Kalous, CSc., Prof. Dr. Ing. Zdeněk Kolka, ÚREL FEKT VUT Brno, Purkyňova 118, 612 00 Brno, KalousJaroslav@upcmil.cz, kolka@feec.vutbr.cz

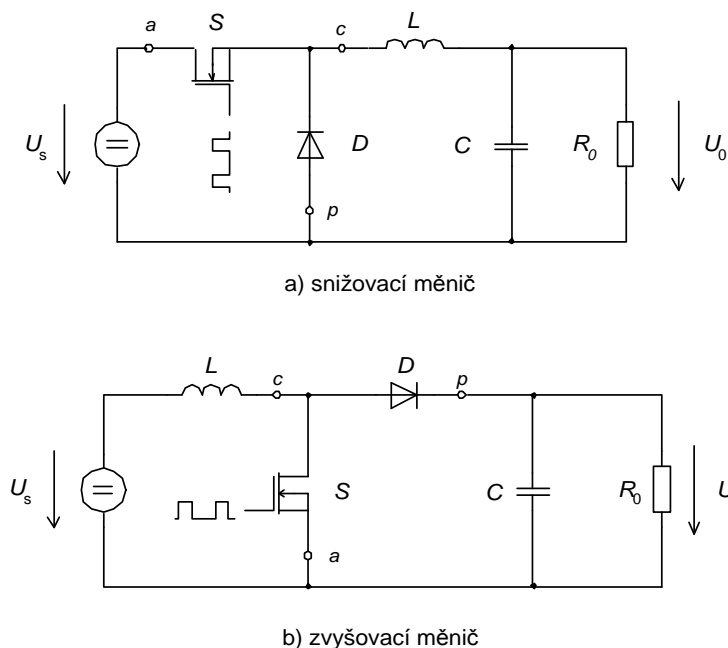
² Prof. Ing. Dalibor Biolek, CSc., katedra elektrotechniky, Fakulta vojenských technologií, Univerzita obrany v Brně, Kounicova 65, 662 10 Brno, dalibor.biolek@unob.cz

stejnoseměrný vstup a výstup a řídicí vstup ve tvaru sledu pravoúhlých impulsů s opakovacím kmitočtem řádu desítek až statisíců impulsů za sekundu a s nastavitelnou šířkou (obr. 1).



Obr. 1 Blokové schéma stejnosměrného měniče

Na obr. 2 jsou pro ilustraci uvedena principiální obvodová schémata snižovacího a zvyšovacího SpSSM, k jejichž výkonovému vstupu je připojen ss. zdroj napětí U_s , k výkonovému výstupu je připojena rezistorová zátěž R_o . Svorkami a - p - c je v obou schématech vymezen tzv. spínač s impulsní šířkovou modulací (spínač s IŠM), složený z aktivního spínače S (tranzistor typu BJT, MOSFET, IGBT apod.) a z výkonové polovodičové diody D ve funkci tzv. pasivního spínače. Ke svorce a je připojen aktivní spínač S , ke svorce p je připojena dioda D , svorka c je společná pro obě elektronické součástky.



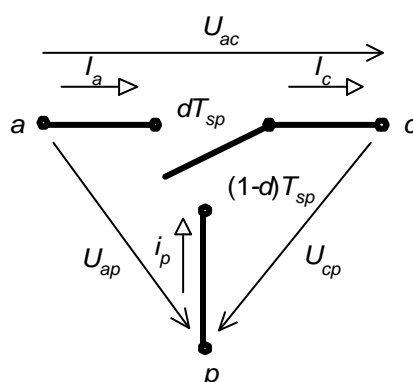
Obr. 2 Principiální schémata spínaných stejnosměrných měničů

Spínač s IŠM je „srdcem“ všech SpSSM a pracuje následovně. V časovém intervalu $0 < t \leq dT_{sp}$ každé spínací periody T_{sp} je aktivní spínač S sepnut a dioda D je v nevodivém stavu, zatímco v časovém intervalu $dT_{sp} < t \leq T_{sp}$ je aktivní spínač S rozpojen a dioda D je ve vodivém stavu. Veličina $d \in (0,1)$ je tzv. *střída spínání*, vyjadřující poměrnou část spínací periody, v níž je aktivní spínač S sepnut a dioda D je v nevodivém stavu. Zavedeme ještě tzv. *doplňkovou střídu spínání* $d' = 1 - d$, vyjadřující zbývající poměrnou část periody, v níž je aktivní spínač S rozpojen a dioda D je ve vodivém stavu.

V počítačových analýzách a simulacích SpSSM se hojně používá metoda, založená na tzv. průměrovaných modelech spínačů s IŠM (Dijk, 1995; Kalous, 2004). Tato metoda byla vyvinuta s cílem snazšího vytváření tzv. obvodových modelů SpSSM s IŠM na základě obvodových schémat SpSSM. Vychází z následující myšlenky.

Zatímco pasivní prvky SpSSM (rezistory, cívky, kondenzátory) lze oprávněně považovat za prvky lineární, je spínač s IŠM prvkem nelineárním, určujícím obecně nelineární charakter chování celého

měníče. Pracuje jako jednopólový dvoupolohový přepínač. Schéma ideálního spínače s IŠM je spolu s přiřazenými napětími a proudy uvedeno na obr. 3.



Obr. 3 Ideální spínač s IŠM

Vyjdeme-li z výše uvedeného popisu činnosti reálného spínače s IŠM, potom pro okamžité hodnoty ss. proudů ve spínači platí

$$I_a(t) = \begin{cases} I_c(t) & \text{pro } 0 \leq t < dT_{sp}, \\ 0 & \text{pro } dT_{sp} \leq t < T_{sp}, \end{cases} \quad (1)$$

$$I_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq t < dT_{sp}, \\ I_c(t) & \text{pro } dT_{sp} \leq t < T_{sp}, \end{cases}$$

Obdobně pro okamžité hodnoty ss. napětí ve spínači platí

$$U_{cp}(t) = \begin{cases} U_{ap}(t) & \text{pro } 0 \leq t < dT_{sp}, \\ 0 & \text{pro } dT_{sp} \leq t < T_{sp}, \end{cases} \quad (2)$$

$$U_{ac}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq t < dT_{sp}, \\ U_{ap}(t) & \text{pro } dT_{sp} \leq t < T_{sp}. \end{cases}$$

Průměrné hodnoty proudů a napětí v periodě spínání pro konstantní střídu spínání $d = d_0$ jsou potom rovny

$$\bar{I}_a = \frac{1}{T_{sp}} \int_0^{T_{sp}} I_a(t) dt = d_0 \bar{I}_c, \quad \bar{I}_p = \frac{1}{T_{sp}} \int_0^{T_{sp}} I_p(t) dt = (1-d_0) \bar{I}_c = d'_0 \bar{I}_c, \quad (3)$$

$$\bar{U}_{cp} = \frac{1}{T_{sp}} \int_0^{T_{sp}} U_{cp}(t) dt = d_0 \bar{U}_{ap}, \quad \bar{U}_{ac} = \frac{1}{T_{sp}} \int_0^{T_{sp}} U_{ac}(t) dt = (1-d_0) \bar{U}_{ap} = d'_0 \bar{U}_{ap}.$$

Vztahy pro průměrné hodnoty proudů \bar{I}_a a napětí \bar{U}_{cp} jsou definičními vztahy průměrovaného ideálního spínače s IŠM.

Jestliže střída spínání d není konstantní, platí pro malé odchylky průměrných hodnot proudů a napětí vztahy

$$\begin{aligned} \tilde{I}_p &= d_0 \tilde{I}_c + \bar{I}_{c0} \tilde{d}, & \tilde{I}_p &= d'_0 \tilde{I}_c - \bar{I}_{c0} \tilde{d}, \\ \tilde{U}_{cp} &= d_0 \tilde{U}_{ap} + \bar{U}_{ap0} \tilde{d}, & \tilde{U}_{ac} &= d'_0 \tilde{U}_{ap} - \bar{U}_{ap0} \tilde{d}, \end{aligned} \quad (4)$$

kteří vypočítáme pomocí totálních diferenciálů vztahů (3). Indexem 0 jsou v nich označeny hodnoty veličin v pracovním bodě a vlnovkou nad jednotlivými veličinami jsou označeny jejich malé odchylky v okolí pracovního bodu.

Model spínače s IŠM, do něžž je zahrnut vliv ztrát, vyvolaných pulsující složkou proudu $\tilde{i}_a(t)$ v pasivních prvcích, připojených mezi svorkami $a - p$ spínače, se od modelu ideálního poněkud liší.

Pro případ konstantní střídavy spínání $d = d_0$ je model takového spínače s IŠM definován vztahy (Vorpérian, 1990)

$$\bar{I}_a = d_0 \bar{I}_c, \quad \bar{U}_{ap} = \frac{1}{d_0} \bar{U}_{cp} + d'_0 r_e \bar{I}_c \quad (5)$$

kde r_e je ekvivalentní rezistor, jehož velikost je obecně funkcí sériového ztrátového odporu kondenzátoru a zatěžovacího odporu měniče.

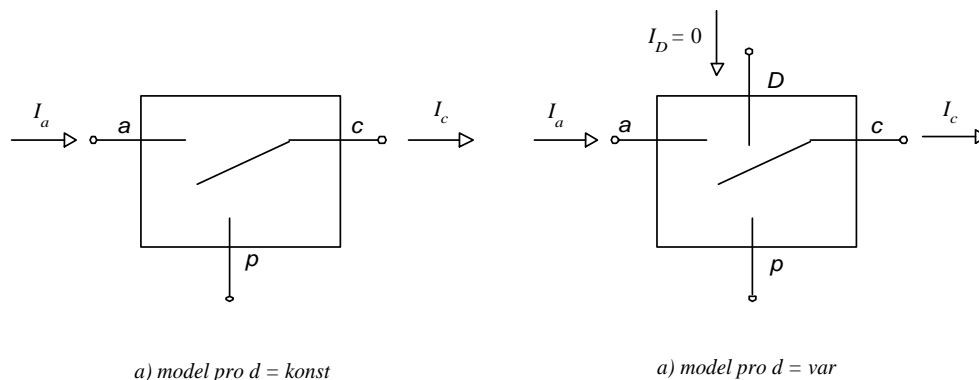
Pro případ, kdy střída spínání není konstantní, platí pro malé odchylky průměrných hodnot proudů a napětí vztahy

$$\tilde{I}_a = d_0 \tilde{I}_c + \bar{I}_{c0} \tilde{d}, \quad \tilde{U}_{ap} = \frac{1}{d_0} \tilde{U}_{cp} + d'_0 r_e \tilde{I}_c - \frac{U_d}{d_0} \tilde{d}, \quad (6)$$

kde

$$U_d = \bar{U}_{ap0} + (d_0 - d'_0) r_e \bar{I}_{c0}. \quad (7)$$

Na základě vztahů (5) až (7) byly pro knihovnu programu SAMD vytvořeny dva lineární submodely spínače s IŠM, jejichž schématické značky spolu s orientačními šipkami proudů jsou uvedeny na obr. 4 (Biolk & Biolková, 2007).



Obr. 4 Schématické značky modelů spínače s IŠM

Zatímco model pro konstantní střídavy spínání se použije k výpočtu funkcí typu „přenos vstupního napětí“, model pro proměnnou střídavy spínání se použije pro výpočty funkcí typu „přenos střídavy spínání“.

3. Symbolické a semisymbolické analýzy pohonu a jeho částí

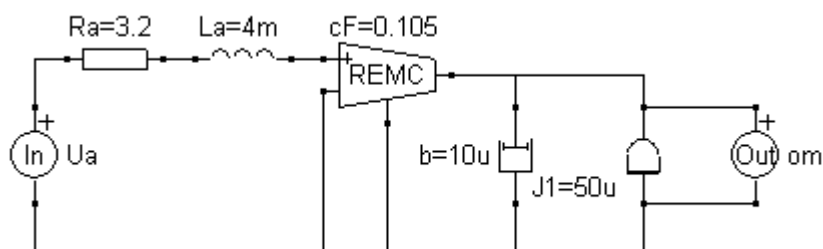
Jako příklad uvažujme akční člen stejnosměrného mechatronického pohonu, tvořeného zvyšovacím SpSSM a stejnosměrným motorem s permanentními magnety (PMDC motor). Celý pohon je napájen z dvanácti voltové akumulátorové baterie. Předpokládá se, že rychlost otáčení motoru bude regulována prostřednictvím změny přenosu napětí SpSSM. Motor bude pracovat při zadaném vstupním napětí 30 V buď naprázdno nebo při zatížení momentem dané velikosti. Uvedený příklad pohonu včetně parametrů je převzat z Lyshevski (2000).

Parametry PMDC motoru jsou následující: indukčnost vinutí kotvy $L_a = 4$ mH, odpor vinutí kotvy $R_a = 3,2 \Omega$, činitel magnetického pole $c\Phi = 0,105 \text{ V s rad}^{-1} = 0,105 \text{ N m A}^{-1}$, hmotný moment setrvačnosti $J = 5 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ a činitel proporcionálního tlumení $b = 1 \cdot 10^{-5} \text{ N m s rad}^{-1}$.

Pro zadané provozní podmínky musí mít zvyšovací SpSSM ustálený přenos napětí $M_U = 2,5$, čemuž odpovídá ustálená střída spínání $d_0 = 0,6$. Aby měnič pracoval jak při chodu naprázdno, tak při zatížení v nepřerušovaném proudovém režimu, byly pro kmitočet spínání $f_{sp} = 200$ kHz určeny následující parametry jeho prvků: indukčnost cívky $L = 0,7$ mH a odpor jejího vinutí $R_L = 20 \text{ m}\Omega$, kapacita kondenzátoru $C = 3$ mF a jeho sériový ztrátový odpor $R_C = 0,15 \Omega$.

3.1 Stejnoseměrný motor s permanentními magnety

Obvodový model PMDC motoru pro přenos vstupního napětí do úhlové rychlosti, vytvořený schématickým editorem programu SAMD, je uveden na obr. 5.



Obr. 5 Obvodový model PMDC motoru pro přenos vstupního napětí

Výsledky výpočtu výše uvedeného přenosu, který je v SAMDu označen jako přenos typu effort-to-effort K_{ee} , poskytne program v následujícím tvaru:

```

_____symbolic_____
cF
-----
cF^(2) +Ra*b
+s*( Ra*J1 +La*b )
+s^(2)*( La*J1 )

_____semisymbolic_____
Multip. Coefficient = 5.250000000000000E+0005

1.000000000000000E+0000
-----
5.528500000000000E+0004
8.002000000000000E+0002 * s
1.000000000000000E+0000 * s^(2)

_____zeros_____
none

_____poles_____
-7.23820573952289E+0002
-7.63794260477100E+0001

```

Získaný výsledek lze přepsat do obvyklého symbolického a semisymbolického tvaru operátorového přenosu

$$K_{ee}(s) = \frac{\omega(s)}{U_a(s)} = \frac{c\Phi}{L_a J_1 s^2 + (R_a J_1 + L_a b)s + ((c\Phi)^e + R_a b)} = 5,25 \cdot 10^5 \frac{1}{s^2 + 8,002 \cdot 10^2 s + 5,529 \cdot 10^4}. \quad (8)$$

Je zřejmé, že uvedený přenos nemá žádnou nulu a má dva reálné záporné póly, jimž odpovídají časové konstanty $\tau_1 = 1,382$ ms a $\tau_2 = 13,09$ ms.

Kromě toho SAMD poskytne též přechodovou charakteristiku v semisymbolickém tvaru

```

_____step response_____
9.49624672153389E+0000
1.12028386911409E+0000*exp(-7.23820573952289E+0002*t)
-1.06165305906479E+0001*exp(-7.63794260477100E+0001*t)

```

čemuž odpovídá matematický výraz

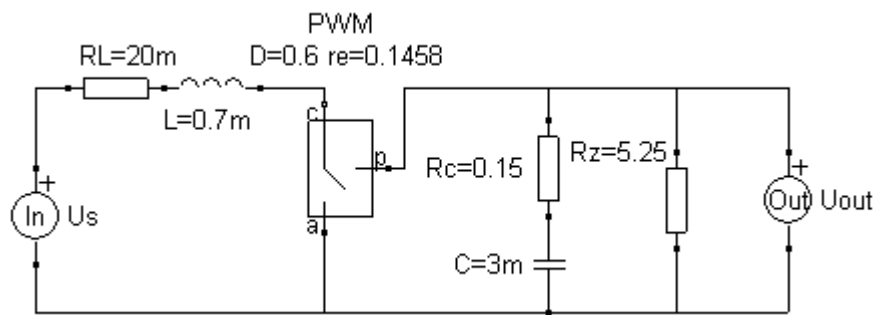
$$h_{\omega}(t) = 9,466 + 1,12e^{-\frac{t}{1,38 \cdot 10^{-3}}} - 10,62e^{-\frac{t}{13,09 \cdot 10^{-3}}} \quad (9)$$

Přechodová charakteristika tedy obsahuje kromě stejnosměrné složky i dvě aperiodické složky s řádově odlišnými velikostmi a časovými konstantami.

3.2 Zvyšovací spínaný stejnosměrný měnič

Pro zvyšovací SpSSM je třeba vytvořit v editoru SAMDu dva obvodové modely a to jednak pro přenos vstupního napětí do napětí výstupního a jednak pro přenos střídavého spínání do výstupního napětí..

Průměrovaný obvodový model zvyšovacího SpSSM pro přenos vstupního napětí, vytvořený schématickým editorem programu SAMD, je uveden na obr. 6. Ze srovnání tohoto modelu se zapojením zvyšovacího SpSSM na obr. 2b je zřejmé, že skutečný spínač s IŠM mezi svorkami *c-a-p* byl nahrazen modelem dle obr. 5a. Navíc byly do modelu doplněny ztrátové rezistory R_L a R_C cívky a kondenzátoru. Velikost zatěžovacího odporu R_z odpovídá zatěžovacímu momentu motoru 0,6 N m. Ekvivalentní rezistor r_e v průměrovaném modelu spínače s IŠM je v tomto případě dán paralelní kombinací sériového ztrátového odporu kondenzátoru R_c a zatěžovacího odporu R_z (Biolek & Biolková, 2007).



Obr. 6 Obvodový model zvyšovacího SpSSM pro přenos vstupního napětí do výstupního napětí

Výsledky výpočtu přenosu vstupního napětí do výstupního napětí, odpovídající přenosu typu effort-to-effort, poskytne SAMD v následujícím tvaru:

```

symbolic
Rz -D*Rz
+s*( C*Rc*Rz -C*Rc*D*Rz )
-----
D^(2)*Rz +D*re -D^(2)*re +Rz -2*D*Rz +RL
-s*( C*Rc*D^(2)*re +2*C*Rc*D*Rz -C*Rc*D^(2)*Rz -C*Rc*D*re +C*D^(2)*re*Rz -C*Rc*Rz -
RL*C*Rc -C*D*re*Rz -L -RL*C*Rz )
+s^(2)*( L*C*Rz +L*C*Rc )

semisymbolic
Multip. Coefficient = 8.333333333333333E+0001

2.222222222222222E+0003
1.000000000000000E+0000 * s
-----
7.89234567901235E+0004
1.73621728395062E+0002 * s
1.000000000000000E+0000 * s^(2)

zeros
-2.222222222222222E+0003

poles
-8.68108641975308E+0001 + j 2.67184076335775E+0002

```

-8.68108641975308E+0001 - j 2.67184076335775E+0002

Získaný výsledek lze přepsat do symbolického a semisymbolického tvaru operátorového přenosu

$$K_{ee}(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_s(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = 8,333 \cdot 10^1 \frac{s + 2,222 \cdot 10^3}{s^2 + 1,736 \cdot 10^2 s + 7,892 \cdot 10^4}. \quad (10)$$

Závislosti koeficientů polynomů v čitateli b_0 , b_1 a ve jmenovateli a_0 , a_1 , a_2 přenosu (10) na parametrech analyzovaného SpSSM jsou zřejmé z výsledkového textu v části „symbolic“.

Je zřejmé, že uvedený přenos má jednu nulou a dva komplexně sdružené póly, všechny leží v levé části Gaussovy roviny komplexní proměnné. To znamená, že daný zvyšovací SpSSM je stabilní.

Kromě toho SAMD poskytne též přechodovou charakteristiku v semisymbolickém tvaru

_____step response_____

2.34638968839945E+0000

-2.34638968839945E+0000*exp(-8.68108641975308E+0001*t)*cos(2.67184076335775E+0002*t)

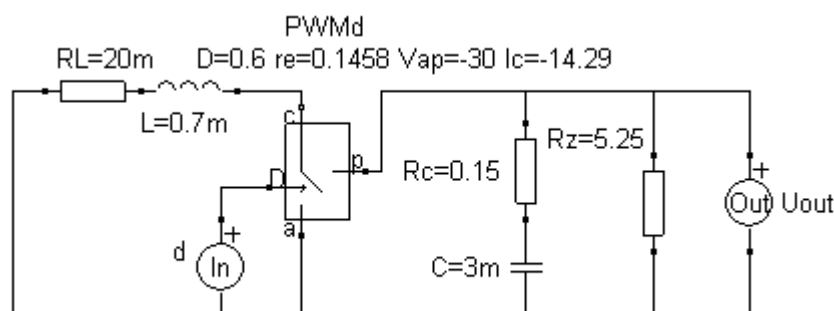
-4.50471393772513E-0001*exp(-8.68108641975308E+0001*t)*sin(2.67184076335775E+0002*t).

čemuž odpovídá matematický výraz

$$h_{\underline{U}_{out}}(t) = 2,346 + 2,389 e^{-\frac{t}{11,52 \cdot 10^{-3}}} \cos(267,2t - 2,952). \quad (11)$$

Přechodová charakteristika obsahuje kromě stejnosměrné složky exponenciálně tlumenou střídavou složku se stejně velkou amplitudou, s časovou konstantou $\tau = 11,52$ ms a s frekvencí $f = 42,52$ Hz.

Linearizovaný průměrovaný obvodový model zvyšovacího SpSSM pro přenos střídavy spínání do výstupního napětí, vytvořený schématickým editorem programu SAMD, je uveden na obr. 7. Od modelu na obr. 6 se liší v tom, že byl použit čtyřpólový model spínače s IŠM dle obr. 5b a jako vstup slouží „zdroj napětí“ označený symbolem střídavy spínání d . Číselné hodnoty parametrů linearizovaného spínače s IŠM stejně jako velikosti napětí U_{ap} , proudu I_c a zatěžovacího odporu R_z odpovídají zatěžovacímu momentu motoru 0,6 N m.



Obr. 7 Obvodový model zvyšovacího SpSSM pro přenos střídavy spínání do výstupního napětí

Výsledky výpočtu přenosu střídavy spínání do výstupního napětí, odpovídající nepochybně přenosu typu effort-to-effort, poskytne SAMD v následujícím tvaru:

_____symbolic_____

re*Ic*Rz +D*Vap*Rz +D^(2)*re*Ic*Rz -2*D*re*Ic*Rz +RL*Ic*Rz -Vap*Rz

+s*(C*Rc*D*Vap*Rz +C*Rc*D^(2)*re*Ic*Rz -2*C*Rc*D*re*Ic*Rz +C*Rc*re*Ic*Rz -

C*Rc*Vap*Rz +L*Ic*Rz +RL*C*Rc*Ic*Rz)

+s^(2)*(L*C*Rc*Ic*Rz)

D^(2)*Rz +D*re -D^(2)*re -2*D*Rz +Rz +RL

-s*(C*Rc*D^(2)*re -C*Rc*Rz -C*Rc*D^(2)*Rz -C*Rc*D*re +C*D^(2)*re*Rz +2*C*Rc*D*Rz -

RL*C*Rc -C*D*re*Rz -L -RL*C*Rz)

+s^(2)*(L*C*Rz +L*C*Rc)

semisymbolic
 Multip. Coefficient = -2.08395833333333E+0000

-2.52831770024548E+0006
 1.08447925711176E+0003 * s
 1.00000000000000E+0000 * s^(2)

 7.89234567901235E+0004
 1.73621728395062E+0002 * s
 1.00000000000000E+0000 * s^(2)

zeros
 -2.22222222222222E+0003
 1.13774296511046E+0003

poles
 -8.68108641975308E+0001 + j 2.67184076335775E+0002
 -8.68108641975308E+0001 - j 2.67184076335775E+0002

Získaný výsledek lze přepsat do symbolického a semisymbolického tvaru operátorového přenosu

$$K_{ee}(s) = \frac{U_{out}(s)}{d(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = -2,084 \frac{s^2 + 1,084 \cdot 10^3 s - 2,528 \cdot 10^6}{s^2 + 1,736 \cdot 10^2 s + 7,892 \cdot 10^4} \quad (12)$$

Závislosti koeficientů polynomů v čitateli b_0 , b_1 , b_2 a ve jmenovateli a_0 , a_1 , a_2 přenosu (12) na parametrech analyzovaného SpSSM jsou zřejmé z výsledkového textu v části „symbolic“.

Je zřejmé, že uvedený přenos má dvě nuly, z nichž jedna leží v pravé části Gaussovy roviny komplexní proměnné. V důsledku toho má analyzovaný zvyšovací SpSSM při přenosu střídavé spínání do výstupního napětí charakter dynamického členu s neminimální fází. Dva komplexně sdružené póly přenosu (12) jsou samozřejmě stejné velikosti jako v případě přenosu (9), takže daný SpSSM je i v tomto případě stabilní.

Přechodová charakteristika, kterou vypočítá SAMD, má semisymbolický tvar

step response
 6.67597309473158E+0001
 -6.88436892806491E+0001 * exp(-8.68108641975308E+0001 * t) * cos(2.67184076335775E+0002 * t)
 -2.94724498796548E+0001 * exp(-8.68108641975308E+0001 * t) * sin(2.67184076335775E+0002 * t),

jemuž odpovídá matematický výraz

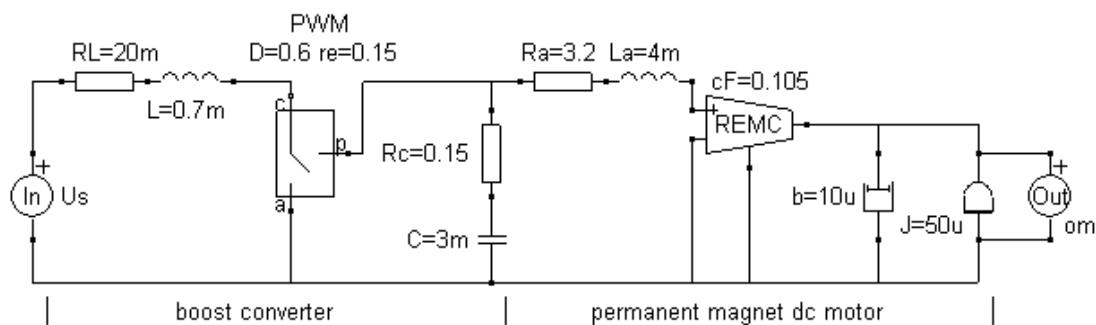
$$h_{\bar{U}_{out}}(t) = 0,6676 + 0,7488 e^{-\frac{t}{11,52 \cdot 10^{-3}}} \cos(267,2t - 2,737). \quad (13)$$

V něm byly velikosti stejnosměrné složky a amplitudy střídavé složky stonásobně zmenšeny, což odpovídá skokové změně střídavé spínání o velikosti 0,01. Amplituda střídavé složky je srovnatelná s velikostí stejnosměrné složky.

3.3 Stejnosměrný mechatronický pohon se zvyšovacím spínaným měničem

Pro stejnosměrný mechatronický pohon se zvyšovacím SpSSM je třeba vytvořit v editoru SAMDu dva obvodové modely, první pro přenos vstupního napětí do výstupní rychlosti motoru a druhý pro přenos střídavé spínání do téže rychlosti.

Průměrovaný obvodový model stejnosměrného mechatronického pohonu se zvyšovacím SpSSM pro přenos vstupního napětí, vytvořený schématickým editorem programu SAMD, je uveden na obr. 8. Předpokládá se, že pohon bude pracovat buď naprázdno nebo zatížený ustáleným momentem 0,6 N m. Ekvivalentní rezistor r_e v průměrovaném modelu spínače s IŠM je v tomto případě dán pouze sériovým ztrátovým odporem kondenzátoru R_C .



Obr. 8 Obvodový model pohonu pro přenos vstupního napětí do rychlosti

Výsledky výpočtu přenosu vstupního napětí do výstupního rychlosti PMDC motoru, odpovídající přenosu typu effort-to-effort, poskytně SAMD v následujícím tvaru:

symbolic

$$\begin{aligned}
 & -cF + D * cF \\
 & -s * (C * Rc * cF - C * Rc * D * cF) \\
 & \text{-----} \\
 & -Ra * b + 2 * D * cF^2 - D^2 * Ra * b + 2 * D * Ra * b - D * re * b - cF^2 - D^2 * cF^2 - RL * b + D^2 * re * b \\
 & + s * (2 * D * La * b - L * b - D * re * J - C * D * re * Ra * b + C * D^2 * re * Ra * b - C * Rc * D * re * b \\
 & \quad + 2 * C * Rc * D * cF^2 - D^2 * La * b - C * D * re * cF^2 - D^2 * Ra * J + 2 * C * Rc * D * Ra * b - \\
 & \quad C * Rc * D^2 * cF^2 + 2 * D * Ra * J + C * D^2 * re * cF^2 - La * b - C * Rc * D^2 * Ra * b - \\
 & \quad RL * C * cF^2 - RL * C * Rc * b - C * Rc * cF^2 + C * Rc * D^2 * re * b + D^2 * re * J - RL * J - \\
 & \quad C * Rc * Ra * b - Ra * J - RL * C * Ra * b) \\
 & -s^2 * (C * D * re * La * b - 2 * C * Rc * D * Ra * J + C * D * re * Ra * J - 2 * D * La * J + C * Rc * D^2 * La * b - \\
 & \quad C * D^2 * re * La * b + D^2 * La * J + C * Rc * D * re * J + C * Rc * Ra * J - C * Rc * D^2 * re * J \\
 & \quad + RL * C * Ra * J + L * C * Rc * b + RL * C * Rc * J + L * J + L * C * cF^2 - 2 * C * Rc * D * La * b + L * C * Ra * b \\
 & \quad + RL * C * La * b + C * Rc * D^2 * Ra * J + C * Rc * La * b + La * J - C * D^2 * re * Ra * J) \\
 & -s^3 * (C * D * re * La * J + L * C * La * b + RL * C * La * J + L * C * Ra * J + C * Rc * La * J + L * C * Rc * J \\
 & \quad + C * Rc * D^2 * La * J - C * D^2 * re * La * J - 2 * C * Rc * D * La * J) \\
 & -s^4 * (L * C * La * J)
 \end{aligned}$$

semisymbolic

Multip. Coefficient = 4.500000000000000E+0007

2.222222222222222E+0003

1.000000000000000E+0000 * s

4.21352380952381E+0009

7.39698380952381E+0007 * s

3.09267738095238E+0005 * s^2

9.51985714285714E+0002 * s^3

1.000000000000000E+0000 * s^4

zeros

-2.222222222222222E+0003

poles

-6.30822885042182E+0002

-1.22657996946038E+0002 + j 2.70221112370774E+0002

-1.22657996946038E+0002 - j 2.70221112370774E+0002

-7.58468353514534E+0001

Získaný výsledek lze přepsat do symbolického a semisymbolického tvaru operátorového přenosu

$$K_{ee}(s) = \frac{\bar{w}(s)}{U_s(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = 4,5 \cdot 10^7 \frac{s + 2,222 \cdot 10^3}{s^4 + 9,52 \cdot 10^2 s^3 + 3,093 \cdot 10^5 s^2 + 7,397 \cdot 10^7 s + 4,214 \cdot 10^9} \quad (14)$$

Závislosti koeficientů polynomů v čitateli b_0 , b_1 a ve jmenovateli a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 přenosu (14) na parametrech analyzovaného SpSSM jsou zřejmé z výsledkového textu v části „symbolic“.

Je zřejmé, že uvedený přenos má jednu nulu, dva reálné póly a dvojici komplexně sdružených pólů. Všechny leží v levé části Gaussovy roviny komplexní proměnné. To znamená, že daný mechatronický stejnosměrný pohon se zvyšovacím SpSSM je stabilní.

Kromě toho SAMD poskytne též přechodovou charakteristiku v semisymbolickém tvaru

```

_____step response_____
2.37331042900413E+0001
6.17522523926224E-0001*exp(-6.30822885042182E+0002*t)
-3.05089075970093E+0001*exp(-7.58468353514534E+0001*t)
6.15828078304176E+0000*exp(-1.22657996946038E+0002*t)*cos(2.70221112370774E+0002*t)
-4.32643606343418E+0000*exp(-1.22657996946038E+0002*t)*sin(2.70221112370774E+0002*t),

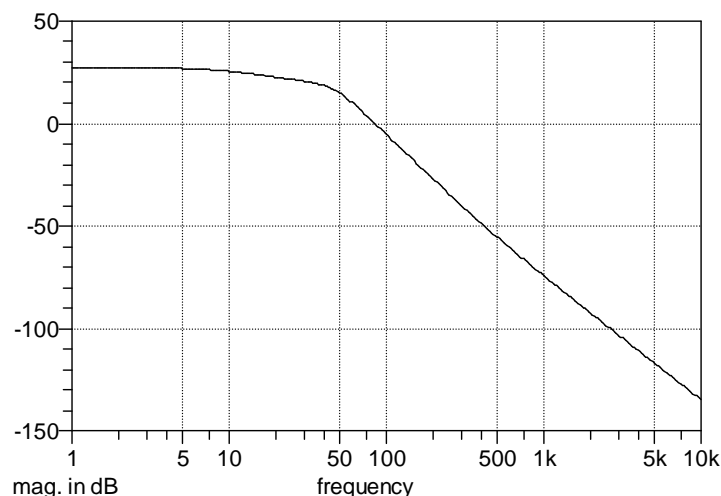
```

čemuž odpovídá matematický výraz

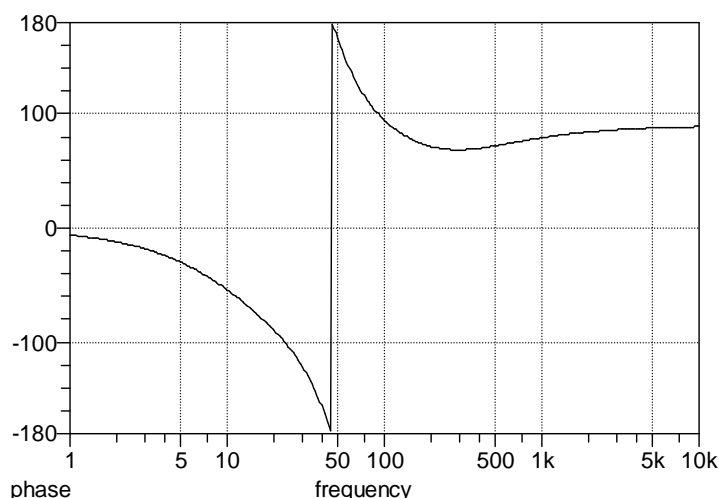
$$h_{\bar{w}}(t) = 23,73 + 0,6175 e^{-\frac{t}{1,59 \cdot 10^{-3}}} - 30,51 e^{-\frac{t}{13,2 \cdot 10^{-3}}} + 7,526 e^{-\frac{t}{8,15 \cdot 10^{-3}}} \cos(270,2t - 0,6124) \quad (15)$$

Přechodová charakteristika tedy obsahuje kromě stejnosměrné složky dvě aperiodické složky s řádově odlišnými časovými konstantami $\tau_1 = 1,59$ ms a $\tau_2 = 13,2$ ms a exponenciálně tlumenou střídavou složkou s časovou konstantou $\tau = 8,15$ ms a s frekvencí $f = 43$ Hz. Dominantní složkou přechodové charakteristiky je aperiodická složka o velikosti $30,31 \text{ rad s}^{-1}$, amplituda střídavé složky představuje cca 25 % velikosti dominantní složky. Navíc časová konstanta tlumení střídavé složky je ve srovnání s časovou konstantou dominantní složky o něco více než poloviční. Z toho vyplývá, že kmitání výstupní rychlosti je téměř zanedbatelné. O tom se lze v SAMDu snadno přesvědčit zobrazením jejího časového průběhu (pro úsporu místa není v tomto článku uveden).

Pro posuzování dynamických vlastností daného mechatronického pohonu je třeba znát i průběh frekvenční charakteristiky. Program SAMD nabízí jednak kmitočtovou charakteristiku ve tvaru Nyquistova diagramu a jednak ve tvaru logaritmických kmitočtových charakteristik (Bodeho diagramy). Na obr. 9 je uvedena logaritmická amplitudová frekvenční charakteristika a na obr. 10 pak logaritmická fázová frekvenční charakteristika pro přenos vstupního napětí do výstupní rychlosti.

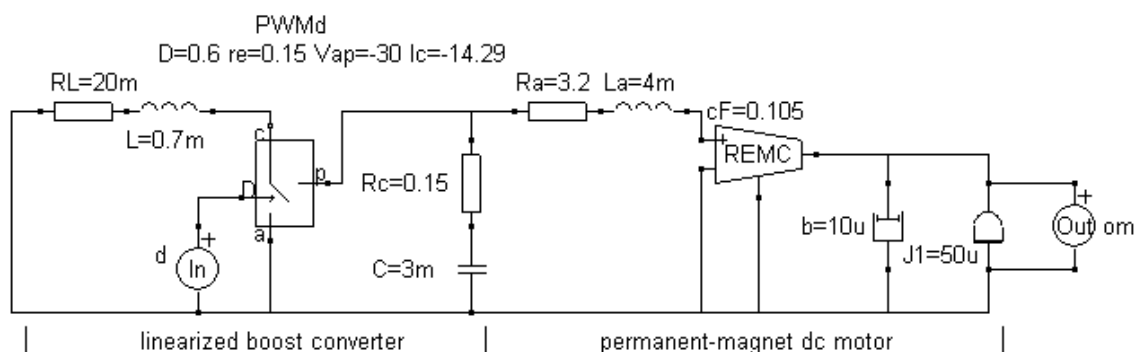


Obr. 9 Logaritmická amplitudová frekvenční charakteristika pro přenos vstupního napětí



Obr.10 Logaritmičká fázová frekvenční charakteristika pro přenos vstupního napětí

Linearizovaný průměrovaný obvodový model stejnosměrného mechatronického pohonu se zvyšovacím SpSSM pro přenos střídavého spínání, vytvořený schématickým editorem programu SAMD, je uveden na obr. 11. Od modelu na obr. 8 se liší v tom, že byl použit čtyřpólový model spínače s IŠM dle obr. 5b a jako vstup slouží „zdroj napětí“ označený symbolem střídavého spínání d . Číselné hodnoty parametrů linearizovaného spínače s IŠM stejně jako velikosti napětí U_{ap} , proudu I_c a zatěžovacího odporu R_c odpovídají zatěžovacímu momentu motoru 0,6 N m.



Obr. 11 Linearizovaný obvodový model pohonu pro přenos vstupního napětí do rychlosti

Výsledky výpočtu přenosu střídavého spínání do výstupní rychlosti PMDC motoru, odpovídající přenosu typu effort-to-effort, poskytne SAMD v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned}
 & \text{symbolic} \\
 & -re \cdot Ic \cdot cF - D \cdot Vap \cdot cF - D^2 \cdot re \cdot Ic \cdot cF + 2 \cdot D \cdot re \cdot Ic \cdot cF - RL \cdot Ic \cdot cF + Vap \cdot cF \\
 & -s \cdot (C \cdot Rc \cdot D \cdot Vap \cdot cF + C \cdot Rc \cdot D^2 \cdot re \cdot Ic \cdot cF - 2 \cdot C \cdot Rc \cdot D \cdot re \cdot Ic \cdot cF + C \cdot Rc \cdot re \cdot Ic \cdot cF - \\
 & \quad C \cdot Rc \cdot Vap \cdot cF + L \cdot Ic \cdot cF + RL \cdot C \cdot Rc \cdot Ic \cdot cF) \\
 & -s^2 \cdot (L \cdot C \cdot Rc \cdot Ic \cdot cF) \\
 & \text{-----} \\
 & 2 \cdot D \cdot Ra \cdot b - cF^2 \cdot D^2 \cdot Ra \cdot b - Ra \cdot b - D \cdot re \cdot b + 2 \cdot D \cdot cF^2 \cdot D^2 - D^2 \cdot cF^2 \cdot D^2 - RL \cdot b + D^2 \cdot re \cdot b \\
 & -s \cdot (La \cdot b + L \cdot b + D \cdot re \cdot J1 + C \cdot D \cdot re \cdot Ra \cdot b - C \cdot D^2 \cdot re \cdot Ra \cdot b + C \cdot Rc \cdot D \cdot re \cdot b + C \cdot Rc \cdot cF^2 \cdot D^2 \\
 & \quad + D^2 \cdot La \cdot b + C \cdot D \cdot re \cdot cF^2 \cdot D^2 + D^2 \cdot Ra \cdot J1 + C \cdot Rc \cdot Ra \cdot b + C \cdot Rc \cdot D^2 \cdot cF^2 \cdot D^2 + Ra \cdot J1 - \\
 & \quad C \cdot D^2 \cdot re \cdot cF^2 \cdot D^2 - 2 \cdot D \cdot La \cdot b + C \cdot Rc \cdot D^2 \cdot Ra \cdot b + RL \cdot C \cdot cF^2 \cdot D^2 + RL \cdot C \cdot Rc \cdot b - \\
 & \quad 2 \cdot C \cdot Rc \cdot D \cdot cF^2 \cdot D^2 - C \cdot Rc \cdot D^2 \cdot re \cdot b - D^2 \cdot re \cdot J1 + RL \cdot J1 - 2 \cdot C \cdot Rc \cdot D \cdot Ra \cdot b - 2 \cdot D \cdot Ra \cdot J1 \\
 & \quad + RL \cdot C \cdot Ra \cdot b) \\
 & -s^2 \cdot (C \cdot D \cdot re \cdot La \cdot b + C \cdot Rc \cdot Ra \cdot J1 + C \cdot D \cdot re \cdot Ra \cdot J1 + La \cdot J1 + C \cdot Rc \cdot D^2 \cdot La \cdot b - \\
 & \quad C \cdot D^2 \cdot re \cdot La \cdot b + D^2 \cdot La \cdot J1 + C \cdot Rc \cdot D \cdot re \cdot J1 - 2 \cdot C \cdot Rc \cdot D \cdot Ra \cdot J1 - C \cdot Rc \cdot D^2 \cdot re \cdot J1 \\
 & \quad + RL \cdot C \cdot Ra \cdot J1 + L \cdot C \cdot Rc \cdot b + RL \cdot C \cdot Rc \cdot J1 + L \cdot J1 + L \cdot C \cdot cF^2 \cdot D^2 + C \cdot Rc \cdot La \cdot b + L \cdot C \cdot Ra \cdot b \\
 & \quad + RL \cdot C \cdot La \cdot b + C \cdot Rc \cdot D^2 \cdot Ra \cdot J1 - 2 \cdot C \cdot Rc \cdot D \cdot La \cdot b - 2 \cdot D \cdot La \cdot J1 - C \cdot D^2 \cdot re \cdot Ra \cdot J1)
 \end{aligned}$$

$$-s^3 * (C * D * re * La * J1 + L * C * La * b + RL * C * La * J1 + L * C * Ra * J1 - 2 * C * Rc * D * La * J1 + L * C * Rc * J1 + C * Rc * D^2 * La * J1 - C * D^2 * re * La * J1 + C * Rc * La * J1) - s^4 * (L * C * La * J1)$$

semisymbolic

Multip. Coefficient = -1.12533750000000E+0006

$$-2.52618436691215E+0006 \\ 1.08543925711176E+0003 * s \\ 1.00000000000000E+0000 * s^2$$

$$4.21352380952381E+0009 \\ 7.39698380952381E+0007 * s \\ 3.09267738095238E+0005 * s^2 \\ 9.51985714285714E+0002 * s^3 \\ 1.00000000000000E+0000 * s^4$$

zeros

$$-2.22222222222222E+0003 \\ 1.13678296511046E+0003$$

poles

$$-6.30822885042182E+0002 \\ -1.22657996946038E+0002 + j 2.70221112370774E+0002 \\ -1.22657996946038E+0002 - j 2.70221112370774E+0002 \\ -7.58468353514534E+0001$$

Získaný výsledek lze přepsat do symbolického a semisymbolického tvaru operátorového přenosu

$$K_{ee}(s) = \frac{\bar{w}(s)}{\bar{d}(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = -1,125 \cdot 10^6 \frac{s^2 + 1,085 \cdot 10^3 s - 2,256 \cdot 10^6}{s^4 + 9,52 \cdot 10^2 s^3 + 3,093 \cdot 10^5 s^2 + 7,397 \cdot 10^7 s + 4,214 \cdot 10^9} \quad (16)$$

Závislosti koeficientů polynomů v čitateli b_0 , b_1 , b_2 a ve jmenovateli a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 přenosu (16) na parametrech analyzovaného SpSSM jsou zřejmé z výsledkového textu v části „symbolic“.

Je zřejmé, že uvedený přenos má dvě nuly, z nichž jedna leží v pravé části Gaussovy roviny komplexní proměnné. V důsledku toho má analyzovaný mechatronický pohon se zvyšovacím SpSSM při přenosu střídavy spínání do výstupního rychlosti PMDC motoru charakter dynamického členu s neminimální fází. Dva reálné póly a dvojice komplexně sdružených pólů přenosu (16) jsou samozřejmě stejné velikosti jako v případě přenosu (14), takže daný SpSSM je i v tomto případě stabilní.

Přechodová charakteristika, kterou vypočítá SAMD, má semisymbolický tvar

step response

$$6.74687062067722E+0002 \\ 2.72965971705198E+0001 * \exp(-6.30822885042182E+0002 * t) \\ -9.25177733370800E+0002 * \exp(-7.58468353514534E+0001 * t) \\ 2.23194074132558E+0002 * \exp(-1.22657996946038E+0002 * t) * \cos(2.70221112370774E+0002 * t) \\ -9.46482188129187E+0001 * \exp(-1.22657996946038E+0002 * t) * \sin(2.70221112370774E+0002 * t),$$

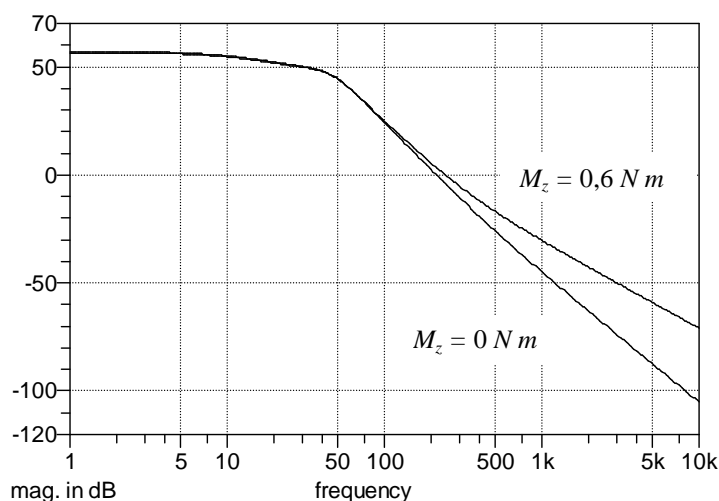
jemuž odpovídá matematický výraz

$$h_{\bar{w}}(t) = 6,747 + 0,2730 e^{-\frac{t}{1,59 \cdot 10^{-3}}} - 9,252 e^{-\frac{t}{13,2 \cdot 10^{-3}}} + 2,424 e^{-\frac{t}{8,15 \cdot 10^{-3}}} \cos 270,2(270,2t - 0,4011). \quad (17)$$

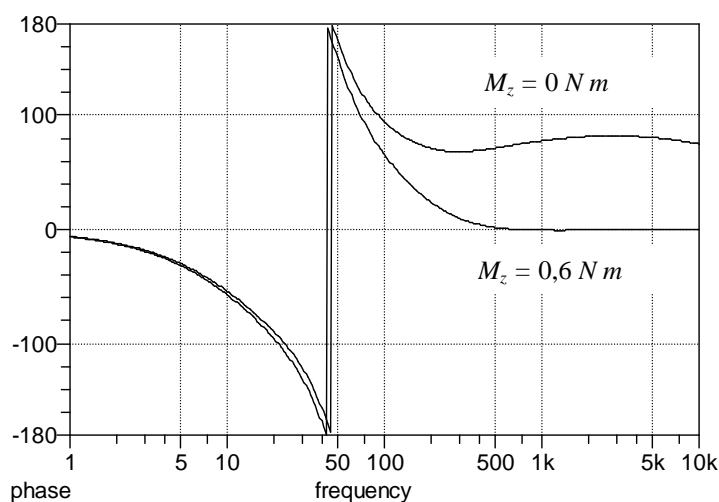
V něm byly velikosti stejnosměrné složky i obou aperiodických složek a amplitudy střídavé složky stonásobně zmenšeny, což odpovídá skokové změně střídavy spínání o velikosti 0,01. Dominantní složkou přechodové charakteristiky je v tomto případě aperiodická složka o velikosti 9,252 rad s^{-1} , amplituda střídavé složky představuje cca 26 % velikosti dominantní složky. Navíc časová konstanta

tlumení střídavé složky je ve srovnání s časovou konstantou dominantní složky o něco více než poloviční. Z toho vyplývá, že kmitání výstupní rychlosti je téměř zanedbatelné. O tom se lze v SAMDu snadno přesvědčit zobrazením jejího časového průběhu (pro úsporu místa není v tomto článku uveden).

Pro posuzování dynamických vlastností daného mechatronického pohonu při přenosu střídavé spínání do výstupní rychlosti je třeba znát i průběhy frekvenční charakteristiky pro chod naprázdno a pro chod se zatížením momentem 0,6 N m. Na obr. 12 jsou uvedeny logaritmické amplitudové frekvenční charakteristiky a na obr. 13 pak logaritmické fázové frekvenční charakteristiky pro přenos střídavé spínání do výstupní rychlosti a uvedená zatížení.



Obr. 12 Logaritmické amplitudové frekvenční charakteristiky pro přenos střídavé spínání



Obr. 13 Logaritmické fázové frekvenční charakteristiky pro přenos střídavé spínání

Z průběhů jak amplitudové tak i fázové frekvenční charakteristiky pro přenos střídavé spínání je patrné, že jejich tvary závisí na zatížení motoru. U amplitudové charakteristiky je zřejmé, že při zatížení motoru je frekvence, při které tato charakteristika prochází nulou vyšší než při chodu naprázdno a navíc se zmenšuje její strmost. Fázová charakteristika vykazuje při vyšších frekvencích nulový fázový posuv.

Výše uvedenými postupy byly zjištěny a analyzovány přenosy vstupního napětí a střídavé spínání do výstupní rychlosti pohonu. Podobně lze v případě potřeby zjišťovat a analyzovat přenosy obou uvedených veličin např. do výstupního napětí zvyšovacího SpSSM nebo do proudu kotvy PMDC motoru přesunutím výstupního bloku Out v obvodových modelech mezi příslušné uzly nebo do příslušné větve a volbou typu přenosu typu effort-to-flow pro případ výpočtu přenosů do proudu kotvy PMDC motoru.

4. Závěr

V příspěvku je na příkladu akčního členu mechatronického stejnosměrného pohonu, tvořeného zvyšovacím SpSSM a PMDC motorem ukázáno, jakým způsobem lze pomocí programu SAMD analyzovat jeho základní dynamické vlastnosti při přenosu vstupního napětí a při přenosu střídavě spínání do výstupní rychlosti motoru, které jsou výchozím podkladem pro návrhy přímého nebo zpětnovazebního řízení a regulace celého pohonu. Ukázalo se, že vzhledem ke snadnosti vytváření účelově orientovaných obvodových modelů v grafickém editoru uvedeného programu, vycházejících v případě elektrických a elektronických obvodů z jejich obvodových schémat a v případě mechanických částí z obdobných ekvivalentních schémat, a vzhledem ke snadnosti formulace příslušných přenosů lze považovat program SAMD za významný příspěvek k analýzám projektovaných nebo již realizovaných mechatronických pohonů.

Poděkování

V příspěvku jsou prezentovány dílčí výsledky výzkumu, který je podporován Grantovou Agenturou ČR v rámci řešení projektu č. P102/10/1665.

Odkazy

- Biolek, D. & Biolková, V. (2007), Symbolická analýza DC-DC měničů s impulsovou šířkovou modulací. *Slaboproudý obzor*, 63 (2007), No. 3 – 4, pp. 29 – 32.
- Dijk, E. et al (1995), PWM-Switch Modeling of DC-DC Converters, in *IEEE Trans. on Power Electronics*, 1995, Vol. 10, No. 6, 659 – 664.
- Kalous, J. (2004), Dvě metody modelování stejnosměrných měničů s impulsní šířkovou modulací, *Sborník Univerzity obrany v Brně, řada B*, 2004, č. 2, 77 – 96)
- Kalous, J. (2006), Modelování spínaných stejnosměrných měničů. *Slaboproudý obzor*, 62 (2006), No. 3 – 4, P1 – P10.
- Kalous, J., Biolek, D., Kolka, Z. (2010), Project of a Program for Symbolic Analyses of Mechatronic Drives, in *Proc. of Int. Conf. on Engineering Mechanics 2010* (I. Zolotarev, ed), Inst. of Thermomechanics, AS CR, v.v.i., Prague, May 2010.
- Lyshevski, S. E. (2000), *Electromechanical Systems, Electric Machines, and Applied Mechatronics*, CRC Press LLC, 2000.
- Vorpérian, V. (1990), Simplified Analysis of PWM Converters Using Model of PWM Switch, Part I: Continuous Conduction Mode, *IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems*, 1990, Vo. 26, No. 3, 490 – 496.